Оглавление

Глава 7.

Первая половина 19 века

В конце 18 века многие математики считали, что развитие математики близко к завершению, и скоро уже не будет никаких существенно новых открытий. В 1781 году Лагранж писал Даламберу, что если не будут открыты новые идеи в математике, то кафедра геометрии в Академии скоро может стать такой же, как кафедры арабского языка в университетах. Эйлер и Даламбер соглашались с Лагранжем, что математика почти исчерпала свои идеи, и они не видели на горизонте никаких великих умов. Ещё ранее, в 1754 году, Дидро высказывал мнение, что скоро в математике наступит застой и она останется в том виде, в каком её оставили Бернулли, Клеро, Даламбер и Лагранж. Но в математику пришли Гаусс, Абель, Якоби, Галуа, и разговоры про застой в математике больше не возобновлялись.

В начале 19 века постепенно устранились последствия ожесточённого спора между Ньютоном и Лейбницем. Из-за этого спора английские математики долгое время отказывались читать работы, в которых использовались обозначения Лейбница. Но в 1813 году в Кембридже было основано Общество Анализа, чтобы изучить обозначения Лейбница. Вскоре после этого обозначение dy/dx заменило обозначение $\dot{y}$, и книги и статьи, написанные в континентальной Европе, стали доступны английским студентам.

Одна из центральных тем математики 19 века — римановы поверхности. В первой половине века появилась задача обращения абелевых интегралов, которая постепенно привела к формированию понятия римановой поверхности.

В первой половине 19 века постепенно сформировалось понятие группы. Важной областью исследований стали алгебраические числа. Была открыта и начала изучаться неевклидова геометрия.

7.1. Карл Фридрих Гаусс (1777-1855)

7.1.1. Биография

У Гаусса был знающий и заботливый учитель Бюттнер, быстро распознавший одарённость своего ученика. Ассистентом Бюттнера в эти годы был Мартин Бартельс (1769-1836), впоследствии профессор Казанского университета, где он работал вместе с Лобачевским. В 1791 году Гаусс как одарённый и многообещающий юноша был представлен государю — Браунгшвейскому герцогу, и тот пожаловал Гауссу стипендию в 10 талеров в год. Впоследствии большую поддержку Гауссу оказывал фон Циммерман, личный доверенный герцога.

С 1795 года Гаусс изучал математику в университете в Гёттингене (вопреки желанию герцога, который хотел, чтобы он учился в местном Гельмштедтском университете). Первого большого успеха Гаусс достиг, когда ему не было ещё 19 лет: он доказал, что правильный 17-угольник можно построить циркулем и линейкой. В то же время Гаусс занимался теорией арифметико-геометрического среднего. В университете единственная прочная дружба, о которой известно, завязалась с Фаркашем (Вольфгангом) Бойяи; переписка между ними продолжалась 50 лет. По свидетельству Бойяи Гаусс был очень скромен, с ним можно было общаться годы, не подозревая о его исключительности. Часто они гуляли часами, каждый занятый своими мыслями, не обмениваясь ни словом. В Гёттингене Гаусс подготовил трактат «Арифметические исследования»; это основная работа Гаусса по теории чисел. (Гаусс называл теорию чисел «царицей математики».) В 1798 году Гаусс по неизвестным причинам покинул университет, не получив диплома, и вернулся в Брауншвейг. По желанию своего герцога он в 1799 году представил докторскую диссертацию в Гельмштедтский университет; степень ему была присуждена без обычного устного экзамена (защиты диссертации). Диссертация называлась «Новое доказательство теоремы о том, что каждая целая рациональная алгебраическая функция одного переменного может быть разложена на действительные множители первой или второй степени». Речь идёт о доказательстве теоремы, которую часто называют *основная теорема алгебры*. Более половины диссертации составляла критика предыдущих доказательств этой теоремы. Все они действительно содержали серъёзные пробелы, поэтому доказательство Гаусса было не просто новым. Впрочем, в нём тоже были пробелы, хотя и устранимые.

Вскоре после защиты диссертации Гаусс обращается к астрономии. 1 января 1801 году итальянский астроном Джузеппе Пиацци открыл новую малую планету Церера. Только 9° её орбиты были известны в тот момент, когда 11 февраля того же года она исчезла «в тени Солнца». Астрономы готовились к тому, чтобы вновь её обнаружить, когда она снова появится в конце 1801 или начале 1802 года. Было опубликовано несколько прогнозов её орбиты, в том числе и прогноз Гаусса. Его прогноз существенно отличался от других прогнозов, но именно он оказался правильным: планета была вновь обнаружена в точках, очень близких к орбите, предсказанной Гауссом. Этот успех принёс Гауссу много почестей. При вычислениях Гаусс использовал разработанный им метод наименьших квадратов; он описывает его как «тот принцип, что сумма квадратов разностей между наблюдёнными и вычисленными величинами должна быть минимальна». Независимо от Гаусса этот метод разработал Лежандр, и именно ему принадлежит первая публикация этого метода, но Гаусс применял его раньше Лежандра. В связи с методом наименьших квадратов Гаусс вводит экспоненту e^{-x^2} (*нормальное распределение*) как наиболее естественный закон распределения ошибок.

В 1807 году Гаусс переехал в Гёттинген, получив должность директора обсерватории. В 1818-1832 годах Гаусс много занимался большим проектом геодезического исследования Ганноверского королевства. В первые годы Гаусс лично руководил этим проектом, продолжавшимся примерно 20 лет. Много лет Гаусс лично занимался геодезическими измерениями и их обработкой; главным средством обработки геодезических наблюдений для Гаусса был метод наименьших квадратов. Территория Ганноверского королевства во многих местах была сложная для геодезических измерений; для контроля сети мелких треугольников был измерен огромный треугольник Хохенгаген-Инзельберг-Брокен. Об этом измерении Гаусс упомянул с своей работе по геометрии искривлённых поверхностей в связи с геодезическими треугольниками, сумма углов которых может отличаться от 180°. Для этого треугольника он вычислил необходимые поправки. По этому поводу он писал в 1827 году Ольберсу: «В практическом отношении это, однако, совершенно неважно, потому что на самом деле даже для самых больших треугольников, которые можно измерять на Земле, эта неравномерность в распределении незаметна, но честь науки требует ясного понимания природы этой неравномерности.» Но в самой статье эти соображения не высказаны отчётливо, поэтому появилась легенда, будто Гаусс проделал эти чрезвычайно трудоёмкие и дорогостоящие измерения лишь для того, чтобы выяснить, является наше пространство евклидовым или неевклидовым. Но письмо Гаусса показывает, что он хорошо понимал, сколь малы размеры этого треугольника по сравнению с межзвёздными расстояниями, и потому ошибка измерения много больше гипотетического отклонения суммы углов треугольника от 180°. Деятельность Гаусса по геодезическим исследованиям, в процессе которой он изобрёл новый измерительный прибор гелиотроп, позволяет считать его одним из великих геодезистов, надолго установившим новые стандарты наблюдений и их обработки.

В 1832 году Гаусс начал исследования магнитного поля Земли. В 1833 году вблизи астрономической обсерватории в Гёттингене была построена магнитная обсерватория. Гаусс вместе с Вильгельмом Вебером составили атлас земного магнетизма и изготовили телеграфный аппарат.

В последние годы жизни Гаусс полюбил преподавание и чтение лекций гораздо больше, чем в ранние годы (в молодости Гаусс часто говорил о своём отвращении к преподаванию). В числе последних студентов Гаусса был Р.Дедекинд. Большинство лекций Гаусса было по астрономии; часто читал он лекции о методе наименьших квадратов.

Гаусс одним из первых понял и оценил исследования Лобачевского по неевклидовой геометрии. В начале 1840-х годов Гаусс в связи с интересом к работам Лобачевского начал изучать русский язык. В письме к Шумахеру Гаусс жаловался, что выбор русской литературы в местной библиотеке крайне скуден.

В январе 1854 года у Гаусса нашли расширение сердца, и это означало, что долго он не проживёт. Затем на некоторое время его здоровье улучшилось, и именно в этот период Риману была дана возможность прочитать лекцию «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии». Риман прочитал её, выполняя обычное требование при получении разрешения читать лекции в Гёттингенском университете. Из трёх тем, которые Риман представил на выбор, Гаусс указал на вторую, а не на первую, чем нарушил обычай и ожидания Римана. Очевидно, Гаусса особенно интересовала эта тема. Вебер сообщает, что Гаусс шёл с лекции домой в возбуждении и очень её хвалил.

7.1.2. Арифметические исследования

Гаусс подготовил к изданию свой трактат «Арифметические исследования» в 1800 году в возрасте 20 лет и издал его при поддержке герцога Брауншвейгского в Лейпциге в 1801 году. Основные идеи Гаусса в этом трактате: теория сравнений; введение алгебраических чисел; теория квадратичных форм как основа диофантова анализа. В этом трактате содержится также построение правильного 17-угольника.

Первые три раздела трактата представляют собой систематическое введение в элементарную теорию чисел на основе теории сравнений чисел по некоторому модулю. Сама идея сравнения была не нова: она встречается у Эйлера, Лагранжа и Лежандра. Например, теорема о том, что сравнение степени n по простому модулю p имеет не более n различных (не сравнимых по модулю p решений), была доказана Лагранжем (1768); у Гаусса она доказана в пункте 43. Заслуга Гаусса в том, что он ввёл общепринятые обозначения и систематически использовал сравнения.

В пункте 42 неожиданно появляется так называемая лемма Гаусса: если многочлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1 разлагается в произведение многочленов со старшими коэффициентами 1 и рациональными коэффициентами, то все эти рациональные коэффициенты целые. Такими же рассуждениями можно доказать, что если многочлен с целыми коэффициентами разлагается в произведение двух многочленов с рациональными коэффициентами, то он разлагается и в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

В третьем разделе Гаусс исследует вычеты степеней данного числа по простому модулю. Он это делает с помошью малой теоремы Ферма, используя понятие первообразного корня, введённое Эйлером. Число a называется *первообразным корнем*, если числа a, a^2, a^3, $\ldots$ дают (по модулю p) все целые числа, взаимно простые с p. Гаусс доказывает существование первообразного корня, т.е. доказывает, что мультипликативная группа поля вычетов по модулю p циклическая; это доказательство, как позже заметил Галуа, переносится на случай любого конечного поля. Используя первообразный корень a, Гаусс определяет *индекс e* числа b относительно a следующим образом: $a^e \equiv b \pmod p$. Гаусс сравнивает индексы с логарифмами.

Четвёртый раздел посвящён сравнениям второй степени. Его центральная тема — квадратичный закон взаимности. Этот закон обнаружил неутомимый вычислитель Эйлер и независимо от него Лежандр, но ни Эйлер, ни Лежандр не смогли его доказать. Чтобы сформулировать квадратичный закон взаимности, введём так называемый *символ Лежандра* $\left(\frac{q}{p}\right)$, который равен $+1$, если q — квадратичный вычет по модулю p (т.е. сравнение $x^2 \equiv q \pmod p$ имеет решение), и равен -1 в противном случае. Тогда для любых нечётных простых чисел p и q имеет место равенство

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

(Гаусс использовал другую формулировку, и у него нет выражения «квадратичная взаимность».)

Гаусс получил первое строгое доказательство квадратичного закона взаимности в 1796 году. В «Арифметических исследованиях» он приводит другое доказательство, а впоследствии он опубликовал ещё четыре других доказательства, а ещё два доказательства остались неопубликованными. Гаусс называл квадратичный закон взаимности золотой теоремой (theorema aureum) и жемчужиной арифметики.

Четвёртый раздел завершается сведением произвольных сравнений второй степени $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod p$ к сравнениям вида $x^2 \equiv c \pmod p$. Гаусс даёт краткий обзор работ Эйлера и Лежандра на эту тему, отмечая, что первое полное доказательство получено им.

Пятый раздел — центральный в книге. В нём развивается теория бинарных квадратичных форм, т.е. выражений вида $ax^2 + 2bxy + cy^2$, где a, b и c — целые числа. Одна из основных проблем в этой теории — найти все возможные способы представить данное число данной формой. Сначала Гаусс повторяет и суммирует результаты Лагранжа. Лагранж назвал эквивалентными формы, которые получаются заменой $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$, где α, β, γ и δ — такие целые числа, что $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Гаусс называет такие формы собственно эквивалентыми. Помимо них он рассматривает и случай, когда $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$; такие формы он называет формы несобственно эквивалентными. Введение несобственно эквивалентных форм понадобилось Гауссу для того, чтобы определить композицию классов эквивалентных форм; впоследствии эта идея композиции оказалась важной для алгебраической теории чисел.

Множества чисел, представимых эквивалентными формами, совпадают. Лагранж показал, что для фиксированного дискриминанта $D = b^2 - ac$ можно выбрать конечное число форм с дискриминантом D так, что любая форма с дискриминантом D будет эквивалентна одной из выбранных форм. Понятие эквивалентных форм послужило отправной точкой в исследованиях Гаусса. Главной формой с дискриминантом D Гаусс называет форму $x^2 - Dy^2$. Гаусс определил композицию (произведение) форм и доказал, что композиция переносится на классы эквивалентных форм, причём класс главной формы относительно такого умножения ведёт себя как единичный элемент. Фактически Гаусс проверил для операции композиции свойства групповой операции. Это был первый нетривиальный пример коммутативной группы, встретившийся в математике. Гаусс понимал, что полученная им группа не обязательно циклическая, но разлагается в прямую сумму циклических групп. Эту теорию Гаусс использовал для доказательства теорем о представлении чисел формами. В частности, с её помощью он получил новое доказательство квадратичного закона взаимности.

В 1830-1835 годы Гаусс занимался вычислением числа классов форм с данным отрицательным дискриминантом. Он получил верный ответ и у него была схема доказательства, но он не опубликовал эти результаты, оставшиеся лишь в записках. Первое опубликованной доказательство принадлежит Дирихле.

Гаусс начал строить аналогичную теорию для тернарных квадратичных форм, т.е. квадратичных форм от трёх переменных. При этом он доказал теорему о представимости каждого числа в виде суммы трёх треугольных чисел (это утверждал Ферма, но первое доказательство получил Гаусс). Для тернарных форм помимо проблемы о представлении данного числа данной формой появляется проблема о представлении данной бинарной формы данной тернарной формой.

В пятом разделе впервые вводится термин *детерминант* (для формы $ax^2 + 2bxy + cy^2$.

В шестом разделе, в частности, описано решение систем линейных уравнений методом исключения (*метод Гаусса*).

Седьмой раздел посвящён теории деления круга на n равных частей. Для этого Гаусс рассматривает многочлен деления круга $\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$ и сводит задачу к случаю, когда n простое. Гаусс доказывает, что для простого n многочлен деления круга неприводим, т.е. его нельзя представить в виде произведения двух многочленов положительной степени с рациональными коэффициентами. Затем он доказывает, что если $n-1 = p_1p_2\dots$, где p_1, p_2, …— простые числа, то многочлен деления круга раскладывается на p_1 множителей степени $\frac{n-1}{p_1}$, коэффициенты которых определяются решением уравнений степени p_1; каждый из этих множителей, в свою очередь, раскладывается на p_2 множителей степени $\frac{n-1}{p_1p_2}$, коэффициенты которых определяются решением уравнений степени p_2, и т.д. Например, при $n = 17$ многочлен деления круга раскладывается на 2 множителя степени 8, коэффициенты которых находятся решением квадратных уравнений с рациональными коэффициентами. Каждый множитель степени 8 раскладывается на 2 множителя степени 4, коэффициенты которых находятся решением квадратных уравнений, коэффициенты которых рационально выражаются через коэффициенты полученных многочленов степени 8, и т.д. Ключевой момент в этой теории — использование первообразных корней. Окончательный результат — правильный n-угольник, где n — простое число вида $2^{2^\nu} + 1$, можно построить циркулем и линейкой. Гаусс добавляет, что было бы бесполезно пытаться разделить круг в случаях $n = 7,\ 11,\ 13,\ 19,\ \dots$, но что рамки трактата не позволяют ему доказать это. Ни в одной из работ Гаусса нет никакого указание на полное доказательство этого утверждения.

При доказательстве возможности построить правильный 17-угольник циркулем и линейкой основная идея Гаусса — специальная нумерация корней степени 17 из единицы. Пусть $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}$ — один из этих корней, g — такое целое число, что числа $1, g, g^2, g^3, \dots, g^{16}$ дают разные остатки при делении на 17 (например, $g = 3$). Положим $\omega_k = \varepsilon^{g^k}$. Тогда $\omega_{k+l} = \varepsilon^{g^{k+l}} = \varepsilon^{g^k g^l} = (\omega_k)^{g^l}$. Числа $x_1 = \sum_{i=0}^{7}\omega_{2i}$ и $x_2 = \sum_{i=0}^{7}\omega_{2i+1}$ удовлетворяют квадратному уравнению $x^2 + x - 4 = 0$. Числа $y_1 = \sum_{i=0}^{3}\omega_{4i}$ и $y_2 = \sum_{i=0}^{3}\omega_{4i+2}$ удовлетворяют квадратному уравнению $y^2 - x_1y + 1 = 0$, а числа $y_3 = \sum_{i=0}^{3}\omega_{4i+1}$ и $y_4 = \sum_{i=0}^{3}\omega_{4i+3}$ удовлетворяют квадратному уравнению $y^2 - x_2y + 1 = 0$. Наконец, числа $z_1 = \omega_0 + \omega_8 = 2\cos\frac{2\pi}{17}$ и $z_2 = \omega_4 + \omega_{12}$ удовлетворяют квадратному уравнению $z^2 - y_1z + y_3$, поэтому их можно построить с помощью циркуля и линейки.

При разработке теории деления круга Гаусс фактически доказал разрешимость в радикалах уравнений с циклической группой Галуа, и в этом доказательстве уже неявно присутствуют многие составляющие теории Галуа. В 1826 году Абель перенёс методы Гаусса на случай уравнений с коммутативной группой Галуа.

Гаусс делает намёк на то, что аналогичная теория есть и для деления лемнискаты. Гаусс, по-видимому, разработал также и эту теорию, но не опубликовал её. Впоследствии это сделал Абель.

Гаусс упоминает о суммах вида $\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{k}{p}\right)\cos\frac{2\pi k}{p}$. Этими суммами Гаусс занимался и позже; они оказались важными для теории чисел и получили название *гауссовых сумм*. Легко доказать, что гауссова сумма равна $\pm\sqrt{p}$, но вычислить знак перед $\sqrt{p}$ очень трудно. Этим вычислением Гаусс упорно занимался 4 года и завершил его уже после публикации «Арифметических исследований».

«Арифметические исследования» чрезвычайно трудны для чтения. Они оказали большое влияние на дальнейшее развитие теории чисел во многом благодаря толкованию, которое дал Дирихле в своих лекциях по теории чисел. (Для Дирихле книга Гаусса была настольной, он изучал её с религиозным рвением.)

7.1.3. Теория биквадратичных вычетов

С 1808 по 1832 годы, Гаусс изучал кубический и биквадратичный законы взаимности. Результаты этих исследований, относящиеся к биквадратичному закону взаимности, изложены в мемуаре «Теория биквадратичных вычетов», первая часть которого опубликована в 1828 году, а вторая — в 1832 году. В работах по биквадратичному закону взаимности Гауссу понадобилось разложение простого числа вида $4n + 1$ в произведение комплексных чисел вида $a + bi$ с целыми a и b. Такие числа рассматривали Эйлер и Лагранж, но именно Гаусс установил их важность. В связи с этим числа вида $a + bi$ с целыми a и b получили название *гауссовы целые числа*.

Арифметику чисел вида $a + bi$, где a и b — целые числа, Гаусс исследовал во второй части мемуара. Он определил, что такое простые и составные числа такого вида, ввёл для них алгоритм Евклида, доказал однозначность разложения целого числа на простые множители, построил для таких чисел аналог теории степенных вычетов, доказал аналог малой теоремы Ферма, ввёл понятие первообразного корня и развил теорию индексов. Он также сформулировал для таких чисел квадратичный закон взаимности.

Гаусс писал, что для изучения кубических вычетов надо будет рассмотреть числа вида $a + b\rho$, где $\rho^3 = 1$, $\rho \neq 1$.

Гаусс сформулировал биквадратичный закон взаимности, но не доказал его. Доказательства кубического и биквадратичного законов взаимности Якоби сообщил на своих лекциях в Кёнигсберге, а Эйзенштейн первым опуликовал, из-за чего у них возник спор.

7.1.4. Комплексные числа и основная теорема алгебры

В 1742 году Эйлер высказал мнение, что любой многочлен с действительными коэфициентами можно представить в виде произведения линейных и квадратичных многочленов с действительными коэффициентами. Н.Бернулли и Гольдбах пытались привести контрпримеры, но Эйлер опроверг их. Тем не менее Н.Бернулли и Гольдбах не поверили в предположение Эйлера. Эйлер и Даламбер приводили доказательства этого утверждения, получившего название «основная теорема алгебры», но их доказательства были неполные. В 1772 году Лагранж попытался заполнить пробелы в доказательстве Эйлера, но без особого успеха. Его основная ошибка, как и у его предшественников, была в том, что он без обоснования предполагал существование поля разложения многочлена.

Первое полное (хотя и не совсем строгое с современной точки зрения) доказательство основной теоремы алгебры для многочленов с действительными коэффициентами получил Гаусс в 1799 году, в своей диссертации. Ход его рассуждений следующий. Пусть дано уравнение $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots = 0$, где A, B, ...— действительные числа. Требуется доказать, что это уравнение имеет корень. Разложим многочлен $X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots$ на действительную и мнимую части: $X = T + iU$; обе они представляются в полярных координатах. Достаточно доказать, что кривые $T = 0$ и $U = 0$ пересекаются. Гаусс это делает, изучая свойства этих кривых. В доказательстве Гаусс избегает комплексных чисел.

Гаусс неоднократно возвращался к основной теоремы алгебры. Его второе доказательство (1815) по существу алгебраическое. Для этого доказательства он ввёл результант многочлена. Единственный факт не из алгебры, которым пользуется в этом доказательстве Гаусс, это то, что если вещественный многочлен в двух точках принимает значения разного знака, то между этими точками есть корень этого многочлена. Рассуждения Гаусса во многом похожи на рассуждения Эйлера, Лагранжа и Лапласа, но он нигде не пользуется предположением о существовании поля разложения.

Третье доказательство использует то, что мы теперь называем интегралом Коши.

Четвёртое доказательство по методу является вариацией первого, но лишь в этом доказательстве Гаусс впервые рассматривает многочлен с комплексными, а не вещественными коэффициентами.

В 18 веке и в начале 19 века комплексные числа, которыми по необходимости приходилось пользоваться, представлялись во многом загадочными и даже сомнительными. Это было связано с отсутствием надлежащей интерпретации комплексных чисел. Первым интерпретацию комплексных чисел как точек плоскости предложил не Гаусс, но именно публикация Гаусса на эту тему оказалась наиболее влиятельной. В 1797 году Каспар Вессель предложил геометрическую интерпретацию комплексных чисел как векторов и интерпретировал операции сложения и умножения комплексных чисел. Его работа оставалась незамеченной до 1897 года, когда был опубликован её перевод. Похожую, хотя и несколько иную, интерпретацию предложил в 1806 году швейцарец Арган. В 1832 году (во второй части мемуара «Теория биквадратичных вычетов») Гаусс опубликовал представление чисел $a + bi$ как точек плоскости и описал действия с ними. В действительности в 1815 году он всё это уже хорошо представлял. Гаусс писал, что геометрическая интерпретация полностью устанавливает интуитивный смысл комплексных чисел. Он ввёл термин *комплексные числа* вместо *мнимые числа*.

В 1837 году Гамильтон опубликовал работу, в которой интерпретировал комплексные числа как пары вещественных с соответствующими операциями. Он подчёркивал, что сумма $a+bi$ вовсе не такая же, как 2+3, и что a нельзя сложить с bi; знак суммы здесь исторически случаен. В том же году Гаусс написал Вольфгангу Бойяи, что он ещё в 1831 году знал о таком представлении, но он ничего не опубликовал на эту тему. С интерпретацией камплексных чисел как пар вещественных математиков познакомил именно Гамильтон.

В 1811 году в письме к Бесселю по поводу интеграла $\int dx/x$ Гаусс пишет об интегралах с комплексными пределами. Он утверждает, что если функция не обращается в бесконечность, то интеграл от такой функции не зависит от выбора пути. Значение интеграла $\int dx/x$ от 1 до $a+bi$ не зависит от пути, если этот путь не обходит вокруг точки 0. Если же путь обходит вокруг точки 0, то нужно добавить $\pm 2\pi i$. Зависимость интеграла от пути в комплексной области на конкретных примерах изучал в 1815 году Пуассон. Эти результаты он опубликовал в 1820 году. Но, как и у Гаусса, это были отдельные примеры. Общую теорию интегралов с комплексными пределами построил Коши в 1846 году.

7.1.5. Эллиптические интегралы. Гипергеометрическая функция

Первым арифметико-геометрическое среднее ввёл Лагранж (его публикация относится к 1784-1785 годам); оно ему понадобилось для приближённого вычисления некоторого эллиптического интеграла. Гаусс ввёл арифметико-геометрическое среднее независимо от Лагранжа во время учёбы в Гёттингене.

Арифметико-геометрическое среднее двух чисел m и n определяется следующим образом. Положим $m_1 = m$, $n_1 = n$, $m_{k+1} = \frac{m_k+n_k}{2}$ и $n_{k+1} = \sqrt{m_k n_k}$; последовательности чисел m_k и n_k имеют один и тот же предел, который и называют (следуя Гауссу) *арифметико-геометрическим средним* чисел m и n и обозначают $\mathrm{agM}(m, n)$.

Гаусс обнаружил соотношение

$$\frac{1}{\mathrm{agM}(1+x,1-x)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\cos^2\varphi}}.$$

Гаусс много занимался исследованием лемнискаты и эллиптической функции, получаемой при обращении интеграла, выражающего длину дуги лемнискаты. Лемниската интересна тем, что она приводит к эллиптической функции с наиболее простой решёткой периодов, состоящей не из произвольных параллеллограммов, а из квадратов. У этой функции один период чисто вещественный и один чисто мнимый; обозначим их $2\tilde{\omega}$ и $2i\tilde{\omega}$. Гаусс заметил, что

$$\tilde{\omega} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{M(1,\sqrt{2})}.$$

Ни один из результатов об эллиптических интегралах не был опубликован при жизни Гаусса, и он публично не оспаривал приоритета Абеля и Якоби. Но в письме Бесселю (1828) сетовал: «Г-н Абель избрал совершенно тот же самый путь, который я предложил в 1798 году, поэтому неудивительно большое совпадение результатов. К моему удивлению, это распространяется также и на форму и отчасти на выбор обозначений, так что многие его формулы кажутся точной копией моих. Во избежание всякого недоразумения я отмечаю, однако, что я не помню, чтобы я когда-нибудь делился этими вещами с кем бы то ни было.»

О гипергеометрической функции, введённой и исследованной Эйлером, Гаусс написал две статьи, из которых опубликовал только одну (1812). Гипергеометрическая функция определяется разложением в степенной ряд

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots$$

Гаусс отмечал, что едва ли можно назвать какую-либо изучавшуюся аналитиками функцию, которую нельзя было бы свести к этому ряду. В первой статье Гаусс выводит основное функциональное уравнение

$$\frac{dF(\alpha,\beta,\gamma,x)}{dx} = \frac{\alpha\cdot\beta}{F}(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x).$$

Из него следует много других уравнений такого же типа. Вторую статью Гаусс начинает с уравнения

$$\alpha\beta F - (\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{dF}{dx} - (x-x^2)\frac{d^2F}{dx^2} = 0$$

Гаусс получил 15 уравнений, связывающих функцию $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ с функциями $F(\alpha\pm 1,\beta\pm 1,\gamma\pm 1,x)$. Например, одно из этих уравнений

$$\begin{gathered}\gamma(\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x)F(\alpha,\beta,\gamma,x) + \\ +(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)xF(\alpha,\beta,\gamma+1,x) - \gamma(\gamma-1)(1-x)F(\alpha,\beta,\gamma-1,x) = 0.\end{gathered}$$

Эти уравнения позволяют получить соотношение с рациональными коэффициентами между любыми тремя функциями вида $F(\alpha\pm m,\beta\pm n,\gamma\pm p,x)$, где m, n и p — целые числа.

В статье о гипергеометрическом ряде Гаусс устанавливает первые общие критерии сходимости степенны́х рядов. Он первым достаточно глубоко исследовал сходимость бинома $(1+x)^n$, который является частным случаем гипергеометрического ряда.

7.1.6. Дифференциальная геометрия

В 1822 году Гаусс решил задачу об изометрическом отображении (наложении, или разворачивании) одной поверхности на другую. Для этого Гаусс ввёл на поверхности первую квадратичную форму, которая выражает квадрат элемента длины на поверхности. Гаусс отмечает, что координаты в каждой точке поверхности можно выбрать так, что первая квадратичная форма в окрестности этой точке имеет вид $\lambda(x,y)(dx^2+dy^2)$ (*изотермические координаты*).

Работа Гаусса по дифференциальной геометрии «Обшие исследования искривлённых поверхностей» опубликована в 1828 году. Гаусс занимался измерительными работами, связанными с описанием и оценкой ганноверских владений. Для этого он стал исследовать геометрию поверхностей. Для поверхности в пространстве Гаусс рассмотрел отображение в единичную сферу, сопоставляющее каждой точке вектор нормали к поверхности в этой точке. Сейчас такое отображение называют *гауссовым сферическим отображением*. Сферическое отображение Гаусс использовал для того, чтобы определить важнейшую характеристику поверхности в точке — кривизну. Пусть при сферическом отображении область U на поверхности переходит в область $g(U)$ на сфере. Тогда кривизна поверхности в точке P — это предел отношения

$$\frac{\text{площадь } g(U)}{\text{площадь } U},$$

когда область U сжимается к точке P. Площадь здесь рассматривается ориентированная, с учётом знака. Например, кривизна сферы положительна, а кривизна седла (однополостного гиперболоида) отрицательна. До Гаусса точно так же определял кривизну поверхности Родриг в 1815 году.

Эту кривизну теперь называют *гауссовой кривизной* поверхности в точке P. Гауссова кривизна — это произведение двух главных кривизн, введённых Эйлером. После долгих вычислений Гаусс получил результат, удививший его: кривизна зависит только коэффициентов первой квадратичной форму. Таким образом, кривизна зависит только от внутренней геометрии поверхности, т.е. только от таких величин, которые можно измерить на самой поверхности, не выходя в объемлющее пространство. Гаусс назвал эту теорему Theorema Egregium (выдающаяся теорема). Исследования Гаусса показали, что можно изучать внутреннюю геометрию поверхностей — их можно рассматривать без объемлющего пространства.

Гаусс указывает на тот факт, что полная кривизна геодезического треугольника (т.е. интеграл гауссовой кривизны по геодезическому треугольнику) равна тому, на сколько сумма его углов превосходит 180°. Бонне (1867) обобщил это утверждение, рассматривая вместо геодезических треугольников замкнутые кривые общего вида; вместо суммы внешних углов геодезического треугольника при этом берётся интеграл геодезической кривизны по кривой. В такой общей формулировке это утверждение известно теперь под названием *теорема Гаусса–Бонне*.

В статье 1828 года Гаусс доказывает, что множество концов дуг одинаковой длины на геодезических, исходящих из одной точки поверхности, — это кривая, пересекающая все эти геодезические под прямым углом.

В лекциях 1851 года Гаусс говорил о многомерной геометрии; в то время это понятие только начинало формироваться. Он рассматривал аффинные подпространства в многомерных пространствах, называя их многообразиями. Возможно, это повлияло на формирование концепции многомерного многообразия у Римана.

7.1.7. Теория вероятностей

Гаусс создал теорию ошибок, разрабатывая новые методы расчёта орбит. В 1809 году в книге по небесной механике он доказал, что в классе одновершинных симметричных дифференцируемых распределений $\varphi(x-x_0)$ существует единственное распределение, при котором оценка параметра сдвига x_0 по принципу наибольшего правдоподобия совпадает со средним арифметическим, — нормальное (гауссово) распределение. В качестве следствия Гаусс получил, что плотность вероятности данного набора наблюдений достигает максимального значения при условии, что сумма квадратов уклонений наблюдённых значений от «истинного» значения измеряемой величины обращается в минимум. Так Гаусс обосновал принцип наименьших квадратов. Гаусс не считал принцип наибольшего правдоподобия наилучшим, поэтому он дал ещё одно обоснование принципа наименьших квадратов: в классе линейных оценок наименьшими дисперсиями обладают оценки, определяемые по методу наименьших квадратов.

Первая публикация, в которой принцип наименьших квадратов был явно сформулирован, принадлежит Лежандру (1805), но Лежандр его никак не обосновывал. Кроме того, в неопубликованных записках Гаусс применял метод наименьших квадратов задолго до появления публикации Лежандра.

7.1.8. Неевклидова геометрия

В рукописях Гаусса содержатся идеи, близкие к идеям Лобачевского и Бойяи, но он не решился опубликовать их, опасаясь быть непонятым. Уже в 1792 году Гаусс начал сомневаться в доказуемости пятого постулата Евкида в связи с возможностью существования геометрии, отличной от евклидовой. Около 1816 года он уже владел тригонометрией неевклидова (гиперболического) пространства.

В 1818 году математик-любитель Ф.К. Швейкарт передал Гауссу через их общего знакомого, астронома Герлинга, работу о неевклидовой геометрии, которую он написал в 1816 году, продолжая исследования Ламберта. Швейкарт писал, что есть две геометрии: евклидова геометрия и «астральная» геометрия, в которой сумма углов треугольника меньше двух прямых. Швейкарт доказал несколько теорем астральной геометрии. Гаусс ответил Герлингу, что он согласен с теоремами Швейкарта.

Неопубликованные записки Гаусса относятся в основном к двум областям: эллиптическим функциям и неевклидовой геометрии. С 1794 года Гаусс пытался доказать 5-й постулат. Он пришёл к выводу, что если площадь треугольника может быть сколь угодно велика, то 5-й постулат верен. Но он не считал возможным принять аксиому о неограниченности площади треугольника. С 1813 года Гаусс разрабатывал новую геометрию, которую он сначала назвал антиевклидовой, затем астральной, и наконец — неевклидовой. Он пришёл к убеждению, что 5-й постулат нельзя вывести из других аксиом Евклида.

Свои исследования по неевклидовой геометрии Гаусс не публиковал, но он охотно обсуждал их с близкими друзьями. В их числе были отец Яноша Вольфганг (Фаркаш) Бойяи, с которым они вместе учились в Гётингене, и общий учитель Гаусса и Лобачевского Иоган Мартин Бартельс (1769-1836). Сохранилось письмо Гаусса Бойяи-старшему, в котором он писал о пятом постулате; с Бартельсом он также переписывался. Весьма вероятно, что на Яноша Бойяи и на Лобачевского идеи Гаусса оказали влияние.

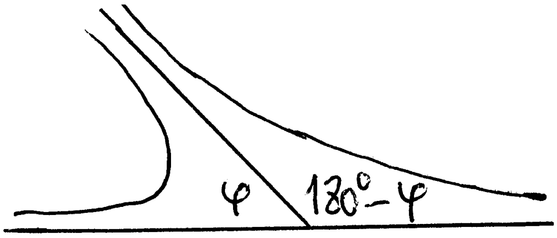

Рис. 7.1.

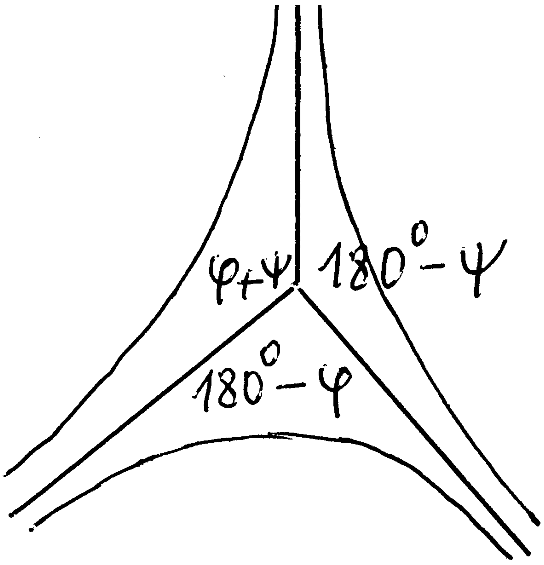

Рис. 7.2.

В 1817 году Гаусс писал астроному Олбертсу: «Я всё более и более убеждаюсь, что нельзя доказать необходимость нашей (евклидовой) геометрии.» Позднее он писал Тауринсу, что находит неевклидову геометрию вполне самосогласованной. Эта геометрия зависит от параметра, и чем этот параметр больше, тем ближе эта геометрия к евклидовой. Теоремы в этой геометрии кажутся парадоксальными. Например, какими большими ни были бы стороны треугольника, его площадь ограничена. Единственное, что может показаться неприемлемым, это существование абсолютной единицы длины. Но даже и это Гаусс не считает неприемлемым. В 1829 году Гаусс пишет Бесселю, что его убеждённость в невозможности априорного обоснования геометрии стала ещё сильнее, но он, скорее всего, не будет публиковать свои идеи, опасаясь воплей беотийцев.

В 1841 году Гаусс познакомился в немецким изданием «Геометрических исследований» Лобачевского. В 1844 году он сообщает Герлингу, что разыскал все сочинения Лобачевского, кроме «Начал геометрии», напечатанных в Казанском вестнике в 1829-1830 году.

До самой смерти Гаусс не сделал ни одного печатного или публичного устного заявления о возможности неевклидовой геометрии или о работах Лобачевского, Бойяи и Швейкарта. Он просил Тауринса не предавать гласности своё наиболее подробное высказывание о неевклидовой геометрии.

Работы Лобачевского и Бойяи в течение 30 лет не привлекали внимания. После смерти Гаусса были опубликованы его записки по неевклидовой геометрии и переписка на эту тему. Авторитет Гаусса привлёк внимание к неевклидовой геометрии.

В записках Гаусс делает предположение, что площадь треугольника, ограниченного тремя параллельными прямыми, равна t, и после этого (не позже 1819 года) выводит формулу площади треугольника с углами A, B и C следующим образом. Пусть площадь треугольника, ограниченного двумя лучами, угол между которыми равен φ, и параллельными этим лучам прямой, равна $f(180^\circ - \varphi)$. Рис. 7.1 показывает, что $f(180^\circ - \varphi) + f(\varphi) = t$. Далее, рис. 7.2 показывает, что $f(180^\circ - \varphi - \psi) + f(\varphi) + f(\psi) = t$. Следовательно, $f(\varphi) + f(\psi) = f(\varphi + \psi)$. Единственное непрерывное решение этого уравнения имеет вид $f(\varphi) = \mathrm{const}\cdot\varphi$. Кроме того, когда $\varphi \to 0$, мы получаем треугольник, ограниченный тремя параллельными прямыми, поэтому $f(180^\circ) = t$. Следовательно, $f(\varphi) = \frac{\varphi t}{180^\circ}$. Рис. 7.3 показывает, что $\alpha = f(A) = \frac{At}{180^\circ}$, $\beta = f(B) = \frac{Bt}{180^\circ}$ и $\gamma = f(C) = \frac{Ct}{180^\circ}$. Поэтому площадь

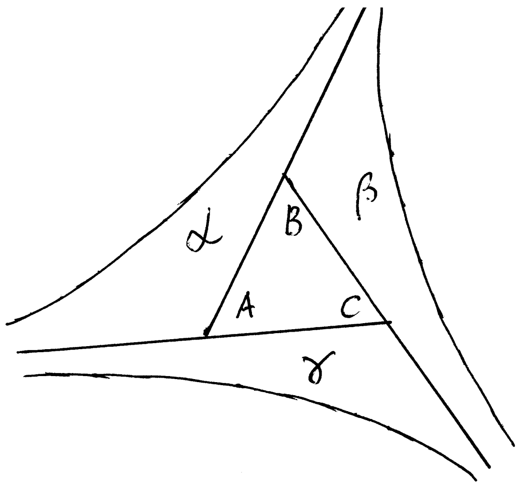

Рис. 7.3.

треугольника с углами A, B и C равна

$$\frac{180^\circ - (A+B+C)}{180^\circ} t.$$

Гауссу были известны и некоторые формулы неевклидовой геометрии. Например, формулу для угла параллельности вывели все трое: Гаусс, Лобачевский, Бойяи.

7.1.9. Топология

В записках Гаусса, относящихся к 1794 году, содержатся таблицы с диаграммами узлов. Для кодирования узлов Гаусс нумеровал перекрёстки и записывал последовательность номеров перекрёстков, встречающихся при обходе узла. *Гауссовы диаграммы* сейчас активно используются при построении инвариантов узлов.

В тетради, относящейся к электродинамике, Гаусс в 1833 году ввёл коэффициент зацепления двух замкнутых кривых и представил его в виде интеграла.

7.2. Юзеф Гёне-Вронский (1778-1853)

При участии в восстании Костюшко Юзеф Гёне попал в плен и ему пришлось служить в русской армии до 1797 года. В 1800 году он вступил в Польский Легион во Франции и с 1810 года жил в Париже; с этого же года он стал использовать псевдоним Вронский.

В 1810 году Вронский вёл ряды, которые он назвал универсальными. Они давали представление функции $F(x)$ в виде ряда

$$F(x) = A_0\Omega_0(x) + A_1\Omega_1(x) + A_2\Omega_2(x) + \dots,$$

где $\Omega_i(x)$ — некоторые функции от x. Вронский получил общее правило выражения коэффициентов A_i такого ряда через функциональный определитель, который имеет вид

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_3 \\ f_1' & f_2' & \dots & f_3' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_3^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Впоследствии этот определитель получил название *вронскиан*. Он играет важную роль в теории дифференциальных уравнений.

Вронский вообще занимался поисками универсальных формул решения любых уравнений, как алгебраических, так и дифференциальных. В 1812 году он опубликовал книгу «Общее решение уравнений любой степени».

В 1827 году Вронский опубликовал таблицу логарифмов, проявив исключительную изобретательность — семизначную таблицу логарифмов он уместил на одной странице размером 17 на 22 см.

7.3. Август Леопольд Крелль (1780-1855)

В 1826 году Крелль основал Journal für die reine und angewandte Mathematik (Журнал чистой и прикладной математики). В первом томе этого журнала было опубликовано 5 статей Абеля, статья Якоби и несколько статей Штейнера. В третьем томе появляются работы Дирихле, Мёбиуса и Плюккера.

7.4. Фердинанд Карл Швейкарт (1780-1857)

В 1816 году Швейкарт написал работу о неевклидовой геометрии, продолжая исследования Ламберта, и в 1818 году передал её Гауссу через их общего знакомого — астронома Герлинга. Швейкарт писал, что есть две геометрии: евклидова геометрия и «астральная» геометрия, в которой сумма углов треугольника меньше двух прямых. В астральной геометрии сумма углов треугольника уменьшается при увеличении его площади; высота равнобедренного прямоугольного треугольника увеличивается при увеличении его боковых сторон, но при этом стремится к конечному пределу (в геометрии Лобачевского этот предел часто называют *константой Швейкарта*). Швейкарт не искал противоречия в астральной геометрии, он принял новое предположение и делал из него выводы. Гаусс ответил Герлингу, что он согласен с теоремами Швейкарта.

Неевклидовой геометрией активно занимался и племянник Швейкарта Тауринус.

7.5. Симон Дени Пуассон (1781-1840)

В 1809 году Пуассон показал, что любым двум первым интегралам уравнения движения, можно сопоставить ещё один первый интеграл — их скобку Пуассона. Скобка Пуассона играет важную роль в гамильтоновой механие.

В 1813 году указал, что внутри притягивающего тела нужно заменить уравнение Лапласа $\Delta V = 0$, которое справедливо только вне притягивающего тела, на уравнение $\Delta V = -4\pi\rho$ (уравнение Пуассона).

В 1820 году представил решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге в виде интеграла, получившего название *интеграл Пуассона*.

В книге «Исследования о вероятности приговоров в уголовных и гражданских делах» (1837) Пуассон продолжил исследования Лапласа. Именно здесь впервые появилось *распределение Пуассона*. Оно описывает вероятность того, что k раз произойдёт случайное событие, вероятность p которого очень мала, но число испытаний n очень велико; эта вероятность равна $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, где $\lambda = np$.

У предшественников Пуассона понятие случайной величины связывалось с результатами измерений. Именно Пуассон первым рассмотрел общее понятие случайной величины, не обязательно связанной с ошибками измерений. Пуассон ввёл понятие *закон больших чисел*; он понимал этот закон как приближённое равенство среднего арифметического большого числа случайных величин среднему арифметическому их математических ожиданий, но доказать это утверждение он не смог. Пуассон доказал лишь обобщение теоремы Бернулли для случая независимых испытаний, в которых событие происходит с вероятностями, зависящими от номера испытания.

Пуассон обнаружил свойство устойчивости распределения Коши и само это распределение за 20 лет до Коши.

7.6. Бернард Больцано (1781-1848)

Чешский философ и богослов Больцано в 1817 году опубликовал брошюру, посвящённую доказательству того, что непрерывная функция на отрезке, принимающая в его концах значения разного знака, принимает нулевое значение. Больцано попытался построить анализ без использования бесконечно малых. В этой брошюре дано близкое к современному определение непрерывности. Там дано также определение производной. Кроме того, там определяется последовательность Коши и приводится критерий сходимости последовательности, ныне приписываемый Коши (у Коши он появился независимо от Больцано 4 года спустя), и теорема о существовании точной верхней грани ограниченного множества (эквивалентно: из ограниченной бесконечной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность; в таком виде эта теорема получила название *теорема Больцано–Вейерштрасса*).

Больцано ввёл понятия, впоследствии ставшие важными в топологии: окрестность, изолированная точка.

Книга «Парадоксы бесконечного» была опубликована в 1851 году, через 3 года после смерти Больцано. Эту книгу Больцано начал писать в 1847 году. В ней впервые определяется *множество* (Menge); Больцано приводит пример взаимно однозначного соответствия между элементами бесконечного множества и элементами его собственного подмножества.

В неопубликованных записках Больцано есть пример непрерывной функции, не дифференцируемой ни в одной точке.

7.7. Шарль Жюльен Брианшон (1783-1864)

В 1806 году Брианшон доказал теорему о шестиугольнике, описанном вокруг конического сечения, двойственную теореме Паскаля: диагонали шестиугольника, описанного вокруг коники, пересекаются в одной точке (*теорема Брианшона*). При этом он опирался на полярное соответствие относительно конического сечения, сделав тем самым первый шаг к установлению общего принципа двойственности, тогда ещё не известного.

7.8. Фридрих Вильгельм Бессель (1784-1846)

Бессель известен прежде всего как астроном; в 1838 году он открыл параллакс и использовал его для определения расстояния до одной из звёзд.

В 1817 году ввёл *функции Бесселя*, изучая движение трёх тел под действием общей гравитации. Функции Бесселя — это канонические решения *уравнения Бесселя*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\alpha^2)y=0. \tag{1}$$

Число α называют порядком, и обычно рассматривают функции целого порядка $n=\alpha$. Функцией Бесселя первого рода порядка n называют ограниченный при $x=0$ интеграл $J_n(x)$ уравнения (1), а функцией Бесселя второго рода порядка n называют неограниченный при $x=0$ интеграл $Y_n(x)$ того же уравнения.

В 1824 году Бессель исследовал эти функции более подробно, изучая возмущения в движении планет. Функции Бесселя относятся к классу *цилиндрических функций*. Ранее цилиндрические функции встречались у Д.Бернулли, Эйлера, Лагранжа.

7.9. Шарль Дюпен (1784-1873)

Дюпен был морским офицером и участвовал в дальних плаваниях, поэтому публикация его результатов надолго задерживалась. Его работы опубликованы в двух книгах: «Развитие геометрии» (1813) и «Приложения геометрии и механики» (1822).

Ещё в 1800 году, в возрасте 16 лет, Дюпен, рассматривая огибающую семейства шаров, касающихся трёх данных шаров, пришёл к понятию *циклиды Дюпена* — поверхности, оба семейства линий кривизны которой являются окружностями.

Около 1807 года он доказал *теорему Дюпена*: поверхности триортогональной системы пересекаются по линиям кривизны. В частности, линии кривизны эллипсоида — это пересечения эллипсоида с семейством софокусных с ним поверхностей второго порядка.

Для изучения кривизны нормальных сечений поверхности он ввёл *индикатрису Дюпена*, которая описывает локальное строение поверхности с точностью до членов второго порядка и позволяет наглядно представить и проанализировать поведение кривизны нормального сечения поверхности при вращении секущей плоскости вокруг нормали.

Эйлер получил следующее выражение для радиуса r кривизны произвольного нормального сечения через наибольший радиус f, наименьший радиус g и угол φ между плоскостью произвольного сечения и плоскостью наибольшего сечения:

$$r=\frac{2fg}{f+g-(f-g)\cos 2\varphi}.$$

В 1813 году Дюпен преобразовал эту формулу к более удобному виду:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{f}\cos^2\varphi+\frac{1}{g}\sin^2\varphi.$$

Формула Дюпена показывает, что часто бывает удобно заменить радиус кривизны R на кривизну $\frac{1}{R}$.

7.10. Уильям Джордж Горнер (1786-1837)

Горнер в 1830 году разработал следующий алгоритм вычисления значения многочлена $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ при заданном x. Запишем этот многочлен в виде $P(x)=a_0+x(a_1+x(a_2+\cdots+x(a_{n-1}+a_nx)\dots))$. Пусть $b_n=a_n$, $b_{n-1}=a_{n-1}x+b_nx$, $\dots$, $b_i=a_i+b_{i+1}x$, $\dots$, $b_0=a_0+b_1x$. Тогда b_0 — это и есть искомое значение многочлена. Этот алгоритм получил название *схема Горнера*, хотя он задолго до Горнера применялся китайскими и арабскими математиками, а в Европе задолго до Горнера этот алгоритм опубликовал Руффини.

Такой же алгоритм можно применить для деления с остатком многочлена $P(x)$ на бином $x-c$. Пусть $b_0=a_0$, $b_i=a_i+cb_{i-1}$. Тогда в результате деления получается многочлен $b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}$, а в остатке получается b_n.

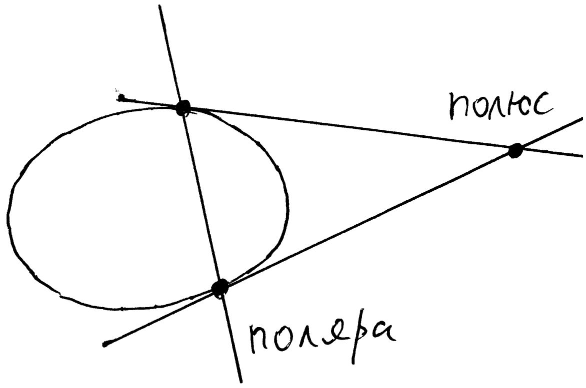

Рис. 7.4.

7.11. Жак Филипп Мари Бине (1786-1856)

Бине исследовал основы теории матриц. В 1811 он году получил некоторые тождества для определителей небольшого порядка. В 1812 году открыл правило умножения матриц. В 1812 году одновременно с Коши получил тождество, выражающее определитель произведения прямоугольных матриц как произведение сумм определителей (формула Бине–Коши).

7.12. Жан Виктор Понселе (1788-1867)

В 1810 году Понселе окончил Политехническую Школу, где преподавали Монж, Карно и Брианшон. Как офицер наполеоновской армии, с 1813 по 1814 год он находился в плену в Саратове. В это время он вспоминал математику и сделал фундаментальные открытия в геометрии. Возвратившись из плена, Понселе мало занимался геометрией, обратившись к прикладным вопросам. Он является одним из основоположников строительной механики, которой занимался гораздо больше, чем чистой математикой. На всемирной выставке 1851 года Понселе были избран председателем жюри секции машин и инструментов для промышленности.

В 1822 году Понселе опубликовал «Трактат о проективных свойствах фигур»; термин *проективная геометрия* происходит от названия этой книги. 40 лет спустя он опубликовал книгу «Приложения анализа к геометрии» в двух томах (1862 и 1864). Обе эти книги основаны на его исследованиях, проведённых в русском плену.

Новизна подхода Понселе была в том, что он мало интересовался метрическими свойствами фигур. Его больше интересовали проективные свойства фигур, т.е. свойства, сохраняющиеся при проекциях. Понселе ясно показал, что следует выделить проективные свойства фигур, и определил проективную геометрию как науку о проективных свойствах фигур. В проективной геометрии он разработал теорию инволюций и гармонических наборов точек, но не теорию двойного отношения. Понселе не дал чёткого определения мнимых точек, но он первым систематически пользовался ими и ввёл циклические точки — мнимые точки на бесконечно удалённой прямой, в которых пересекаются любые две окружности, и доказал, что фокусы конического сечения можно рассматривать как точки пересечения касательных к нему, проведённых из циклических точек.

Понселе дал общее определение полюса и поляры относительно коники (рис. 7.4) и показал, что свойство быть полюсом и полярой — проективное. Он доказал, что если три точки лежат на одной прямой, то их поляры пересекаются в одной точке, и наоборот: если три прямые пересекаются в одной точке, то их полюсы лежат на одной прямой. Понселе полагал, что основой принципа двойственности является полярное соответствие. Но при таком подходе требовалась вспомогательная коника. Жергонн (1825) настаивал, что принцип двойственности общий, и он не требует вспомогательной коники. Он также заметил, что приницп двойственности имеет место и в трёхмерном пространстве. Там точке двойственна плоскость, а прямой двойственна прямая. Принцип двойственности Жергонна был более глубокий: он считал, что прямые и точки — равноправные, взаимозаменяемые понятия. Жергонн начал рассматривать кривые, двойственные к кривым высших степеней. Сначала он допустил ошибку, на которую ему указал Понселе. Причина этой ошибки была в том, что Жергонн решил, что двойственная кривая имеет ту же степень, что и исходная кривая.

Понселе пользовался тем, что любая пара, состоящая из коники и прямой, проективно эквивалентна паре, состоящей из окружности и бесконечно удалённой прямой. При таком подходе очень просто определяются полюс и поляра относительно коники: всё сводится к случаю, когда в окружность вписан прямоугольник (его центр — полюс бесконечно удалённой прямой). Понселе объяснял, как это нужно понимать в том случае, когда прямая пересекает конику, вводя идеальные хорды. Основной его принцип (принцип непрерывности) при этом был такой: если какое-либо утверждение верно, когда некоторые величины произвольно меняются в некоторых пределах, то оно (возможно, после несложной переформулировки) верно всегда. Если же какие-то части фигур исчезают, то утверждение верно для остающихся частей. Принцип непрерывности Понселе никогда не сформулировал отчётливо, и этот принцип часто подвергался справедливым нападкам.

В трактате 1822-го года Понселе доказал много важных теорем. Например, он доказал, если существует многоугольник, одновременно вписанный в одну данную конику и описанный около другой данной коники, то таких многоульников бесконечно много (теорема Понселе). Кроме того, он доказал, что все построения циркулем и линейкой можно выполнить одним циркулем, если задана окружность с отмеченным центром.

Для обсуждения рукописи трактата Понселе (опубликован в 1822 году) в 1820 году была создана комиссия в составе Араго, Пуассон и Коши (председатель). Отчёт писал Коши, и Понселе опубликовал этот отчёт в качестве приложения к трактату. По поводу принципа непрерывности Понселе Коши писал, что применение его к кривым второго порядка даёт верные результаты, но в анализе этот принцип, как хорошо известно, неприменим. Коши объяснил, как можно истолковать идеальные объекты Понселе, введя комплексные координаты. В целом комиссия весьма одобрительно отозвалась о трактате Понселе.

Мемуар о двойственности Понселе представил в 1824 году. Но Коши написал на него рецензию лишь в 1828 году, и публикация затянулась до 1829 года. А к тому времени некоторые ключевые идеи уже опубликовал Жергонн.

Интересы Понселе постепенно переместились в механику машин, где он также достиг выдающихся результатов.

7.13. Огюстен Луи Коши (1789-1857)

Коши был человеком строго клерикально-роялистских взглядов. После революции 1830 года он вместе с Бурбонами отправился в изгнание. В 1838 году он вернулся в Париж, но не мог занимать никакой государственной должности из-за отказа принести присягу новому режиму; он стал преподавателем в одной иезуитской коллегии. В 1848 году после новой революции он получил место в Сорбонне, хотя присяги так и не принёс.

В 1811 году Коши получил новое доказательство теоремы Эйлера о многогранниках, основанное на проецировании многогранника на одну из его граней. В том же году он доказал, что выпуклый многогранник — жёсткая фигура, т.е. он полностью задаётся своими гранями.

В 1812 году одновременно с Бине получил формулу Бине–Коши, выражающую определитель произведения прямоугольных матриц в виде суммы определителей.

В 1814 году представил в Академию «Мемуар о теории определённых интегралов» (опубликован в 1825 году). Он посвящён вычислению определённых интегралов от вещественных функций с помощью интегралов от комплексных функций. В этом мемуаре появились формулы, которые впоследствии привели Коши к теории вычетов. При публикации мемуара Коши добавил сноску, в которой появилась интегральная теорема Коши в частном случае интегрирования по прямоугольному контуру.

В мемуаре 1814 года встречаются соотношения Коши–Римана. Коши доказывает, что интеграл аналитической функции по прямоугольному контуру равен нулю, и вычисляет интеграл по прямоугольному контуру в случае, когда функция имеет простейшую особенность — полюс. Он применяет это для вычисления некоторых определённых интегралов функций действительного переменного.

В 1825 и 1827 году Коши опубликовал два мемуара по теории функций комплексного переменного. В них он начал развивать общую теорию аналитических функций комплексного переменного и их интегрирования с помощью вычетов. К понятию вычета он пришёл, рассматривая разность между интегралами, взятыми по двум путям, которые имеют общие концы, но между которыми может быть заключён полюс функции.

В «Мемуаре об определённых интегралах, взятых между мнимыми пределами» (1825) Коши определяет интеграл $\int_a^b f(z)dz$ как интеграл вдоль кривой, идущей из a в b, и доказывает, что если в некотором прямоугольнике функция конечна и непрерывна, то для любой кривой с концами a и b, расположенной в этом прямоугольнике, интеграл один и тот же. При доказательстве Коши пользуется производной $f'(z)$ и даже непрерывностью производной, но в формулировке ничего об этом не говорит. Он был убеждён, что любая непрерывная функция дифференцируема, а производная функции может быть разрывной лишь в тех точках, в которых разрывна сама функция. По-видимому, это было связано с тем, что под функцией Коши понимал некоторое аналитическое выражение, представленное формулой.

Затем Коши изучает, что происходит, когда между путями есть особая точка — сначала простой полюс, затем кратный полюс. В 1827 году вместо прямоугольных контуров Коши начинает рассматривать окружности.

В 1815 году Коши определил симметрические функции, позже получившие название функций Шура.

В том же году он рассмотрел определитель матрицы Якобы порядка 3 (Якоби впервые рассматривал такие определители, получившие название якобианов, в 1829 году, а подробно — в 1832 и 1833 годах); Коши также привёл выражение объёма параллелепипеда в виде определителя матрицы, элементы которой — координаты векторов рёбер.

В 1815 году Коши опубликовал «Мемуар о числе значений, которые может принимать функция, если переставлять всеми способами содержащиеся в ней величины». В этой работе он доказал, что если число значений равно p, а число аргументов равно n, то p равно либо 1, либо 2, либо больше или равно n. Другими словами, индекс подгруппы симметрической группы S_n может быть 1, 2 или больше или равен n. В этой работе Коши строго доказал свойства определителей, установленные Вандермондом для матриц малого порядка, и рассмотрел определитель Вандермонда произвольного порядка n (сам Вандермонд рассматривал такие определители только порядка 3). В 1844-1846 годы Коши публикует целую серию статей и заметок о группах, состоящих из перестановок. Наиболее известна следующая *теорема Коши*: если порядок группы делится на простое число p, то в ней есть подгруппа порядка p (без доказательства это утверждение приводит Галуа). Коши доказал также, что любая чётная перестановка является произведением 3-циклов; множество элементов группы, перестановочных с данным элементом, образует подгруппу (теперь эту подгруппу называют *централизатором* этого элемента).

В 1815 году Коши доказал, что любое натуральное число можно представить в виде суммы не более n n-угольных чисел; без доказательства это утверждал Ферма.

В 1821 году Коши опубликовал «Курс анализа (Алгебраический анализ)». Под алгебраическим анализом он понимал исследование элементарных функций, в том числе и в комплексной области, и теорию бесконечных рядов. Название также отражает стремление Коши к алгебраизации математики (в этой книге, так же как у Лагранжа, нет рисунков). Уже давно известный материал Коши впервые излагает на основе чётких определений предела и непрерывности. Он подробно излагает учение о сходимости бесконечных рядов, даёт критерии сходимости. Исследуя степенной ряд $\sum a_n x^n$, Коши устанавливает, что этот ряд сходится или расходится в зависимости от того, меньше или больше модуль числа x, чем $1/A$, где A — верхний предел последовательности $\sqrt[n]{|a_n|}$. Коши доказывает, что в комплексной плоскости степенной ряд имеет круг сходимости. Главный недостаток этой книги — отсутствие понятия равномерной сходимости на отрезке, что привело к неверному утверждению, будто сумма сходящегося в каждой точке ряда непрерывных функций непрерывна.

В «Курсе анализа» Коши доказал, что непрерывная функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая функциональному уравнению $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, имеет вид $\varphi(x)=Ax$, где A — некоторая константа.

Обоснованию исчисления бесконечно малых посвящён и «Конспект лекций по анализу бесконечно малых» (1823). Здесь впервые появляются знаменитые ε и δ. Интеграл непрерывной функции $f(x)$ определяется как предел интегральных сумм. Коши разбивает отрезок $[x_0, X]$ точками $x_1, \ldots, x_{n-1}$ и рассматривает интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1})$ (полагая $x_n = X$). Он доказывает, что когда $n \to \infty$ и все разности $x_i - x_{i-1}$ стремятся к нулю, интегральная сумма стремится к пределу (не зависящему от выбора разбиения). Он отметил также, что значения функции $f(x)$ можно брать не только в левых концах отрезка, но и в любых точках отрезка. Но ограничение, что функция $f(x)$ непрерывна, оказалось слишком неудобным, и впоследствии появились определения Римана, Лебега и других, пригодные не только для непрерывных функций.

Коши определил главное значение интеграла следующим образом. Пусть функция $f(x)$ не ограничена в точке ξ, где $a < \xi < b$. Тогда главное значение интеграла функции $f(x)$ на отрезке от a до b — это предел $\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{\xi-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\xi+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right)$. Это определения, долгое время не привлекавшее внимания, оказалось впоследствии очень важным, например, в теории интегральных уравнений.

В этой книге Коши привёл пример бесконечно дифференцируемой функции e^{-1/x^2}, не равной своему ряду Тейлора. До этого примера математики (в частности, Лагранж) обычно верили, что бесконечно дифференцируемая функция сходится к своему ряду Тейлора.

Во второй части этих лекций (1824) Коши доказал существование решения уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, принимающего при заданном x_0 заданное значение y_0. Доказательство проводится с помощью ломаных, аппроксимирующих решение. Доказательство того, что ломаные сходятся к решению (при условии, что функции $f(x,y)$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны), аналогично доказательству существования определённого интеграла в первой части лекций. В мемуаре 1835 года Коши приводит другое доказательство на основе сходимости рядов. Для этого он строит в явном виде мажоранты решений (обычно в качестве мажорирующего ряда используется некоторая геометрическая прогрессия), в связи с чем второй метод Коши часто называют *методом мажорант*. Нахождение решения дифференциального уравнения с заданными начальными условиями получило название *задача Коши*.

С 1826 по 1830 год чрезвычайно продуктивно работающий Коши издавал собственный ежемесячный математический журнал, единственным автором которого был он сам (обычно в номере было 32 страницы).

В 1829 году Коши показал, что квадратичную формы от многих переменных можно привести к диагональному виду ортогональным преобразованием. Он также доказал, что корни векового уравнения действительны (Лагранж и Лаплас доказали это в некоторых частных случаях, которые представляли для них интерес).

В 1831 году Коши доказал, что функция, голоморфная в окрестности точки $z = a$, представляется степеным рядом от $z - a$, который сходится внутри наибольшего круга, в котором эта функция голоморфна.

С 1831 по 1853 год Коши опубликовал около 10 мемуаров, посвящённых математической обработке наблюдений и теории вероятностей. В мемуаре 1853 году он пришёл к *распределению Коши*, за 20 лет до этого исследованному Пуассоном. В 1853 году Коши доказал центральную предельную теорему.

В 1844 году Коши доказал, что голоморфная функция, ограниченная по модулю на всей плоскости, постоянна. Этим он обобщил теорему Лиувилля о том, что голоморфная двоякопериодическая функция постоянна, доказанную ранее в том же году. Сейчас теоремой Лиувилля обычно называют именно теорему, доказанную Коши.

В 1846 году Коши доказал, что интеграл голоморной функции не зависит от выбора пути. При доказательстве он использовал интегральные теоремы Гаусса и Грина. Гаусс доказал эту теорему в 1811 году, но сообщил её только в письме к Бесселю.

В 1853 году показал, что непрерывная функция комплексного переменного дифференцируема только тогда, когда выполняются условия Коши–Римана.

7.14. Август Фердинанд Мёбиус (1790-1868)

Мёбиус в «Барицентрическом исчислении» (1827) ввёл барицентрические (однородные) координаты. Если фиксирован треугольник ABC на плоскости, то любую точку D плоскости можно задать как центр масс (барицентр) вершин этого треугольника с какими-то массами (которые могут быть отрицательными и равными нулю). При умножении всех масс на одно и то же число точка не меняется, поэтому координаты однородные в том смысле, что они определены с точностью до пропорциональности. В таких координатах уравнение алгебраической кривой однородное.

Мёбиус ввёл знаки не только для отрезков, но и для площадей и объёмов. Он показал, что в качестве барицентрических координат точки D относительно треугольника ABC можно взять площади треугольников DBC, ADC и ABD; для точек внутри треугольника эти площади положительные, а для точек вне треугольника площади нужно брать со знаком.

Мёбиус заметил, что точки, для которых сумма барицентрических координат равна нулю, бесконечно удалённые. Проективные преобразования — это линейные преобразования однородных координат.

Заканчивая работу над книгой, Мёбиус услышал о работах французских математиков, сопоставляющих точке прямую, и наоборот. Он предложил делать это таким образом. Рассмотреть две плоскости, и сопоставить прямой на одной плоскости, заданной в однородных координатах уравнением $ax + by + cz = 0$, точку с однородными координатами $[a : b : c]$ на другой плоскости.

В 1828 году Мёбиус обнаружил, что существуют пары тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, которые вписаны друг в друга, т.е. точки A и A_1 лежат в плоскостях $B_1C_1D_1$ и BCD и т.д. Такие пары тетраэдров называют *тетраэдрами Мёбиуса*. Мёбиус также доказал, что если если семь из восьми вершин двух тетраэдров лежат в соответствующих плоскостях граней, то восьмая вершина также лежит в соответствующей плоскости грани.

В 1831 году Мёбиус систематически изучил так называемую *функцию Мёбиуса* $\mu(n)$ и связанные с ней формулы обращения. Эта функция определяется следующим образом: $\mu(1) = 1$; $\mu(n) = 0$, если n делится на полный квадрат, отличный от 1; $\mu(n) = (-1)^k$, если n является произведением k различных простых чисел. Формула обращения Мёбиуса выглядит следующим образом. Пусть $a(n) = \sum_{d|n} b(d)$, тогда $b(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d)a(d)$.

В 1855 году в работе «Теория кругового сродства в чисто геометрическом изложении» Мёбиус построил общую теорию круговых преобразований, переводящих окружности в окружности, после того как Лиувилль в 1850 году доказал, что конформные преобразования пространства являются аналогом не конформных, а круговых преобразований плоскости. Круговые преобразования теперь обычно называют *преобразованиями Мёбиуса*.

В 1863 году Мёбиус получил классификацию поверхностей, вложенных в трёхмерное пространство (без самопересечений). Он обсуждал, что нужно понимать под отображением поверхностей, переводящим окрестность точки в окрестность её образа, и полагал, что это определение можно сделать точным, используя бесконечную последовательность разбиений поверхностей на конечное число многоугольников.

В неопубликованных записках Мёбиуса, относящихся к 1858 году, встречается понятие неориентируемости и пример неориентируемой поверхности — *лист Мёбиуса*. Неопубликованные записки Листинга на ту же тему были сделаны на несколько месяцев раньше. Листинг опубликовал свою работу в 1861 году, а Мёбиус лишь в 1865 году (но в 1861 году Мёбиус подавал работу, содержащую описание листа Мёбиуса, на конкурс Парижской академии; эта работа не была удостоена премии). В статье 1865 года Мёбиус описал задание ориентации поверхности, разбитой на многоугольники: он описал, как задаётся ориентация на границе многоугольника, и считал ориентации соседних многоугольников согласованными, если на общей части их границ ориентации противоположны. В качестве примера неориентируемой поверхности привёл лист Мёбиуса.

Мёбиус первым ввёл в рассмотрение *уникурсальные кривые*, координаты которых задаются рациональными функциями параметра. Название связано с тем, что такую кривую можно нарисовать на плоскости, не отрывая пера. В частности, Мёбиус получил рациональные параметризации конических сечений.

7.15. Николай Иванович Лобачевский (1792-1856)

В начале 1800-х годов математики были убеждены, что евклидова геометрия — правильная идеализация свойств физического пространства, хотя Ньютон в «Началах» отмечал, что абстрактное математическое пространство отлично от воспринимаемого нашими чувствами пространства. Предпринимались попытки построить арифметику, алгебру и анализ, логические обоснования которых были шактими, на основе евклидовой геометрии. Юм считал, что законы евклидовой геометрии не обязаны быть физическими истинами, но его влияние было не так велико, как влияние Канта. Кант считал законы евклидовой геометрии априорными синтетическими истинами и утверждал, что физический мир евклидов. Общим мнением было, что евклидова геометрия единственна и необходима. Но с самого начала математики были недовольны сложной и неочевидной формулировкой пятого постулата, и пытались либо заменить его на более очевидное утверждение, либо вывести его из остальных аксиом и постулатов Евклида. Пятый постулат пытался доказать Клавдий Птолемей.

Пятый постулат из «Начал» Евклида сыграл важную роль в развитии геометрии. Его формулировка гораздо сложнее формулировок остальных постулатов и аксиом, поэтому многие математики, начиная с древних времен, пытались доказать пятый постулат, т.е. вывести его как теорему из остальных аксиом Евклида. Но все эти попытки оказались неудачными. В предлагаемых доказательствах либо обнаруживались ошибки, либо пятый постулат неявно заменялся другой эквивалентной ему аксиомой, например:

- множество всех точек плоскости, расположенных по одну сторону от прямой и равноудаленных от неё, есть прямая, параллельная данной (Посидоний, I в. до н.э.);
- если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую (Прокл, 410-485);
- две сближающиеся прямые не могут начать расходиться (Омар Хайям, 1048-1131);
- существует треугольник, подобный, но не равный другому треугольнику (Д.Саккери, 1667-1733);
- существует хотя бы один прямоугольник (А.К.Клеро, 1713-1765);
- существует хотя бы один треугольник, у которого сумма углов не меньше 180° (А.М.Лежандр, 1752-1833);
- через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность (Фаркаш Бойяи, 1775-1856).

Ответ на вопрос о возможности доказательства пятого постулата был получен лишь в XIX веке. Огромную роль в решении этой проблемы сыграл Николай Иванович Лобачевский.

Вся сознательная жизнь Лобачевского, родившегося в Нижнем Новгороде, связана с Казанью и Казанским университетом. Сначала он учился в Казанской гимназии, потом поступил в Казанский университет. Большое влияние на Лобачевского оказал Мартин Бартельс (1769-1833), друживший с Гауссом, который был его учеником в школе. В 1816 году Лобачевский стал профессором Казанского университета, а с 1827 года в течение 20 лет был ректором.

Лобачевский, как и многие другие его предшественники, пытался доказать пятый постулат Евклида методом от противного. Не используя пятый потулат, можно доказать, что через любую точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, не препересекающую данную. Из пятого постулата можно вывести, что такая прямая только одна. Лобачевский же предположил, что таких прямых можно провести несколько, и, исходя из этого, стал пытаться получить утверждение, противоречащее другим аксиомам или выведенным из них теоремам. Если бы такое утверждение удалось получить, то это означало бы, что предположение неверно, а потому через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, не пересекающая данную. Таким образом, пятый постулат был бы доказан.

Но Лобачевский не получил утверждений, противоречащих другим аксиомам. Он понял, что пятый постулат не следует из других аксиом Евклида, а из полученных им утверждений складывается стройная и глубокая теория. Из этого Лобачевский сделал фундаментальный вывод: можно построить другую геометрию, отличную от геометрии Евклида. Впоследствии эта геометрия получила развитие в трудах Бельтрами, Пуанкаре и Клейна, а так как доказанные Лобачевским утверждения составляют важнейшую часть этой геометрии, её стали называть геометрией Лобачевского. Она во многом отличается от евклидовой геометрии. Так, в геометрии Лобачевского нет подобных, но не равных друг другу треугольников, нет ни одного прямоугольника, а сумма углов любого треугольника меньше 180°.

Сообщение об открытии новой геометрии Лобачевский сделал в феврале 1826 года на заседании отделения физико-математических наук Казанского университета. Этот доклад вошёл в первую публикацию Лобачевского по неевклидовой геометрии — статью «О началах геометрии» (Казанский вестник, 1829-1830). Затем в «Учёных записках Казанского университета» Лобачевский опубликовал мемуары «Воображаемая геометрия» (1835), «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» (1836) и «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1835-1838). В 1840 году в Берлине вышла книга Лобачевского «Геометрические

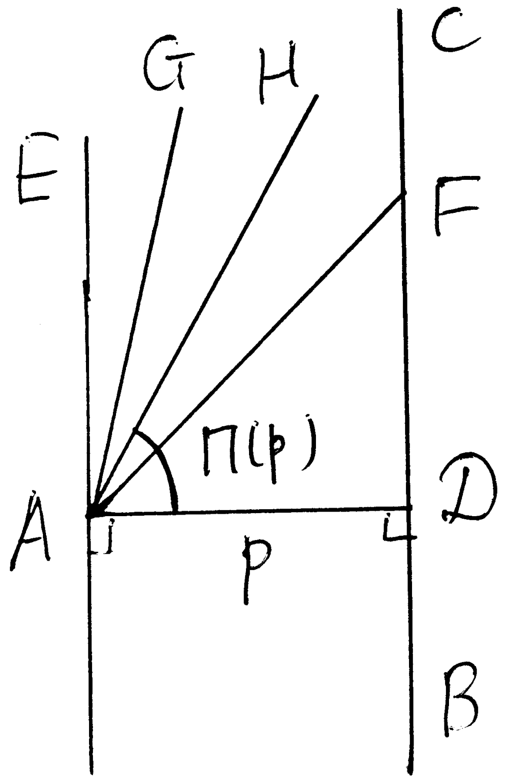

Рис. 7.5.

исследования по теории параллельных линий» на немецком языке. В 1855 и 1856 годах Лобачевский издал в Казани на русском и французском языках книгу «Пангеометрия».

Независимо от Лобачевского к аналогичному открытию пришел венгерский математик Янош Бойяи, но он опубликовал свои результаты лишь в 1832 году. В рукописях Гаусса содержатся идеи, близкие к идеям Лобачевского и Бойяи, но он не решился опубликовать их, опасаясь быть непонятым.

Построение своей геометрии Лобачевский начал следующим образом. Проведём из точки A перпендикуляр AD к прямой BC (рис. 7.5). Прямая AE, перпендикулярная к прямой AD, не пересекает прямую BC. Между прямыми вида AF, пересекающими прямую BC, и прямыми вида AG, не пересекающими эту прямую, есть граничная прямая AH. Угол HAD Лобачевский называет *углом параллельности* и обозначает его $\Pi(p)$, где $p = AD$ — расстояние от точки A до прямой BC. Пятый постулат Евклида эквивалентен предположению о том, что угол параллельности прямой, а предположение Лобачевского заключается в том, что угол параллельности острый.

Прежде всего Лобачевский доказывает, что при таком предположении сумма углов треугольника меньше π. Затем он приступает к исследованию угла параллельности и показывает, что функция $\Pi(p)$ убывает с увеличением p и изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0, когда p изменяется от 0 до ∞.

Лобачевский доказывает, что в треугольнике серединные перпендикуляры к сторонам либо попарно не пересекаются, либо все пересекаются в одной точке, а если два перпендикуляра параллельны, то все они параллельны друг другу. В связи с этим он рассматривает *орицикл* — кривую, для которой серединные перпендикуляры ко всем её хордам попарно параллельны (рис. 7.6). Таким образом, орицикл — это кривая, перпендикулярная семейству параллельных прямых на плоскости. Орицикл можно рассматривать как окружность бесконечно большого радиуса.

Аналогично орициклу можно определить *орисферу* — поверхность, перпендикулярную семейству параллельных прямых в пространстве. Лобачевский показал, что геометрия на орисфере евклидова.

После этого Лобачевский получает для треугольников своей геометрии аналоги формул обычной тригонометрии. Сначала для функции $\Pi(x)$ Лобачевский получает следующее выражение: $\Pi(x) = 2\operatorname{arctg} e^{-x/k}$, где k — некоторая постоянная. Эта постоянная — абсолютный отрезок, который можно выбрать в качестве выделенной единицы длины; k называют кривизной геометрии Лобачевского. Таким образом, есть целое семейство разных геометрий Лобачевского, зависящее от k, — точно так же как геометрия на сфере зависит от радиуса сферы.

В формулы для треугольников в геометрии Лобачевского длины сторон входят как аргументы функции $\Pi(x)$. Например, в прямоугольном треугольнике гипотенуза c, катет a и противолежащий ему угол A связаны соотношением $\operatorname{tg}\Pi(c) = \operatorname{tg}\Pi(a)\sin A$.

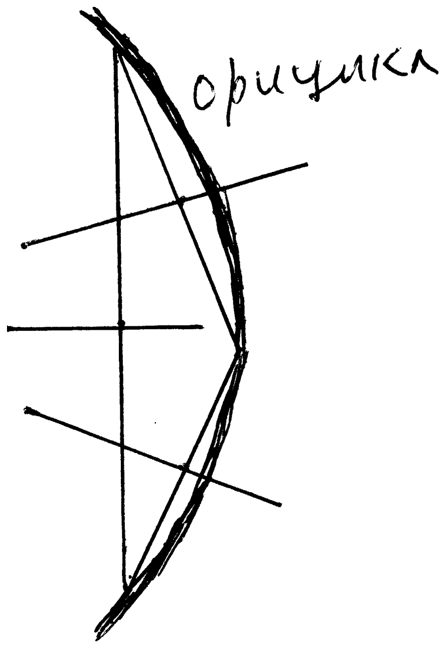

Рис. 7.6.

Лобачевский вычислил длину окружности и длину дуги орицикла, а также выражение для длины дуги произвольной кривой и площади произвольной фигуры на плоскости; затем выражение для площади поверхности и объёма тела. Приравнивая разные выражения площади или объёма одной и той же фигуры, Лобачевский вычисляет некоторые новые, не вычисленные до него интегралы.

Для выяснения того, какой именно геометрией является геометрия Вселенной, Лобачевский предложил следующую схему астрономических наблюдений. Если геометрия Вселенной неевклидова, то при наблюдении из точки A параллакс звезды, находящейся на перпендикуляре AS к плоскости эклиптики не может быть сколь угодно малым: он ограничен снизу числом $\frac{\pi}{2} - \Pi(a)$, где a — диаметр орбиты Земли (рис. 7.7; на этом рисунке прямая l параллельна прямой AS). Взяв наименьший из всех параллаксов звёзд, доступных наблюдению, мы можем оценить снизу радиус кривизны k и оценить отклонение параметров треугольников в геометрии Лобачевского от треугольников в евклидовой геометрии. Полученные Лобачевским оценки отклонений оказались слишком малыми, чтобы их можно было измерить.

Лобачевский приводил следующий довод в защиту непротиворечивости своей геометрии. Она основана на формулах для треугольников, которые сводятся к обычным формулам сферической геометрии при замене a, b, c на ia, ib, ic. Поэтому любое противоречие в его геометрии приводило бы к противоречию в сферической геометрии, а это означало бы противоречие в евклидовой геометрии.

При жизни Лобачевского его работы по неевклидовой геометрии были оценены только Гауссом, по рекомендации которого в 1842 году Лобачевский стал членом-корреспондентом Гёттингенского учёного общества. Но публично с оценкой новой геометрии Гаусс не выступил.

В 1834 году Лобачевский открыл метод приближённого вычисления корней алгебраического уравнения. Независимо от него этот метод открыли Данделен и Греффе.

7.16. Мартин Ом (1792-1872)

Брат Георга Ома, в честь которого названа единица измерения сопротивления. В 1815 году Мартин Ом ввёл термин *золотое сечение*.

7.17. Джордж Грин (1793-1841)

Английский математик-самоучка Грин работал на мельнице. Интегральную теорему, носящую его имя, он опубликовал в брошюре, изданной им за свой счёт в 1828 году. В этой работе Грин ввёл термин *потенциал* и исследовал общие свойства потенциала. В этой же работе введена функция Грина (функция Грина $G(x, s)$ для диффе-

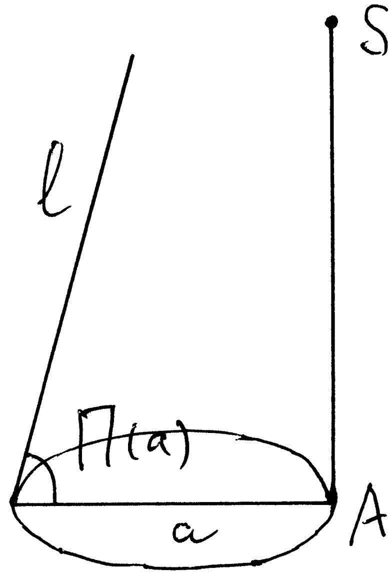

Рис. 7.7.

ренциального оператора L позволяет находить решение уравнения $Lu(x) = f(x)$ в виде $u(x) = \int G(x,s)f(s)ds$.

Для оператора Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Грин вывел формулу

$$\int\int\int (u\Delta v - v\Delta u)dx\,dy\,dz = \int\int \left(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}\right) ds.$$

Эта работа оставалась незамеченной, пока в 1850 году на неё не обратил внимание лорд Кельвин.

В том же самом 1828 году эту теорему доказал Остроградский.

7.18. Мишель Шаль (1793-1880)

В 1831 году Шаль доказал, что любое собственное движение в пространстве является винтовым движением, т.е. композицией поворота вокруг некоторой прямой и переноса вдоль этой прямой. Шаль получил также классификацию движений плоскости: сохраняющее ориентацию движение является либо поворотом, либо параллельным переносом, а меняющее ориентацию движение является скользящей симметрией.

В 1837 году Шаль опубликовал «Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов». В этом трактате он впервые выявил роль Евклида, Паппа, Дезарга и других математиков в создании проективной геометрии. Трактат содержит также много оригинальных результатов (они занимают более половины книги).

В 1850 году Шаль заметил, что две прямые на евклидовой плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда бесконечно удалённые точки этих прямых гармонически сопряжены относительно циклических точек.

В 1852 году Шаль опубликовал «Трактат по высшей геометрии». В этой книге он ввёл двойное отношение и инволюции (проективные преобразования прямой, квадрат которых тождествен). В книге «Трактат о конических сечениях» (1865) он применил эту технику к коническим сечениям.

Шаль строил проективную геометрию на основе понятия двойного отношения четырёх точек, лежащих на одной прямой. (Сам он использовал термин *ангармоническое отношение*, потому что случай, когда это отношение равно -1, соответствует тому, что древнегреческие геометры называли гармоническими четвёрками точек.) Шаль показал, что двойное отношение сохраняется при проекциях. Он рассматривал величины направленных отрезков и чётко использовал принцип знаков, поэтому его построение проективной геометрии, во многом схожее с построением Штейнера, было более совершенным.

Шаль определял конику следующим образом. Фиксируем точки A, B, C, D. Тогда множество точек P, для которых постоянно двойное отношение прямых PA, PB, PC, PD, — это коника, проходящая через точки A, B, C, D (рис. 7.8). Шаль показал, что такое определение эквивалентно обычному определению. Он использовал также другое определение (вероятно, независимо от Штейнера, который также предложил такое определение). Рассмотрим три точки A, B, C и ещё две точки O и O'. Через точку O проводится произвольная прямая l,

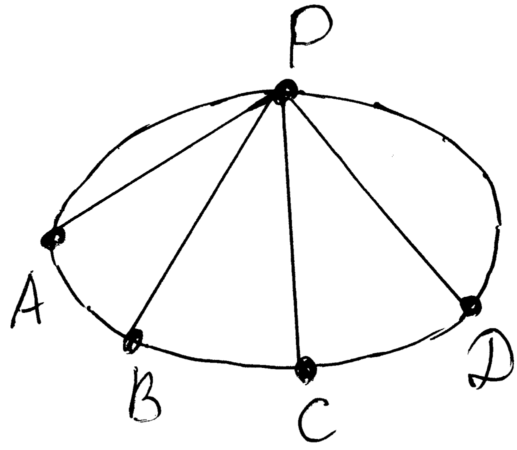

Рис. 7.8.

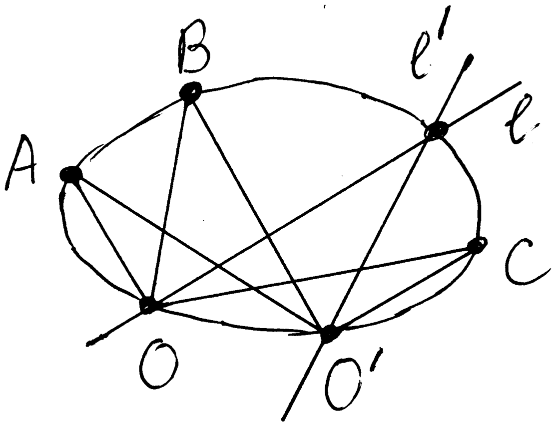

Рис. 7.9.

а через точку O' проводится прямая l' так, что двойное отношение прямых OA, OB, OC, l равно двойному отношению прямых $O'A$, $O'B$, $O'C$, l'. Тогда точки пересечения прямых l и l' заметают конику. (Эта коника проходит через точки A, B, C, O и O', рис. 7.9) В отличие от Штейнера, изучая коники, Шаль рассматривал не только вещественные элементы, но и мнимые.

В 1864 году Шаль дал правильный ответ на вопрос Штейнера: «Сколько коник касается пяти данных коник?». Штейнер считал, что их 7776, но правильный ответ другой: 3264.

7.19. Жерминаль Пьер Данделен (1794-1847)

Бельгийский математик Данделен в работе «О некоторых замечательных свойствах параболической фокали» (1822) доказал, что фокусы конического сечения можно определить как точки касания плоскости сечения со сферами (для параболы — с одной сферой), вписанными в конус (рис. 7.10). Директрисы конического сечения являются линиями пересечения той же плоскости с плоскостями окружностей, по которым сферы касаются конуса.

В 1826 году Данделен обобщил эту теорему, заменив конус на гиперболоид вращения; он также связал шестиугольники Паскаля и Брианшона с шестиугольниками, составленными из образующих гиперболоида.

В том же году он разработал способ приближённого вычисления корней алгебраических уравнений. Позже этот метод независимо открыли Лобачевский (1832) и Греффе (1837), и он получил название *метод Лобачевского–Греффе*.

В 1827 году изучал стереографическую проекцию сферы на плоскость.

7.20. Франц Адольф Тауринус (1794-1874)

Племянник Швейкарта Тауринус в 1825 и 1826 годы опубликовал две книги, в которых развивал идеи своего дяди: «Теория параллельных прямых»и «Элементарная геометрия». Во второй книге Тауринус допускает, что существует геометрия, в которой сумма углов треугольника меньше двух прямых углов. Он называет эту геометрию логарифмико-сферической. Он признаёт, что отсутствие противоречий в этой геометрии означает, что она внутренне согласованна.

Таурнис использовал тригонометрический подход, развивая идею Ламберта о сфере мнимого радиуса. Он взял известные формулы для треугольника на сфере радиуса k:

$$\cos(a/k) = \cos(b/k)\cos(c/k) + \sin(b/c)\sin(c/k)\cos A,$$

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos(a/k)$$

и формально заменил k на ik. В результате он получил формулы для треугольников в новой геометрии (эти формулы действительно имеют место для треугольников в геометрии Лобачевского). Тауринс показал, что эти формулы согласуются с астральной геометрией его дяди и даже выразил с их помощью константу Швейкарта через k.

Но в действительности Тауринс хотел доказать пятый постулат. В первой из своих книг он привёл 10 причин, по которым астральная геометрия не может быть геометрией пространства. Его доводы были неубедительны. Например, он полагал, что если астральная геометрия верна, то евклидова геометрия должна быть неверна, с чем он не мог согласиться. Гаусс счёл работы Тауринса неполными и противоречивыми.

7.21. Бенжамен Оленд Родриг (1795-1851)

В 1815 году в работе «Исследования по аналитической теории линий и радиусов кривизны поверхностей» Родриг получил ряд результатов и формул, связанных с линиями кривизны, в частности так называемые *формулы Родрига*

$$\frac{\partial n}{\partial u^i} = -k_i\frac{\partial r}{\partial u^i},$$

выражающие частные производные вектора нормали n к поверхности по главным направлениями u^1 и u^2 через частные производные радиус-вектора r и главные кривизны k_1 и k_2.

С помощью сферического отображения поверхности Родриг, предваряя Гаусса, рассмотрел отношение площадей соответствующих бесконечно малых областей на сфере и на поверхности и получил величину, названную впоследствии *гауссовой кривизной*. Родриг доказал, что гауссова кривизна поверхности равна произведению главных кривизн.

В 1816 году Родриг получил формулу

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)}{dx^n}$$

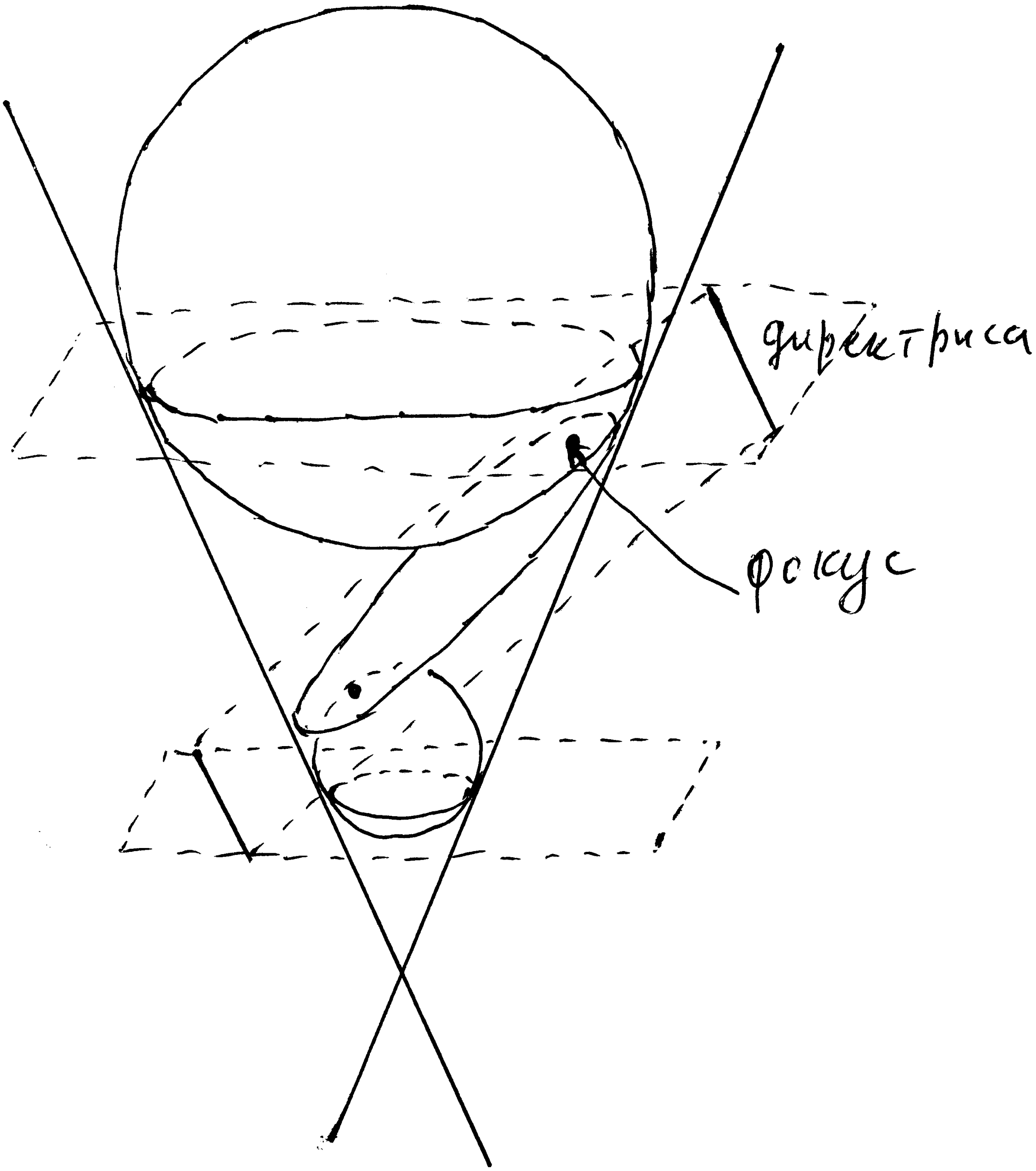

Рис. 7.10.

для многочленов Лежандра.

В 1840 году Родриг получил формулу для композиции вращений трёхмерного пространства.

Родриг нашёл также производящую функцию для числа перестановок n элементов, имеющих данной число инверсий.

7.22. Габриэль Ламе (1795-1870)

С 1820 по 1832 год Ламе преподавал в Санкт-Петербурге.

В книге «Исследования различных методов решения геометрических задач» (1818) он впервые решил многие задачи аналитической геометрии. В этой книге впервые встречается уравнение плоскости в виде $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

В 1840 году Ламе впервые применил криволинейные координаты в пространстве, исследуя задачу о распространении тепла. Записал уравнение Лапласа в эллипсоидальных координатах и решил полученное уравнение с помощью разделения переменных.

В 1859 году ввёл так называемые *функции Ламе*.

Доказал, что уравнение $x^7+y^7=z^7$ не имеет решений в натуральных числах.

Доказал также, что число делений в алгоритме Евклида не больше количества цифр наименьшего из чисел, умноженного на 5.

7.23. Якоб Штейнер (1796-1863)

Якоб Штейнер родился в семье швейцарского пастуха, и только в 19 лет научился в школе Песталоцци читать и писать. Штейнер полагал, что геометрию лучше всего изучать, размышляя о воображаемых образах. Он отвергал не только применение алгебры и анализа, но и чертежи.

В 1827 году Штейнер показал, что четыре высоты тетраэдра принадлежат одному гиперболоиду.

Основной труд — «Систематическое развитие зависимости геометрических образов друг от друга» (1832). Образом первой степени является, в частности, пучок прямых. Штейнер определяет конику как множество точек пересечения соответственных прямых в двух проективных пучках прямых. В своих доказательствах он часто использовал двойное отношение. Существенным недостатком работ Штейнера было то, что у него не было чёткого применения принципа знаков и мнимые элементы он не использовал.

Штейнер дал определение двойственной коники как семейства прямых и общее определение двойственной кривой как семейства касательных. В этом смысле теореме Паскаля двойственна теорема Брианшона.

В 1822 году Понселе доказал, что все построения циркулем и линейкой можно выполнить одним циркулем, если задана окружность с отмеченным центром. В 1833 году Штейнер получил более изящное доказательство этого факта. В предисловии Штейнер написал, что он доказал гипотезу, высказанную французским математиком.

В 1840 году Штейнер вычислил объём тела, заключённого между многогранниками, грани которых паралелльны и расстояние между параллельными плоскостями граней равно h.

В 1842 году Штейнер опубликовал работу о геометрических максимумах и минимумах. Там, в частности, элементарными методами исследована изопериметрическая задача. Штейнер привёл пять разных доказательств, но все они предполагали, что решение изопериметрической задачи существует. В одном из этих доказательств вводится *симметризация Штейнера* — замена многоугольника (или многогранника) на симметричный относительно прямой многоугольник (или симметричный относительно плоскости многогранник) с соответственно равными сечениями всеми прямыми, перпендикулярными оси (плоскости) симметрии.

Дирихле много раз пытался убедить Штейнера, что его доказательство неполно, но Штейнер с этим не соглашался, и лишь несколько лет спустя написал, что для завершения доказательства нужно предположить, что существует наибольшая фигура. Существование наибольшей фигуры доказал Вейерштрасс в своих лекциях 1870 года. Прямое решение изопериметрической задачи, без обращения к существованию наибольшей фигуры, получили Каратеодори и Штуди в совместной работе (1909). Шварц (1884) получил строгое решение изопериметрической задачи в трёхмерном пространстве.

Штейнер задался вопросом, существует ли отличная от квадрики поверхность, все плоские сечения которой — коники? В сечении могут получаться пары коник, но не могут получаться прямые или кубические кривые. В 1844 году, будучи в Риме, он придумал пример такой поверхности; её называют *римской поверхностью* или *поверхностью Штейнера*.

В 1853 году, исследуя двойные касательные к кривым четвёртой степени, Штейнер ввёл так называемые *системы Штейнера* $S(t,k,n)$. Система Штейнера — это такой набор k-элементных подмножеств (блоков) в n-элементном множестве, что любое t-элементное подмножество содержится ровно в одном блоке. Аффинная и проективная плоскости над полем из q элементов являются примерами систем Штейнера типа $S(2,q,q^2)$ и $S(2,q+1,q^2+q+1)$; блоками при этом являются прямые. Штейнер рассматривал только случай $k=t+1$. До Штейнера, в 1847 году, системы Штейнера ввёл Киркман.

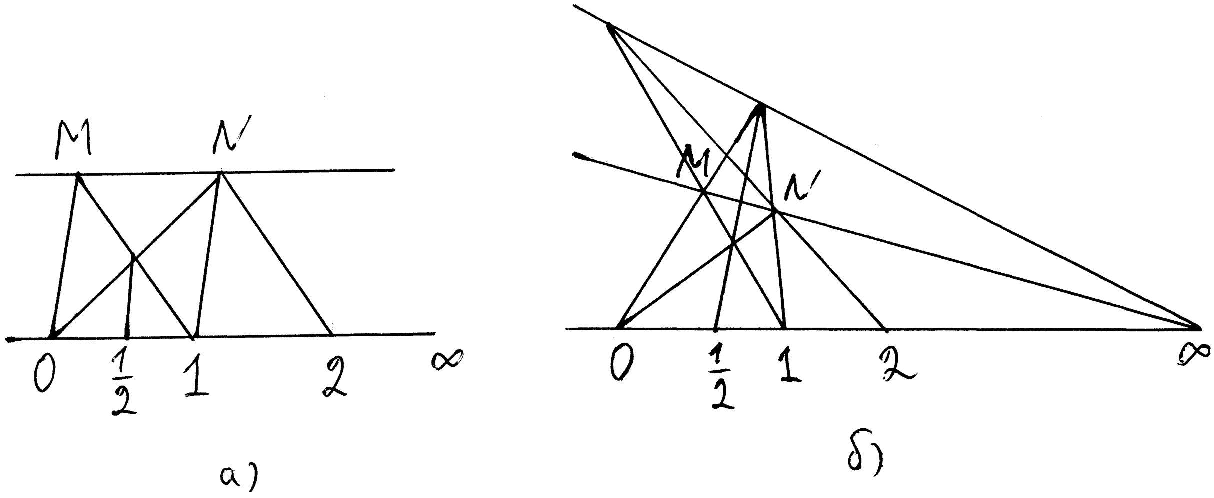

Рис. 7.11.

Штейнер решил задачу о нахождении эллипса наименьшей (наибольшей) площади, описанного около треугольника (вписанного в треугольник); эти эллипсы теперь называют *эллипсами Штейнера*.

7.24. Этьен Бобиллье (1798-1840)

Показал, что точки касания кривой степени n с касательными, проведёнными из фиксированной точки, лежат на кривой степени $n-1$, которую он назвал *полярой* этой точки.

7.25. Карл Георг Христиан фон Штаудт (1798-1867)

В 1845 году доказал теорему фон Штаудта–Клаузена о числах Бернулли и обнаружил важное свойство числителей этих чисел, выраженное в виде сравнения по модулю.

Большим недостатком работ Шаля и Мёбиуса по проективной геометрии было то, что в них двойное отношение определялось как произведение двух отношений длин отрезков. Тем самым проективная геометрия становилась зависящей от евклидовой геометрии — от метрики, а постепенно становилось ясным, что проективные свойства более фундаментальные, чем метрические. Так возникла проблема освободить проективную геометрию от метрических понятий при синтетическом построении геометрии. Штаудт предложил решение этой проблемы в книге «Геометрия положения» (1847). Его целью было избежать использования понятия длины в проективной геометрии, в частности, в определении двойного отношения. Для этого он ввёл геометрически координаты на проективной прямой, на которой фиксированы точки 0, 1 и ∞. Например, точки с координатами 2 и $\frac{1}{2}$ строятся так, как показано на рис. 7.11. На рисунке а) это построение показано с помощью параллельных прямых, а рисунок б) — это тот же самый рисунок с проективной точки зрения.

Логический недостаток работы Штаудта был в том, что он использовал понятие параллельных прямых, которое не является проективно инвариантным. Этот недостаток устранил впоследствии Феликс Клейн. Другой недостаток — неявное использование непрерывности. Геометрическая конструкция Штаудта позволяла построить только точки с рациональными координатами, а точки с иррациональными координатами нужно было находить предельным переходом. Впоследствии Дарбу показал, что функция (которая используется для введения координат) действительно получается непрерывной (это следует из того, что при положительных значениях она положительна).

Штаудт заметил, что соотношение, которое коника устанавливает между полюсами и полярами, более фундаментальное, чем сама коника, и эту полярность можно использовать для определения коники: коника — это множество тех точек, которые лежат на своих полярах.

В «Геометрии положения» Штаудт выяснил, для каких многогранников выполняется теорема Эйлера о многогранниках: такие многогранники должны обладать двумя свойствами: 1) из любой вершины можно попасть в любую другую вершину по рёбрам; 2) любой замкнутый несамопересекающийся путь, проходящий по рёбрам, разделяет многогранник на две части. Он привёл следующее доказательство того, что для любого многогранника, обладающего этими свойствами, выполняется теорема Эйлера. (Мы изложим его, пользуясь современной терминологией.) Рассмотрим многогранник, у которого V вершин, E рёбер и F граней. Выберем какое-нибудь максимальное дерево, целиком состоящее из рёбер этого многогранника. На рисунке 7.12 рёбра, входящие в

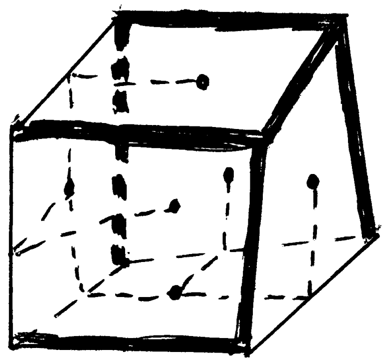

Рис. 7.12.

такое дерево, выделены жирным. Согласно свойству 1) это дерево связно, поэтому оно содержит $V-1$ рёбер. Затем отметим внутри каждой грани точку и соединим две такие точки пунктирной линией, если эти точки лежат в смежных гранях, не разделённых жирным ребром (рис. 7.12). Из свойства 2) следует, что этот граф связен. Более того, этот граф тоже является деревом, потому что если бы он содержал цикл, то исходной максимальное дерево не было бы связно по свойству 2). А так как это дерево имеет F вершин, то оно имеет $F-1$ рёбер. Любое ребро многогранника либо входит в максимальное дерево, либо пересекает пунктирное ребро. Поэтому $(V-1)+(F-1)=E$, т.е. $F-E+V=2$.

Во второй своей большое работе «К вопросу о геометрии положения», вышедшей тремя выпусками в 1856, 1857 и 1860 годах, Штаудт показал, что мнимые точки, которые до него вводились аналитически, можно определить синтетически с помощью эллиптических инволюций на прямой, т.е. инволютивных проективных преобразований прямой, не имеющих действительных неподвижных точек.

7.26. Михаил Васильевич Остроградский (1801–1862)

В 1828 году Остроградский одновременно с Грином доказал интегральную теорему.

В 1834 году в «Мемуаре о вариационном исчислении кратных интегралов» он впервые получил выражение для вариации интеграла любой кратности, причём не только в случае фиксированной границы, но и в общем случае, когда допускается варьирование границы. Если эту вариацию приравнять нулю, то получится так называемое уравнение Эйлера–Остроградского.

В 1838 году Остроградский одновременно с Лиувиллем доказал формулу $\Delta = ae^{-\int a_1(x)dx}$, где Δ — определитель Вронского линейного дифференциального уравнения.

7.27. Юлиус Плюккер (1801–1868)

В отличие от Штейнера, применявшего синтетический подход к геометрии, Плюккер предпочитал аналитический подход, и это было причиной их постоянных конфликтов.

В 1828 году Плюккер опубликовал первый том «Аналитико-геометрических исследований», а в 1831 году — второй. Во втором томе, используя однородные координаты, Плюккер дал определение бесконечно удалённой прямой и круговых (циклических) точек.

Плюккер рассматривал коники как огибающие семейства прямых. Он искусно использовал манипуляции с коэффициентами, входящими в уравнения коник и их пучков. Например, теорему Паскаля о шестиугольнике, вписанном в конику, Плюккер доказывает следующим образом. Пусть точки A, B, C и D лежат на конике, заданной уравнением $f=0$; для каждой прямой PQ можно рассмотреть линейное уравнение $l_{PQ}=0$, задающее эту прямую. Уравнение коники можно представить в виде $\lambda l_{AB}l_{CD}+\mu l_{BC}l_{AD}=0$. Если на той же конике лежат ещё и точки C и D, то уравнение коники можно представит многими способами, в частности, $\lambda_1 l_{AB}l_{CD}+\mu_1 l_{BC}l_{AD}=f=\lambda_2 l_{AF}l_{ED}+\mu_2 l_{EF}l_{AD}$. Следовательно, $\lambda_1 l_{AB}l_{CD}-\lambda_2 l_{AF}l_{ED}=(\mu_2 l_{EF}-\mu_1 l_{BC})l_{AD}$. Из последнего равенства следует, что точки пересечения прямых AB и ED, CD и AF, BC и EF лежат на одной прямой, а именно, на прямой, заданной уравнением $\mu_2 l_{EF}-\mu_1 l_{BC}=0$.

Сопоставляя прямой, заданной уравнением $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$, точку с однородными координатами $(u_1:u_2:u_3)$, Плюккер обосновал принцип двойственности Понселе–Жергонна; эти координаты получили название *тангенциальных*. Аналогично Плюккер ввёл координаты плоскости в пространстве и обосновал принцип двойственности в пространстве, при котором точке соответствует плоскость.

В 1835 году Плюккер опубликовал книгу «Система аналитической геометрии». Значительная часть книги посвящена кубическим кривым. В ней он показал, что любая кривая степени n на проективной плоскости имеет в общем случае $3n(n-2)$ точек перегиба. Точка перегиба — это точка, в которой касательная имеет касание 3-го, а не 2-го, порядка. В общем случае здесь означает, что кривая не имеет особых точек (кратных точек и точек возврата). В этой книге строится система Штейнера $S(2,3,9)$, задолго до того, как более общие системы обсуждал Штейнер (1853).

В 1839 году опубликовал книгу «Теория алгебраических кривых». Это одна из первых книг, в которых алгебраические кривые рассматриваются на проективной плоскости, причём для простоты вычислений эта плоскость предполагается комплексной. Плюккер вводит *тангенциальное* уравнение кривой: он рассматривает уравнение $\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$, определяющее однопараметрическое семейство прямых, заданных в тангенциальных координатах, как уравнение кривой, огибающей это семейство. Название «тангенциальное» связано с тем, что кривая определяется не своими точками, а касательными. Степень уравнения, которое задаёт кривую поточечно, называется *порядком* кривой, а степень тангенциального уравнения называется *классом* кривой. Плюккер показал, что на комплексной проективной плоскости порядок кривой, её класс, число двойных точек и число точек возврата связаны определёнными формулами, получившими название *формулы Плюккера*. При этом Плюккер не рассматривал кривые, которые имеют особенности, более сложные, чем двойные точки и точки возврата. Из этих формул Плюккер вывел, что кубическая кривая в общем случае имеет 9 точек перегиба; до него было лишь известно, что не более трёх из этих точек перегиба вещественные. Из формул Плюккера следует также, что к кривой с d кратными точками и c точками возврата из каждой точки можно провести $n(n-1) - 2d - 3c$ касательных.

Первоначальный подсчёт Жергонна количества касательных, которые можно провести из данной точки, был заведомо ошибочным (на что обратил внимание Понселе), потому что это количество (равное степени двойственной кривой) было больше степени кривой, а двойственная к двойственной кривой совпадает с исходной. Плюккер нашёл объяснение этому. Например, на кубической кривой есть 9 точек перегиба, которые дают 9 точек возврата на двойственной кривой. Они уменьшают степень двойственной кривой на 27. Кривая, двойственная к кривой степени n без точек возврата и двойных точек, имеет степень $n(n-1)$. На кривой степени n есть $3n(n-2)$ точек перегиба, что даёт $3n(n-2)$ точек возврата на двойственной кривой. Это уменьшает степень двойственной к двойственной кривой с $n(n-1)(n(n-1)-1)$ до $n(n-1)(n(n-1)-1) - 9n(n-1)$, но ещё не даёт правильный ответ n. Ещё могут быть двойные касательные: каждая двойная кастательная к исходной кривой даёт двойную точку двойственной кривой. Чтобы получить правильный ответ, нужно вычесть $n(n-2)(n^2-9)$. Поэтому Плюккер решил, что каждая кривая степени n без особых точек должна иметь $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ двойных касательных, что и объясняет парадокс. В частности, любая квартика должна иметь ровно 28 двойных касательных. Это доказал Гессе в 1848 году. Плюккер же показал, что все 28 бикасательных к квадрике могут быть вещественными.

В 1837 году Плюккеру пришлось сменить основную область деятельности, потому что его работы по аналитической геометрии были плохо приняты; в Германии в то время был более принят синтетический подход, развиваемый Штейнером. Плюккер был профессором не только математики, но и физики и занимался экспериментальной физикой (Плюккер — один из тех, кто открыл катодные лучи).

В 1846 году Плюккер ввёл однородные координаты в пространстве.

Плюккер первым стал принимать в качестве элементов пространства вместо точек другие геометрические образы, например, прямые или окружности.

Шесть однородных координат $p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ прямой в пространстве, проходящей через точки (x_i) и (y_i), получили название *координат Плюккера*, хотя они были введены ранее Грассманом (1844). Координаты Плюккера связаны квадратичным соотношением.

7.28. Жозеф Антуан Фердинанд Плато (1801–1883)

В 1840 году слуга Плато пролил масло в контейнер, наполненный смесью воды и спирта, и Плато заметил, что капли масла превратились в смеси в сферы. После этого он проделал несколько экспериментов, изучая форму капли, когда смесь воды и алкоголя вращалась. Затем он использовал смесь мыльной воды и глицерина, в которую макал проволочные контуры. Он заметил, что в результате образуются минимальные поверхности. В связи с этим *задачей Плато* называют нахождение минимальной поверхности с заданной границей (или доказательство существования такой поверхности).

7.29. Нильс Генрик Абель (1802-1829)

Абель родился в семье бедного норвежского пастора. Первая опубликованная статья Абеля посвящена функциональным уравнениям; к этой теме он часто потом возвращался. В 1824 году Абель опубликовал в виде брошюры сжатое доказательство невозможности решения общего уравнения 5-й степени в радикалах. Эта работа привлекла внимание, и Абелю была предоставлена стипендия для продолжения образования за границей. С осени 1825 года до весны 1826 года Абель жил в Берлине и познакомился там с Августом Креллем, начинавшим издавать свой знаменитый журнал. В первом же томе этого журнала (1826) опубликовано несколько статей Абеля. Одна из них посвящена доказательству невозможности решения в радикалах общего уравнения степени выше четвёртой. Летом 1826 года Абель посетил Италию, а конец этого года он провёл в Париже. Там он представил Парижской академии наук мемуар, содержащий теорему Абеля об абелевых функциях, обобщающую теорему сложения для эллиптических интегралов. Эта работа сначала не была оценена, но уже после смерти Абеля за неё была присуждена Большая премия Парижской академии наук. Летом 1827 года Абель вернулся в Норвегию, остановившись по дороге в Берлине. На родине он оказался в бедственном положении без работы. Подрабатывая уроками, Абель продолжал исследования по теории эллиптических функций и алгебраических уравнений. В конце 1828 года Абель заболел туберкулёзом, а в начале 1829 года, незадолго до получения приглашения на работу в Берлин, он умер.

В 1823 году Абель опубликовал статью, в которой впервые решается интегральное уравнение. Интегральное уравнение Абеля имеет вид $\psi(a) = \int_0^a \frac{\varphi(s)\,ds}{(a-x)^n}$, где ψ — заданная функция, а φ — неизвестная функция. Задача о нахождении кривой (в вертикальной плоскости), по которой должна падать тяжёлая точка, чтобы время падения с высоты a было равно $\psi(a)$, приводит к уравнению Абеля с $n = 1/2$.

Одна из статей Абеля, опубликованных в первом томе журнала Крелля (1826), посвящена доказательству невозможности решения в радикалах уравнения пятой степени. При этом предполагается, что коэффициенты уравнения — независимые переменные, т.е. доказывается невозможность решения уравнения в общем виде. Задачу о разрешимости уравнений с конкретными коэффициентами впоследствии исследовал Галуа.

Другая статья посвящена исследованию биномиального ряда $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \dots$. При этом Абель изучает и сходимость степенных рядов общего вида. Он доказывает теоремы о круге сходимости и о непрерывности суммы сходящегося степенного ряда. Абель вводит понятие равномерной сходимости ряда и исправляет ошибку Коши, о которой шла речь на с. 16.

При исследовании рядов Абель ввёл так называемое *преобразование!Абеля*, оказавшееся очень полезным: $\sum_{i=0}^{n} a_i b_i = \sum_{i=0}^{n-1}(a_i - a_{i+1})B_i + a_n B_n$, где $B_k = \sum_{i=0}^{k} b_i$.

Статья, в которой Абель обобщил теорему сложения эллиптических интегралов (*теорема Абеля*), в 1826 году была представлена в Парижскую Академию, но рецензенты (Лежандр и Коши) не сумели оценить её значение, и она была опубликована лишь в 1841 году. На эту тему Абель подготовил другую статью и за три месяца до смерти представил её в журнал Крелля; она была опубликована уже после смерти Абеля. Пусть $R(w,z)$ — рациональная функция, $f(w,z)$ — многочлен. *Абелев интеграл* — это интеграл вида $\int R(w,z)dz$, где $f(w,z) = 0$. Пусть $w = g(z, a_1, a_2, \dots, a_\mu)$ рационально зависит от параметров $a_1, a_2, \dots, a_\mu$. Рассмотрим все точки пересечения кривых $f(w,z) = 0$ и $w = g(z, a_1, a_2, \dots, a_\mu)$ для фиксированных параметров. Просуммируем абелев интеграл по всем точкам пересечения; получится функция от параметров. Теорема Абеля утверждает, что эта функция равна сумме рациональной функции и логарифмов рациональных функций, умноженных на константы. Абеля больше интересовали не сами интегралы, а обратные к ним функции.

В 1827 и 1828 годах в журнале Крелля выходят две части «Исследования по эллиптическим функциям», содержащие, в частности, решение задачи о делении лемнискаты. Абель первым рассматривает функцию, обратную эллиптическому интегралу первого рода $\int \frac{dx}{\sqrt{f_4(x)}}$, и показывает, что это — двоякопериодическая функция. Это был очень важный шаг: постепенно эллиптическим функциям стали уделять гораздо больше внимания, чем эллиптическим интегралам. Вторая часть «Исследований» посвящена делению лемнискаты на равные дуги с помощью циркуля и линейки и преобразованиям эллиптических функций. В «Арифметических исследованиях» Гаусса есть замечание, что разработанная им теория деления окружности на n равных частей может быть применена не только к круговым функциям, но и к функциям, которые зависят от интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. Именно таким интегралом выражается длина дуги лемнискаты. Абель установил, что для тех же чисел n, для которых Гаусс доказал возможность деления окружности на n равных частей, на равные части можно разделить лемнискату. Доказательство Абеля существенно опирается на то, что решётка периодов эллиптической функции, связанной с лемнискатой, квадратная, т.е. она инвариантна относительно умножения на i. Теорию эллиптических кривых, решётки периодов которых отображаются в себя при умножении на некоторое комплексное (не целое) число, называют *комплексным умножением*.

В 1829 году опубликован «Мемуар об одном особом классе алгебраически разрешимых уравнений». В нём Абель перенёс методы Гаусса, разработанные для решения уравнений деления круга, на случай уравнений с коммутативной группой Галуа. Эти уравнения характеризуются следующими свойствами: 1) каждый корень x_i уравнения выражается в виде рациональной функции от фиксированного корня, т.е. $x_i = \theta_i(x)$; 2) рациональные функции θ_i таковы, что $\theta_i(\theta_j(x_1)) = \theta_j(\theta_i(x_1))$. При этом Абель показал, что любая конечная коммутативная группа представляется в виде прямой суммы циклических подгрупп. Он также ввёл понятие области рациональности, являющееся аналогом современного понятия поля. Именно в связи с этой работой коммутативные группы стали называть *абелевыми*.

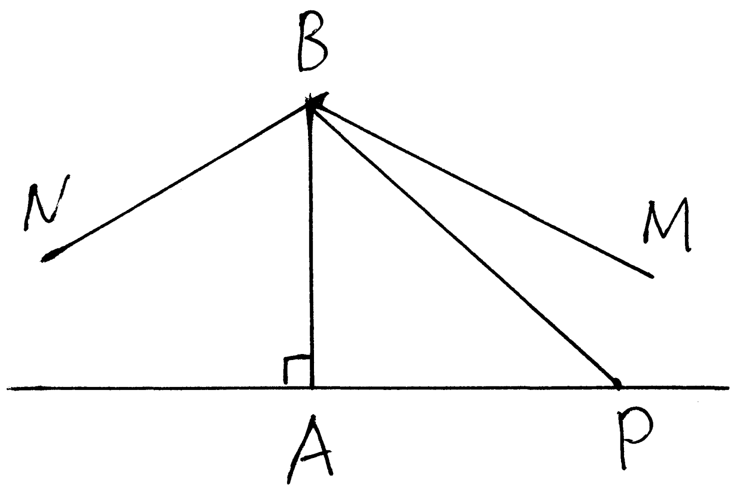

Рис. 7.13.

Абель доказал, что если интеграл $\int \frac{\rho(x)}{\sqrt{R(x)}}dx$, где $R(x)$ — многочлен степени $2n$, а $\rho(x)$ — многочлен степени $n-1$, выражается в элементарных функциях, то $\sqrt{R(x)}$ раскладывается в непрерывную периодическую дробь. Наоборот, если $\sqrt{R(x)}$ раскладывается в непрерывную периодическую дробь, то можно подобрать многочлен $\rho(x)$ так, чтобы интеграл $\int \frac{\rho(x)}{\sqrt{R(x)}}dx$ выражался в элементарных функциях.

Посмертно (в 1833 году) опубликована статья Абеля об общем методе получения интерполяционных разложений.

7.30. Янош Бойяи (1802-1860)

Фаркаш Бойяи, отец Яноша, учился вместе с Гауссом и был его другом в студенческие годы. Впоследствии они переписывались, но больше никогда не встречались.

10 лет Янош служил военным инженером и в 1833 году вышел в отставку по инвалидности. Ещё до этого он начал заниматься пятым постулатом. Сначала он пытался доказать пятый постулат, а потом в 1820 году занялся построением геометрии, в которой пятый постулат не выполняется. Отец, узнав о таких намерениях, пытался отговорить Яноша, ссылаясь на то, что он сам очень долго и интенсивно пытался получить доказательство пятого постулата, проводя ночи без сна, но ничего не добился. Янош на это отвечал в 1823 году, что он собирается вскоре опубликовать свои результаты и что он создал новый мир из ничего. Отец смягчился и предложил опубликовать эти результаты, если они действительно важные, в виде приложения к книге по геометрии, которую он давно уже писал. Познакомившись с результатами Яноша, Фаркаш сначала не хотел их признавать, потому что в формулах встречалась произвольная константа. Фаркаш считал, что это может привести к противоречию, если окажется, что константа не произвольная, а принимает два различных значения одновременно. В конце концов он всё-таки согласился опубликовать это приложение к своему двухтомному сочинению, опубликованному в 1832 году. Приложение Яноша (Appendix) занимало 28 страниц.

Бойяи начинает с нового определения параллельных прямых. Пусть точка B не лежит на прямой l; проведём из этой точки перпендикуляр BA к прямой l. Рассматривая предельное положение луча BP, когда точка P движется по прямой l в одном направлении, можно найти луч BM, который не пересекает прямую l, но все лучи с началом B, расположенные внутри угла MBA, пересекают прямую l. При движении точки P по прямой l в противоположном направлении получим второй луч BN (рис. 7.13). При этом $\angle MBA = \angle NBA = \delta$. Если $\delta = 90°$, то выполняется пятый постулат, поэтому Бойяи предполагает, что $\delta < 90°$. Прямые BM и BN Бойяи называет параллельными прямой l.

Бойяи доказал, что для любой точки A прямой l существует единственная точки B на параллельной ей прямой m, для которой отрезок AB образует равные односторонние углы с прямыми l и m (рис. 7.14). Это позволяет ему построить кривую L на плоскости и поверхность F в пространстве следующим образом. Он фиксирует прямую l на плоскости и точку A на ней, затем проводит все прямые, параллельные l (в одном направлении), и на каждой из этих прямых отмечает соответствующую точку B. Так получается кривая L; если проделать то же самое в пространстве, то получается поверхность F. Эти кривая L и поверхность F — орицикл и орисфера, которые рассматривал и Лобачевский. Бойяи, как и Лобачевский, делает следующее

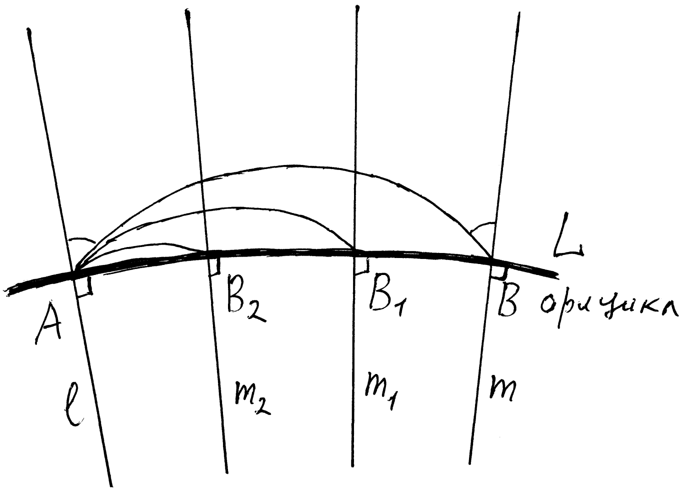

Рис. 7.14.

замечательное наблюдение: на поверхности F геометрия евклидова.

Затем Бойяи возвращается к свойствам угла δ и довольно сложными рассуждениями, использующими и орицикл L, получает формулу, связывающую угол δ и длину отрезка AB. Эта формула позволила ему получить много других результатов. Он получил выражение длины окружности через радиус и различные формулы, связывающие углы треугольника и его стороны. В отличие от евклидовой геометрии, в геометрии Лобачевского углы треугольника определяют его стороны.

Бойяи доказал также, что площадь треугольника пропорциональна угловому дефекту.

Книга Фаркаша Бойяи с приложением Яноша, посланная Гауссу, затерялась в хаосе, вызванном эпидемией холеры. Затем был послан другой экземпляр. Сочинение Яноша произвело на Гаусса большое впечатление, и он написал в 1832 году Герлингу: «Я считаю младшего Бойяи гением первой величины.» Но Фаркашу Гаусс ответил совсем по-другому: «Если я напишу тебе о работе твоего сына, что я не могу её хвалить, то ты, конечно, поразишься; но я не могу иначе: хвалить её, значит хвалить самого себя; ибо всё содержание работы, путь, по которому прошёл твой сын, и результаты, к которым он был приведён, почти вполне совпадают с моими размышлениями, занимающими меня последние 30 или 35 лет. ... Я имел намерение со временем изложить мою работу на бумаге. Я очень поражён тем, что этот труд я могу теперь не предпринимать, и очень рад, что меня таким удивительным образом предварил сын моего старого друга.»

В 1844 году отец и сын Бойяи услышали о работах Лобачевского, но не смогли их найти. В 1848 году Фаркаш написал Гауссу и тот ответил, что лучше всего попытаться найти книгу Лобачевского на немецком языке, опубликованную в 1840 году. Эту книгу они вскоре нашли. Кое-что у Яноша было сделано лучше, но в основном результаты Лобачевского были глубже и яснее.

Особое внимание Янош Бойяи уделял теоремам *абсолютной геометрии*, т.е. теоремам, которые верны как в евклидовой геометрии, так и в гиперболической геометрии. Например, он формулирует теорему синусов так, что она верна в обеих геометриях (и даже в сферической геометрии):

$$\bigcirc a : \bigcirc b : \bigcirc c = \sin A : \sin B : \sin C,$$

где $\bigcirc a$ — длина окружности радиуса a.

7.31. Жак Шарль Франсуа Штурм (1803-1855)

В 1829 году Штурм построил для каждого многочлена f последовательность многочленов f, f_1, ..., f_n, для которой число корней многочлена f, заключённых между a и b ($a < b$), в точности равно $w(a) - w(b)$, где $w(x)$ — число перемен знака в последовательности $f(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_n(x)$. Аналогичная последовательность многочленов, построенная Фурье, позволяла получить лишь оценку числа корней, а не их точное число.

В 1836 году Штурм опубликовал два больших мемуара: «Мемуар о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка» и «Мемуар об одном классе уравнений с частными производными». Первый мемуар посвящён качественному исследованию поведения решения $X_\lambda(x)$ уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(K(\lambda, x)\frac{dX_\lambda(x)}{dx}\right) + G(\lambda, x)X_\lambda(x) = 0,$$

удовлетворяющего условию

$$\left[\frac{K(\lambda,x)dX_\lambda(x)/dx}{X_\lambda(x)}\right]_{x=\alpha} = h(\lambda).$$

Здесь доказана теорема сравнения Штурма: если есть два уравнения, причём $G_2(x) \geq G_1(x)$ и $K_1 \geq K_2 > 0$, то между любыми последовательными нулями решения $X_1(x)$ первого уравнения лежит по крайней мере один нуль произвольного решения $X_2(x)$ второго уравнения (или решения X_1 и X_2 пропорциональны). Во втором мемуаре исследованы собственные значения и собственные функции некоторого дифференциального уравнения второго порядка. В этих мемуарах заложены основы теории Штурма–Лиувилля. Штурм в основном исследовал качественное поведение собственных функций.

Для уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dy}{dx}\right) - Gy = 0$$

Штурм нашёл число корней решения в данном интервале. Нули двух вещественных линейно независимых решений линейного дифференциального уравнения второго порядка разделяют друг друга (перемежаются). Если решения осциллируют в интервале (a,b), то при уменьшении K и G они будут осциллировать быстрее (число нулей увеличится).

7.32. Карл Густав Якоб Якоби (1804-1851)

В 1826 году Якоби написал письмо Гауссу о своих результатах о кубических вычетах, которые он получил под влиянием результатов Гаусса о квадратичных и биквадратичных вычетах, а в 1827 году — письмо Лежандру о новых идеях по поводу эллиптических функций.

В 1827 году в связи с исследованием задачи Пфаффа Якоби изучает свойства определителя кососимметрической матрицы. Этот определитель всегда равен квадрату многочлена, называемого пфаффианом. Якоби вычисляет пфаффиан для матриц порядка 4 и 6. Пфаффиан как некий многочлен Пфафф умел вычислять, но на связь пфаффиана с определителем кососимметрической матрицы первым указал Якоби. Он также отметил, что определитель кососимметрической матрицы нечётного порядка всегда равен нулю. К задаче Пфаффа Якоби возвращался и в 1837 году.

В 1827 году Якоби показал, как квадратичная форма от трёх переменных приводится к диагональному виду (т.е. к сумме квадратов с некоторыми коэффициентами) ортогональным преобразованием.

В 1829 году Якоби нашёл производящую функцию для обращения детерминанта.

В том же году он опубликовал книгу «Новые основания теории эллиптических функций». В этой книге он вводит тэта-функции, теорию которых он разрабатывает и в последующих трудах. Тэта-функции Якоби определяет сначала как бесконечные произведения, а затем получает их разложения в ряд. Якоби получает представление эллиптических функций в виде отношения тэта-функций. Вводит также три эллиптические функции Якоби. Книга Якоби показывает, что эллиптические функции естественно рассматривать в комплексной области.

В 1832 году в одной из статей появляется якобиан (определитель матрицы Якоби, составленной из частных производных) как множитель:

$$\partial\xi_1\partial\xi_2\ldots\partial\xi_n = \left(\sum \pm \frac{\partial\xi_1}{\partial v_1}\frac{\partial\xi_2}{\partial v_2}\cdots\frac{\partial\xi_n}{\partial v_n}\right)\partial v_1\partial v_2\ldots\partial v_n$$

В 1832-1834 годы Якоби занимался обращением системы абелевых интегралов, что привело его к введению тэта-функций многих переменных и впоследствии послужило возникновению и развитию теории абелевых функций.

В 1834 году он показал, что две квадратичные формы можно одновременно привести к диагональному виду, если одна из них положительно определена. В той же работе Якоби нашёл условия на коэффициенты преобразования, сохраняющего квадратичную форму вида $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, т.е. условия ортогональности матрицы преобразования. В той же самой работе Якоби вычислил объём поверхности сферы в n-мерном пространстве. Это были одни из первых обращений к многомерной геометрии, хотя и ещё пока без явных геометрических образов.

В том же году Якоби доказал, что если однозначная функция одной комлексной переменной имеет два периода, то отношение периодов не может быть вещественным.

В 1835 году в работе, посвящённой методу Безу исключения неизвестной из двух уравнений, приведено тождество Якоби для определителя, составленного из элементов присоединённой матрицы (без доказательства).

В 1835 году Якоби опубликовал работу «О четырёхкратно-периодических финкциях двух пеерменных». В ней он поставил вопрос: может ли функция одного переменного иметь три периода, которые нельзя свести к двум? Якоби показывает, что такое допущение приводит к тому, что среди периодов этой функции должны быть сколь угодно малые по модулю. Якоби считает это абсурдным, а потому он считает абсурдной попытку обращения интеграла $\int \frac{(a+bx)dx}{\sqrt{P_5(x)}}$, где $P_5(x)$ — многочлен 5-й степени без кратных корней, потому что обратная функция должна была бы иметь 4 различных периода. Впоследствии это нашло объяснение: обратная функция многозначная, а не однозначная (в отличие от случая эллиптических интегралов).

В лекциях 1836-1837 годов Якоби рассказал доказательство биквадратичного закона взаимности, основываясь на теории деления круга. Но первым опубликовал доказательство Эйзенштейн в 1844 году; он применил теорию комплексного умножения специальных эллиптических функций.

Работа 1837 года «К теории вариационного исчисления и дифференциальных уравнений» посвящена вариационному исчислению. В дополнение к классическому уравнению Эйлера–Лагранжа вывел дифференциальное уравнение Якоби и с его помощью установил новое необходимое условие для экстремали, реализующей минимум интеграла (условие Якоби). Это условие гарантирует отсутствие на экстремали сопряжённых точек. Сформулировал вариационный принцип, исключив из него время (принцип Якоби). В этой форме вариационный принци определяет только траекторию, но не время, за которое она пробегается. Сформулировал вопрос: как описать самые общие *канонические преобразования*, т.е. преобразования, при которых канонические дифференциальные уравнения $\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$ и $\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$ снова переходят в канонические. Получил первый ответ на этот вопрос.

В лекциях 1837-1838 годов Якоби выражает эллиптические функции Якоби через четыре вспомогательные функции (тэта-функции Якоби). Это даёт новый подход к определению эллиптических функций, не связанный с обращением эллиптических интегралов. Якоби применяет тэта-функции и в теории чисел, в частности, он доказывает теорему о количестве представлений числа в виде суммы двух квадратов.

В 1838 году Якоби ввёл для точки, лежащей на геодезической, понятие сопряжённой ей точки и сформулировал условие, когда геодезическая является кратчайшей. В 1839 году Якоби проинтегрировал уравнение геодезических на эллипсоиде.

В работе «О функциональных определителях» (1841) систематически исследовал *якобиан* системы из n функций от n переменных, уже ранее встречавшийся у Коши и у самого Якоби, и доказал, что если эти функции функционально зависимы, то якобиан тождественно равен нулю. После этой работы Якоби обозначение ∂ для частной производной, иногда встречавшееся и у других авторов, постепенно стало общепринятым. В этой работе и в работе «Об образовании и свойствах определителей», опубликованной в том же году, развил учение об определителях и получил первые результаты по теории инвариантов, например, о том, что определитель $\det(a_{ij})$ является инвариантом системы n линейных форм $f_i = \sum a_{ij}x_j$ от n неизвестных относительно группы $\mathrm{SL}(n)$ (группы матриц с определителем 1).

В 1841 году привёл без доказательства тождество Якоби–Труди для функций Шура. В 1864 году его ученик Николо Труди дал полное доказательство этого тождества.

В 1842 году доказал, что образ на сфере нормальных направлений для замкнутой кривой делит сферу на две части равной площади (теорема Якоби).

В 1842-1843 годы прочитал в Кёнигсберге курс лекций, опубликованный в 1866 году Клебшем под названием «Лекции по динамике». Якоби разработал общие методы интегрирования уравнений с частными производными и вариационного исчисления. Он предложил вместо решения уравнений динамики искать достаточно общее решение гамильтонова уравнения в частных производных. С помощью этого метода Якоби первым решил задачу о нахождении геодезических на поверхности трёхосного эллипса. В связи с этими исследованиями Якоби уравнения Гамильтона часто называют уравнениями Гамильтона–Якоби. При исследовании уравнений динамики Якоби использовал обнаруженное им тождество для скобки Пуассона; аналогичное тожество для векторного произведения и в алгебрах Ли также называют *тождество Якоби*. В 1843 году Якоби нашёл 12-й интеграл в задаче трёх тел (11 интегралов к тому времени уже были известны).

В 1845 году опубликовал мемуар о решении обыкновенных дифференциальных уравнений методом множителей.

В 1850 году Якоби показал, что кривая степени $n \geq 3$ имеет $\frac{n(n-2)(n^2-9)}{2}$ двойных касательных, подтвердив предположение Плюккера.

Занимаясь изучением фигур равновесия вращающейся жидкости, показал, что при определённых условиях ими являются трёхосные эллипсоиды (эллипсоиды Якоби); случай эллипсоидов вращения был известен ещё Маклорену.

Ввёл класс ортогональных многочленов (многочлены Якоби), обобщающих многочлены Лежандра.

В 1843 году Якоби стал профессором Берлинского унивеситета. В мае 1848 года он стал членом оппозиционного конституционного клуба, и даже высказывался, что его не пугает и перспектива республики. После победы реакции оклад Якоби был урезан и его даже попытались перевести из Берлина назад в Кёнигсберг. Якоби умер в 1851 году, заразившись оспой.

Разработанный Якоби способ приведения квадратичной формы к каноническому виду опубликован посмертно.

7.33. Виктор Яковлевич Буняковский (1804-1889)

В 1859 году в монографии о неравенствах для интегралов Буняковский опубликовал неравенство

$$\left(\int f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int f^2(x)dx \int g^2(x)dx,$$

впоследствии названное неравенством Коши–Буняковского–Шварца. У Коши неравенство было только для чисел, а не для интегралов, а у Шварца это неравенство появилось на 25 лет позже.

7.34. Иоганн Петер Густав Лежён-Дирихле (1805-1859)

Дирихле постоянно изучал «Арифметические исследования» Гаусса и первым сделал основные идеи этой книги доступными широкому кругу математиков, изложив их в своих лекциях по теории чисел. Многие работы Дирихле непосредственно связаны с исследованиями Гаусса.

В 1825 году Дирихле попытался доказать, что уравнение $x^5 + y^5 = z^5$ не имеет решений в натуральных числах. Если решение существует, то одно из чисел x, y и z делится на 5 и одно чётно. В случае, когда число, делящееся на 5, чётно, Дирихле удалось доказать, что решений нет. Его статью рецензировал Лежандр, и ему удалось доказать, развив далее рассуждения Дирихле, что решений нет и в том случае, когда чётное число и число, делящееся на 5, это разные числа. Таким образом, теорема Ферма при $n = 5$ была полностью доказана.

В 1829 году Дирихле получил условие сходимости тригонометрического ряда и доказал теорему о представимости функции рядом Фурье: если функция ограничена, имеет конечное число максимумов и минимумов и конечное число точек разрыва первого рода, то существует ряд Фурье, который сходится к этой функции в точках непрерывности, а в точках разрыва сходится к полусумме односторонних пределов. При доказательстве Дирихле для функции $f(x)$ рассматривал интеграл $\int f(\beta)\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}d\beta$. Поэтому функция $\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}$ (точнее говоря, функция $\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$) получила название *ядро Дирихле*.

В той же статье о рядах Фурье Дирихле рассматривал функцию, принимающую при всех рациональных x одно значение c, а при иррациональных — другое значение d (*функция Дирихле*).

Дирихле дал современное определение функции в 1837 году в другой статье о рядах Фурье.

В 1837 году доказал высказанное Эйлером и Гауссом предположение, что для взаимно простых чисел a и b в арифметической прогрессии $ax + b$ встречается бесконечно много простых чисел. В этой работе, с которой фактически начинается аналитическая теория чисел, он применил ряды вида $L(s,\chi)\sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}$, где $\chi(n)$ — некоторая числовая функция, получившие название *ряды Дирихле*; в дальнейшем он также активно использовал эти ряды. При этом основная трудность заключается в том, чтобы доказать, что $L(1,\chi) \neq 0$. Для этого Дирихле воспользовался тем, что $L(1,\chi)$ является множителем в выражении числа классов бинарных форм с заданным дискриминантом, а число таких классов конечно и не равно нулю. В 1840 году Дирихле распространил теорему об арифметической прогрессии на квадратичные формы: любая квадратичная форма, три коэффициента которой не имеют общего делителя, представляет бесконечно много простых чисел. В 1841 году он перенёс её на целые комплексные числа.

Приложения в теории чисел анализа (Эйлер) и эллиптических функций (Якоби) не были систематическими, они получались как побочный продукт. Первое систематическое использование анализа в теории чисел — теорема Дирихле об простых числах в арифметической прогрессии. Доказательство Дирихле обощало доказательство Эйлера бесконечности числа простых чисел в последовательности 1, 2, 3, ...

В 1838 году Дирихле нашёл различные выражения для числа классов форм с заданным положительным дискриминантом. Затем в работе «Исследования о различных приложениях анализа бесконечно малых к теории чисел» (1839) нашёл число классов форм с заданным отрицательным дискриминантом. (Эту задачу решил до него Гаусс, не опубликовавший свои результаты.) Доказательство основано на применении рядов Дирихле.

В 1838 году Дирихле ввёл понятие асимптотического закона (асимтотического приближения) и установил несколько асимптотических законов для теоретико-числовых функций.

В 1839 году разработал методы вычисления кратных интегралов и применил их к задаче о гравитационном притяжении эллипсоида для точек как внутри, так и вне его. Занимаясь задачей Лапласа о доказательстве устойчивости солнечной системы, предложил способ, позволяющий избежать рядов, в которых отбрасываются квадратичные члены и члены более высокой степени. Это привело его к задаче Дирихле для гармонических функций с заданными граничными условиями.

Начиная с 1840 года Дирихле разрабатывал теорию алгебраических чисел высших степеней. В мемуаре «К теории комплексных единиц» (1846) он описал структуру группы единиц в кольцах целых алгебраических чисел. Эта структура следующая. Пусть поле порождено числом θ, и среди n чисел, с ним сопряжённых, есть r_1 вещественных чисел и $2r_2$ невещественных. Тогда группа единиц обладает базисом, который содержит r_1+r_2-1 элементов бесконечного порядка, а остальные базисные элементы — корни из единицы. В этих исследованиях

Дирихле применил способ доказательства утверждений о существовании без прямого построения требуемых величин и без указания метода построения. Этот способ впоследствии получил название *принцип Дирихле* (в теории дифференциальных уравнений с частными производными есть другой принцип Дирихле). Такой способ доказательства использовали и до Дирихле. Например, у Гаусса принцип Дирихле используется в пункте 45 «Арифметических исследований» при доказательстве того, что в каждой геометрической прогрессии 1, a, a^2, a^3, $\ldots$ есть член, отличный от 1, сравнимый с 1 по модулю p, взаимно простому с a.

В 1850 году опубликовал статью «О приведении положительных квадратичных форм с тремя неопределёнными целыми числами», в которой введена *область Дирихле* точки целочисленной решётки на плоскости. Это была фактически первая содержательная работа по геометрии чисел.

В 1852 году первым проинтегрировал уравнения гидродинамики, занимаясь задачей о движении сферы в несжимаемой жидкости.

«Лекции по теории чисел» Дирихле издал Дедекинд в 1863 году, уже после его смерти, со своими добавлениями. В этой книге Дирихле упростил многое из «Арифметических исследований» Гаусса. Он упростил доказательства квадратичного закона взаимности, упростил классификацию квадратичных форм. Дирихле приводит и свои результаты, полученные аналитическими методами: вычисление числа классов форм с заданным ненулевым детерминантом и доказательство теоремы о простых числах в арифметической прогрессии. Дирихле также доказал следующую теорему об аппроксимации: для любого вещественного θ и любого натурального N существуют целые h и k $(0 < k \leq N)$, для которых $|k\theta - h| < \frac{1}{N}$.

В лекциях Дирихле по теории дифференциальных уравнений с частными производными, опубликованных в 1876 году, разработан так называемый *принцип Дирихле*, позволяющий сводить решение уравнения Лапласа в области G с заданными граничными условиями к нахождению минимума интеграла $\int \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dG$. После критики Вейерштрасса этому принципу перестали доверять, и лишь Гильберту удалось его строго обосновать.

Дирихле первым обратил внимание, что сходимость ряда может быть условной, и на примерах показал, что члены условно сходящегося ряда можно переставить так, что его сумма окажется равной любому наперёд заданному значению.

7.35. Уильям Роуэн Гамильтон (1805-1865)

Ирландский математик и астроном сэр Уильям Роуэн Гамильтон родился в 1805 году в Дублине. С трёх лет он воспитывался у своего дяди, священника, и к 13 годам изучил 13 языков, а в 16 лет он прочитал «Небесную механику» Лапласа и нашёл в ней ошибку. В 1823 году Гамильтон поступил в Тринити колледж в Дублине, по окончании которого ему предложили стать профессором астрономии в Дублинском университете и Королевским астрономом Ирландии. Большую известность Гамильтону принесло теоретическое предсказание двух ранее неизвестных явлений в оптике, вскоре после этого обнаруженных экспериментально. В 1837 году он стал президентом Ирландской академии.

В 1834 и 1835 годах Гамильтон опубликовал две работы по механике, в которых разработал так называемую гамильтонову механику. Он перешёл от скоростей $\dot{q}_\alpha$ к компонентам импульса p_α и в результате уравнения механики преобрели следующий вид: $\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$ и $\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$, где H — полная энергия. Эти уравнения получили название *уравнений Гамильтона* или *канонических уравнений*. Иногда их называют *уравнениями Гамильтона–Якоби* (работы Якоби относятся к 1842-1843 годам).

В 1837 году Гамильтон опубликовал работу, в которой комплексные числа вводились как пары действительных чисел, а операции задавались аксиоматически. Он подчёркивал, что сумма $a + bi$ вовсе не такая же, как 2+3, и что a нельзя сложить с bi; знак суммы здесь исторически случаен. В том же году Гаусс написал Вольфгангу Бойяи, что он ещё в 1831 году знал о таком представлении, но он ничего не опубликовал на эту тему. С интерпретацией комплексных чисел как пар вещественных познакомил математиков именно Гамильтон. Этому открытию поначалу не придали большого значения. Всех математиков, кроме Гаусса, Яноша Бойяи и Лобачевского, геометрическая интерпретация комплексных чисел вполне устраивала. И лишь после того как неевклидова геометрия стала достаточно широко известна, математики заинтересовались интерпретацией комплексных чисел как пар вещественных чисел.

Гамильтон вскоре осознал возможности, которые давало его открытие. В 1841 году он пришёл к рассмотрению наборов $(a_1, \ldots, a_n)$, где a_i — вещественные числа. Именно на этой идее основан наиболее общепринятый подход к понятию многомерного пространства.

С особым увлечением Гамильтон занимался тройками действительных чисел; ему хотелось получить трёхмерный аналог комплексных чисел. Его возбужденное состояние передалось его детям. Вспоминая об этом, в 1865 году Гамильтон писал своему сыну Арчибальду, что когда он спускался к завтраку, они кричали:

— Ну, папа, ты научился перемножать тройки?

На что он принужден был отвечать, грустно качая головой:

— Нет, я умею только складывать и вычитать их.

Гамильтон, конечно, имел в виду умножение, обладающее свойством $\|ab\| = \|a\| \cdot \|b\|$ (или, по крайней мере, умножение без делителей нуля).

Эти напряженные занятия привели к тому, что 16 октября 1843 года, во время прогулки, Гамильтон почти воочию увидел символы i, j, k и соотношения $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, определяющие искомое умножение, но в четырёхмерном, а не в трёхмерном пространстве. Последние 25 лет своей жизни Гамильтон занимался почти исключительно кватернионами и их применениями в геометрии, механике, астрономии. Он забросил свои блестящие исследования по физике и изучал, например, возведение кватернионов в кватернионную степень. О кватернионах он напечатал книги «Лекции о кватернионах» (1853) и «Начала теории кватернионов» (1866; не только название, но и структура книга похожи на Евклидовы «Начала») и более 100 статей. Занимаясь кватернионами, Гамильтон дал определение скалярного и векторного произведения векторов в трёхмерном пространстве.

Гамильтон доказал, что умножение кватернионов ассоциативно (именно он ввёл этот термин); он же первым отметил, что умножение чисел Кэли (октав) неассоциативно.

Гамильтон ввёл важный дифференциальный оператор

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}.$$

Назвал он его «набла», потому что символ ∇ похож на древнееврейский музыкальный инструмент с таким названием. ∇f — это градиент функции f. Для векторной функции ∇u скалярная составляющая — это дивергенция (со знаком минус), а векторная составляющая — ротор.

Теорема Гамильтона–Кэли впервые доказана Гамильтоном для кватеринонов. Для матриц порядка 2 и 3 сформулирована и доказана Кэли.

В 1843 году ввёл термины *вектор* (от латинского vector — «переноситель») и *ассоциативный* (сочетательный).

В 1855 году обнаружил обход додекаэдра, проходящий ровно один раз через каждую вершину. В связи с этим граф называют *гамильтоновым*, если существует обход, проходящий ровно один раз через каждую вершину (а *эйлеров* граф — это граф, для которого существует обход, проходящий ровно один раз через каждое ребро). За несколько месяцев до Гамильтона задачу описания всех многогранников, допускающих такие обходы, поставил Киркман.

7.36. Джон Гревс (1806-1870)

В 1844 году в письме Гамильтону Гревс описал 8-мерную алгебру, элементы которой он называл *октавами*. Гамильтон отметил внимание, что эта алгебра не ассоциативна. В 1845 году краткое описание этой алгебры опубликовал Кэли, и с тех пор элементы этой алгебра называются *числами Кэли*.

В работе «Об алгебраических триплетах» (1847) Гревс рассмотрел «триплеты» вида $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2$, где $\varepsilon^3 = 1$. Он привёл геометрическую интерпретацию умножения триплетов и показал, что эта алгебра — прямая сумма алгебр $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Описал делители нуля в этой алгебре.

7.37. Огастес де Морган (1806-1871)

В 1838 году в одной из статей де Морган ввёл термин *математическая индукция* и определил этот метод, ранее употреблявшийся без чёткого обоснования.

В «Формальной логике или исчислении необходимых и вероятных заключений» (1847) де Морган исходил из того, что логика должна служить точному выражению мыслей и устранять неясности и двусмысленности, присущие обыденной речи. Для устранения неопределённости в логике, связанной с отрицанием, де Морган вводит понятие «целого» или «универсума», выбираемого в зависимости от предмета исследования.

Законы Моргана — это логические правила, которые выражают конъюнкцию через дизъюнкцию и наоборот посредством отрицания:

Не (A и B) = (Не A) или (Не B).

Не (A или B) = (Не A) и (Не B).

Де Морган ввёл общее понятие отношения и операций над отношениями.

7.38. Фердинанд Готлибович Миндинг (1806-1885)

Российский математик немецкого происхождения, с 1844 года профессор Дерптского университета.

В 1830 году Миндинг доказал, что величина $\frac{1}{\rho} = \frac{\cos\varphi}{R}$, где $\frac{1}{R}$ — кривизна, а φ — угол, образованный соприкасающейся с кривой плоскостью и касательной плоскостью к поверхности, относится к внутренней геометрии поверхности. Позднее эту величину Бонне назвал *геодезической кривизной* (1848).

В 1838 году Миндинг указал наложение катеноида на прямой геликоид, а в 1839 году почти полностью описал условия, при которых одну поверхность можно получить изгибанием из другой поверхности; он упустил лишь возможность особого решения уравнения в полных дифференциалах. Условия наложимости Миндинг получил, последовательно вводя величины, названные впоследствии *дифференциальными инвариантами Бельтрами* (Бельтрами применял их в своих работах 25 лет спустя). Миндинг доказал, в частности, что для двух поверхностей постоянной кривизны условие равенства их гауссовых кривизн является достаточным условием наложимости, причём наложение может осуществляться бесконечным числом способов, зависящим от трёх параметров. Миндинг нашёл уравнения поверхностей вращения постоянной кривизны. Он доказал, что поверхность, получаемая при вращении трактрисы вокруг её асимптоты, имеет постоянную кривизну. Впоследствии Бельтрами назвал эту поверхность *псевдосферой*.

В 1840 году Миндинг нашёл тригонометрические соотношения в треугольнике, образованном геодезическими на поверхности постоянной кривизны. Он обнаружил, что тригонометрия на псевдосфере получается из тригонометрии на сфере заменой обычных тригонометрических функций на гиперболические. Но Миндинг не обратил внимания, что это может иметь отношение к геометрии Лобачевского. Первым это заметил Бельтрами, что позволило ему построить в 1868 году первую модель геометрии Лобачевского на псевдосфере.

Миндинг привёл и другие примеры кривых, при вращении которых получаются поверхности постоянной отрицательной кривизны. Он показал, что по поверхности постоянной кривизны нарисованная на ней фигура может скользить, не меняя свою форму.

7.39. Томас Пенингтон Киркман (1806-1895)

В 1846 году Киркман решил (и опубликовал) комбинаторную задачу о тройках Штейнера, за 6 лет до того, как Штейнер её поставил. При решении этой задачи он построил конечные проективные плоскости.

В 1850 году опубликовал комбинаторную задачу о 15 школьницах: «15 школьниц прогуливаются по трое семь дней. Требуется упорядочить их так, чтобы никакие две не гуляли вместе более одного раза.»

В 1855 году на несколько месяцев раньше Гамильтона поставил задачу: для каких многогранников существует цикл, проходящий через каждую вершину ровно один раз (гамильтоновы графы).

В 1884 году написал статью об узлах. Затем вместе с Тейтом составил таблицу узлов с 8, 9 и 10 перекрёстками.

7.40. Иоганн Бенедикт Листинг (1808-1882)

В книге Листинга «Предварительные исследования по топологии» (1847) впервые был опубликован термин *топология* (в его переписке этот термин впервые встречается в 1836 году). В предисловии к этой книге Листинг писал: «Под топологией будем понимать учение о модальных отношениях пространственных образов или о законах связности, взаимного положения и следования точек, линий, поверхностей, тел или их совокупности в пространстве, независимо от отношения мер и величин.» В этой книге Листинг рассматривает некоторые примеры узлов, первым введя это понятие в научную литературу.

В 1858 году (раньше Мёбиуса) Листинг открыл *лист Мёбиуса* и опубликовал его описание в работе, посвящённой обобщению теоремы Эйлера о многогранниках (1862). В этой работе он рассматривал невыпуклые многогранники, поверхность которых не гомеоморфна сфере.

7.41. Герман Грассман (1809-1877)

Грассман до конца своей жизни оставался учителем гимназии в своём родном городе Штеттине. Несколько раз он пытался получить университетскую должность, но безуспешно. Гамильтон, прочитав книгу Грассмана, назвал его величайшим немецким гением. По поводу той же книги через 30 лет после её публикации издатель писал Грассману: «Вашей книги в продаже больше нет. Так как её почти никто не покупал, то 600 экземпляров были использованы в качестве макулатуры, а оставшиеся несколько экземпляров распроданы все, кроме одного, который остаётся в нашей библиотеке». Следующая книга Грассмана, как считал он сам, пользовалась ещё меньшим успехом. Идеи Грассмана получили распространение лишь к концу его жизни. Сам он в это время уже потерял контакты с математиками и утратил интерес к геометрии. Последние годы жизни Грассман занимался преимущественно санскритом. Он сделал перевод «Ригведы» (более 1000 страниц) и составил к ней словарь (около 2000 страниц). За эти труды Американское общество востоковедов избрало его своим членом. В современных исследованиях «Ригведы» их часто цитируют. В 40-е годы 19 века математики оказались неподготовленными к восприятию идей Грассмана. Свою первую книгу он послал Гауссу и получил в ответ записку, в которой Гаусс благодарил его и писал, что подобными вещами он занимался полвека тому назад и кое-что недавно опубликовал на эту тему. Мёбиус, в ответ на просьбу Грассмана написать рецензию на его книгу, сообщил ему, что не понимает философской части книги и поэтому не может прочитать её до конца. Впоследствии Мёбиус говорил, что он знает лишь одного математика, который прочитал книгу Грассмана до конца, — это Бретшнейдер. Получив премию за развитие идей Лейбница, Грассман обратился к министру культуры с просьбой предоставить ему университетскую должность, и его работы послали на рецензию Куммеру. В рецензии было сказано, что в них недостаёт ясности. На просьбу Грассмана ответили отказом. В 60-е и 70-е годы 19 века многие математики своими путями приходят к идеям, аналогичным идеям Грассмана. Его работы получают высокую оценку Кремоны, Ганкеля, Клебша и Клейна, но самого Грассмана математика уже больше не интересует.

В 1832 году Грассман фактически пришёл к векторной записи законов механики; это сильно упрощало многие расчёты. Он обратил внимание на коммутативность и ассоциативность сложения векторов и выделил эти свойства в явном виде. Впоследствии Грассман излагал свою теорию в весьма общем виде, для произвольных систем, обладающих определёнными свойствами. Это сильно затрудняло понимание его книг; почти никто кроме него ещё не осознавал значения коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности в алгебре.

Первое издание книги «Учение о протяжённости» вышло в 1844 году. В этой книге Грассман ввёл общее понятие n-мерного пространства со всеми его атрибутами: он дал определение подпространства и линейной зависимости векторов. Грассман определил геометрическое произведение двух векторов как параллелограмм, натянутый на эти векторы. Равновеликие и одинаково ориентированные параллелограммы, параллельные одной плоскости, он считал эквивалентными.

Грассман рассматривал n-компонентные гиперчисла, ввёл для них внутреннее произведение (то же самое, что скалярное произведение векторов) и внешнее произведение (умножение в алгебре Грассмана). Подход Грассмана впоследствии привёл, в частности, к теории тензоров.

До середины 19 века математики почти не занимались вопросом логического обоснования теории целых чисел; законы сложения и умножения многими считались очевидными и не требующими обоснования и аксиоматизации. Первые серъёзные шаги в этом направлении сделал, по-видимому, Грассман. В 1861 году он, развивая идеи Лейбница (который первым поставил задачу дедуктивного построения арифметики на основе аксиом), дал определение сложения и умножения целых чисел и доказал их основные свойства (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность) посредством только одной операции $x \to x + 1$ и принципа полной математической индукции. К двум аксиомам Лейбница он добавил ещё две аксиомы, определяющие умножение: $m \cdot 1 = m$ и $m(n + 1) = mn + m$.

В 1862 году вышло второе издание книги «Учение о протяжённости». В этой книге содержится построение алгебры Грассмана. Он определил расстояние от точки с координатами $(x_1, \dots, x_n)$ до начала координат формулой $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, а угол между отрезками, соединяющими начало координат с точками $(x_1, \dots, x_n)$ и $(y_1, \dots, y_n)$, он определил формулой

$$\arccos \frac{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}}.$$

В качестве аналога вращений вокруг начала координат Грассман рассмотрел линейные преобразования с определителем 1, сохраняющие квадратичную форму $x_1^2 + \dots + x_n^2$. По аналогии с произведением двух векторов он ввёл геометрическое произведение r векторов в n-мерном пространстве. Это произведение он рассматривал как геометрический объект, координатами которого являются миноры порядка r матрицы размера $r \times n$, составленной из координат данных векторов.

Во втором издании «Учения о протяжённости» впервые дано исчерпывающее перечисление случаев, которые могут встретиться при рассмотрении задачи Пфаффа (1814) о том, как может быть упрощено выражение $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n$.

7.42. Бенджамен Пирс (1809-1880)

Американский алгебраист Пирс в 1870 году в работе «Линейная ассоциативная алгебра» получил классификацию алгебр размерности не выше 5. Появление этой работы связано с его интересом к кватернионам. При этом он дал общее определение конечномерной ассоциативной алгебры, ввёл понятия нильпотентных элементов и идемпотентных элементов.

7.43. Жозеф Лиувилль(1809-1882)

С 1829 по 1837 год Лиувилль разрабатывал так называемую теорию Штурма–Лиувилля. Штурм и Лиувилль исследовали общее линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Штурм изучил свойства его собственных значений и собственных функций, а Лиувилль изучил разложение произвольной функции в ряд по собственным функциям. Основные результаты Лиувилля опубликованы в 1836 и 1837 году.

В 1832-33 годы Лиувиль нашёл критерий, когда интеграл $\int y\,dx$ от алгебраической функции может быть выражен в конечном виде через элементарные функции. Он доказал, что в таком случае этот интеграл имеет следующий вид:

$$\int y\,dx = t + A\ln u + B\ln v + \cdots + K\ln w,$$

где $t, u, v, \ldots, w$ — алгебраические функции от x, а $A, B, \ldots, K$ — постоянные. В 1841 Лиувилль нашёл условия разрешимости в квадратурах уравнения Риккати.

В 1836 году Лиувилль начал издание одного из ведущих математических журналов Journal de mathématiques pures et appliquées. Этот журнал часто называли журналом Лиувилля.

В 1838 году доказал, что функциональный определитель любого канонического преобразования (т.е. преобразования, переводящего уравнения Гамильтона в уравнения такого же вида) равен ± 1. Другими словами, гамильтонова динамика сохраняет объём.

В 1840 году доказал, что число e не может быть корнем квадратного или биквадратного уравнения с целыми коэффициентами.

В 1842 году Лиувилль начал читать неопубликованные записки Галуа. В 1843 году он сообщил Парижской Академии, что обнаружил очень важные результаты в работах Галуа, и пообещал опубликовать их со своими комментариями. В 1846 году впервые опубликовал в своём журнале работы Галуа, остававшиеся в безвестности до того, как Лиувилль понял их значение. Но свои комментарии, заполнявшие пробелы в доказательствах Галуа, он так и не опубликовал.

В 1844 году Лиувилль опубликовал первый пример трансцендентного числа с доказательством его трансцендентности. При этом он построил бесконечное множество трансцендентных чисел. Более подробная статья о трансцендентных числах опубликована в 1851 году. Признак трансцендентности числа, установленный Лиувиллем, основан на том, что алгебраические числа не допускают слишком хороших приближений рациональными числами. Точнее говоря, если α — корень неприводимого уравнения степени n, а p и q — взаимно простые числа, то $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Aq^n}$, где число A не зависит от q. С помощью этого признака Лиувилль показал, что для любого натурального l число $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l^{n!}}$ трансцендентно.

В 1844 году распростанил термин *геодезическая* на любые поверхности (до этого Лаплас применял его к земной поверхности, а ещё его применяли к поверхностям второго порядка).

В 1844 году доказал, что голоморфная двоякопериодическая ограниченная функция постоянна. В том же 1844 году Коши обобщил эту теорему и доказал, что голоморфная ограниченная на всей плоскости функция постоянна. (Коши представил свою теорему на следующем же заседании Парижской академии после того, на котором Лиувилль представил свою.) Обычно именно теорему, доказанную Коши, называют *теоремой Лиувилля*. Лиувилль широко использовал свою теорему на лекциях по теории эллиптических функций (1847).

В 1847 году прочитал лекции по теории двоякопериодических функций всего для двух слушателей (Борхардта и Иоахимсталя). Подробная программа этих лекций была опубликована в 1851 году в Comptes rendus, поэтому его трактовка не осталась незамеченной современниками. Это был новый подход: объектом изучения стал весь класс двоякопериодических мероморфных функций. Именно эти функции получили название эллиптических (обращениями эллиптических интегралов являются лишь эллиптические функции второго порядка, т.е. имеющие в параллелограмме периодов два простых полюса или полюс второго порядка).

В 1850 году Лиувилль доказал, что конформные преобразования пространства переводят сферы в сферы, и доказал теорему о строении конформных преобразований в пространстве: они представляются в виде композиции движения, подобия и инверсий. Это существенно более жёсткие условия, чем для конформных преобразований плоскости.

В 1857-1860 годы установил много теоретико-числовых тождеств.

Лиувилль выделил класс поверхностей (*поверхности Лиувилля*), для которых элемент длины можно привести к виду $ds^2 = (\varphi(u) + \psi(v))(du^2 + dv^2)$. К таким поверхностям относятся поверхности вращения и поверхности второго порядка. На поверхностях Лиувилля геодезические можно найти в квадратурах.

7.44. Эрнст Эдуард Куммер (1810-1893)

Одними из первых работ Куммера были исследования гипергеометрических рядов, которые привели его к важным результатам в теории дифференциальных уравнений. В 1836 году Куммер показал, что каждому решению $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ гипергеометрического уравнения можно сопоставить 24 функции, которые также являются решениями (исходная функция входит в число этих 24 функций). Например, одна из таких функций имеет вид

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x).$$

Куммер ввёл идеальные числа при доказательстве великой теоремы Ферма, которой он начал заниматься с 1837 года. В 1843 году он был уверен, что получил доказательство гипотезы Ферма о неразрешимости в натуральных числах уравнения $x^p + y^p = z^p$, основанное на свойствах чисел вида $a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{p-1}\alpha^{p-1}$, где $a_0, \ldots, a_{n-1}$ — рациональные числа, α — примитивный корень степени p из единицы. Но Дирихле указал, что это доказательство основано на ошибочном предположении, что для кольца $\mathbb{Z}[\alpha]$ имеет место единственность разложения на простые множители. В действительности же это верно лишь для некоторых p, а в общем случае произведение двух чисел может делиться на простое число, хотя ни одно из них на него не делится. Это обстоятельство делало сомнительной возможность построения арифметики кольца $\mathbb{Z}[\alpha]$. Куммеру удалось частично спасти положение, введя новые объекты, которые он назвал идеальными простыми множителями; эти идеальные множители Куммера впоследствии привели к понятию *идеала* в кольце. Статьи Куммера на эту тему опубликованы в 1847 году.

В 1860 году Куммер разработал общую теорию прямолинейных конргуэнций.

В 1864 году при исследовании общих систем лучей построил некоторую специальную поверхность четвёртой степени, получившую название поверхность Куммера.

7.45. Эварист Галуа (1811-1832)

Галуа дважды провалился на экзамене по математике в Политехническую школу. Представленная им в 1829 году Парижской академии работа по теории алгебраических уравнений была направлена на рецензирование Коши, и он её потерял. В 1829 году опубликована статья Галуа о непрерывных дробях. Осенью 1829 года Галуа поступил в Нормальную школу, которая в то время была учебным заведением более низкого уровня, чем Политехническая. Его работа по теории алгебраических уравнений, представленная на конкурс Парижской академии в 1830 году, снова была потеряна. В конце того же года Галуа исключили из школы за республиканские выступления. В июне 1831 года его судили за дерзкие высказывания в адрес короля Луи-Филиппа, но оправдали, учтя юный возраст. Через месяц его снова арестовали как одного из вожаков манифестации молодёжи. В конце 1831 года Галуа приговорили к шести месяцам тюрьмы. Вскоре после выхода из тюрьмы Галуа был убит на дуэли. В ночь перед дуэлью Галуа переработал рукопись, которую он ещё раз готовил для Академии, и переслал её своему другу О.Шевалье. Эту основную работу Галуа опубликовал Лиувилль в 1846 году.

В статье о непрерывных дробях, опубликованной в 1829 году, Галуа получил критерий чистой периодичности непрерывной дроби, представляющей квадратичную иррациональность.

В статье «Из теории чисел» (1830) Галуа рассматривает полиномиальные сравнения $F(x) \equiv 0 \pmod p$, не имеющие целых корней. Он пишет, что корни этого сравнения нужно рассматривать как воображаемые символы, и роль этих символов часто бывает столь же полезной, как роль воображаемого $\sqrt{-1}$ в обычном анализе. Галуа по сути дела рассматривает конструкцию присоединения к полю корня неприводимого уравнения, причём явно выделяет требование неприводимости, и доказывает несколько теорем о конечных полях.

Основная работа Галуа — «Мемуар об условиях разрешимости уравнений в радикалах». Сначала он определяет область рациональности и указывает, что можно изменять область рациональности, присоединяя новые числа. Для определения группы Галуа уравнения он доказывает теорему о примитивном элементе: для неприводимого уравнения можно выбрать рациональное выражение V от корней уравнения так, что все корни рационально выражаются через V. После этого Галуа замечает, что любое уравнение зависит от такого вспомогательного уравнения, и что все корни этого нового уравнения являются рациональными функциями друг друга. Сейчас такие уравнения называют нормальными. Затем Галуа доказывает, что если V является корнем неприводимого уравнения и V' — тоже корень этого уравнения, то уравнение, имеющее корень $f(V)$, имеет также корень $f(V')$. Эта лемма является основой для определения группы Галуа. Для любого уравнения существует группа перестановок его корней (*группа Галуа*), обладающая следующими свойствами: 1) любая функция корней, инвариантная относительно перестановок этой группы, принадлежит области рациональности; 2) любая рациональная функция от корней инвариантна относительно этих перестановок. Затем Галуа рассматривает разложение группы на правые и левые смежные классы по подгруппе и приводит условие разрешимости уравнения в радикалах. После этого он приводит две формы критерия разрешимости уравнения простой степени: 1) неприводимое уравнение простой степени разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда все функции, инвариантные относительно перестановок, рационально известны; 2) неприводимое уравнение простой степени разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда при знании двух каких-нибудь его корней все остальные выводятся из них рационально. В этом же письме сформулированы глубокие результаты из теории абелевых и модулярных функций. Основная модулярная функция $j(w)$ — это отношение двух периодов эллиптического интеграла

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

рассматриваемая как функция модуля $w = k^2$. Модулярные функции — это мероморфные функции в верхней полуплоскости, инвариантные относительно модулярной группы, т.е. группы преобразований $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, где числа a, b, c, d целые и $ad - bc = 1$. Поэтому модулярные функции относятся к автоморфным функциям; модулярная функция — простейший пример автоморфной функции. Любая модулярная функция алгебраически выражается через основную модулярную функцию $j(\omega)$. Модулярное уравнение — это полиномиальное соотношение, связывающее $j(\omega)$ и $j(n\omega)$. Галуа получил некоторые результаты о структуре группы Галуа модулярного уравнения.

Когда Галуа начал строить общую теорию полей, он заметил, что доказательство Гаусса существования первообразного корня буквально переносится на любое конечное поле и позволяет доказать, что мультипликативная группа конечного поля циклическая.

Работы Галуа показали, что решение старого важного вопроса о разрешимости уравнения в радикалах сводится к исследованию нового объекта — группы. Галуа умело пользовался такими сложными понятиями, как простая группа, нормальная подгруппа, разрешимая группа. Он сформулировал следующие утверждения:

1) минимальная простая группа — это группа A_5 порядка 60;

2) группа дробно-линейных преобразований с коэффициентами в поле вычетов по модулю p неразрешима при $p > 3$;

3) эта группа не имеет подгрупп индекса p при $p > 11$;

4) неприводимое уравнение простой степени разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда его группа метациклическая.

7.46. Отто Гессе (1811-1874)

В 1842 году при изучении кривых третьей и четвёртой степени ввёл *гессиан*. Гессиан функции f — это определитель $H(f) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$.

Гессе сделал доказательство формул Плюккера более понятным, переписав его в однородных координатах и применив для этого гессиан, который нужен для поиска точек перегиба. Для кривой $f = 0$ степени n гессиан кривой задаётся уравнением $H(f) = 0$; он имеет степень $3(n-2)$. Точки перегиба кривой — это точки пересечения кривой и её гессиана. Всего получаем $3n(n-2)$ точек перегиба на кривой без особых точек. (Гессиан проходит через все особые точки кривой.)

В 1848 году Гессе доказал, что каждая гладкая кривая степени 4 имеет 28 двойных касательных. (Такое предположение высказал Плюккер, но без достаточного обоснования.)

Гессе показал, что для любой формы её гессиан является инвариантом относительно группы линейных преобразований, определитель которых равен 1.

7.47. Пьер Альфонс Лоран (1813-1854)

В 1843 году Лоран обобщил теорему Коши о разложении функции в степенной ряд: он доказал, что функция $f(z)$, не имеющая особых точек внутри кольца $a < |z| < b$, разлагается в ряд по положительным и отрицательным степеням z. (Эта теорема была получена Вейерштрассом ещё в 1841 году, но он до 1894 года не публиковал свои работы начала 40-х годов.)

Коши дважды предлагал Академии опубликовать работу Лорана, и Академия дважды отвергла эту работу. В результате она была утеряна и известна только из сообщения Коши.

7.48. Пьер Лоран Ванцель (1814-1848)

В 1837 году Ванцель доказал, что задачи удвоения куба и трисекции угла неразрешимы с помощью циркуля и линейки. Вопрос о разрешимости задачи квадратуры круга оставался открытым до 1882 года, когда Линдеманн, усовершенствовав метод Эрмита, которым он доказывал трансцендентность числа e, доказал трансцендентность числа π.

7.49. Эжен Шарль Каталан (1814-1894)

В 1838 году бельгийский математик Каталан ввёл *числа Каталана* как количество способов разделить многоугольник на треугольники непересекающимися диагоналями. Точно так же, как и Эйлер задолго до него.

В 1842 году Каталан доказал, что единственной линейчатой минимальной поверхностью, отличной от плоскости, является геликоид (винтовая поверхность).

В 1844 году сформулировал следующую гипотезу (гипотеза Каталана): уравнение $x^m - y^n = 1$ имеет единственное решение в натуральных числах; другими словами, 8 и 9 — единственные последовательные степени. Гипотеза доказана в 2003 году.

В 1855 году исследовал так называемую *минимальную поверхность Каталана*, которая содержит циклоиду в качестве геодезической.

7.50. Людвиг Шлефли (1814-1895)

В 1851 году Шлефли закончил обширное исследование о многомерных пространствах (многообразиях), которое публиковалось сначала лишь частично, а полностью не было опубликовано до 1901 года. В этой работе Шлефли определил многомерные многогранники, доказал обобщённую теорему Эйлера. Он также исследовал правильные многогранники и доказал, что в размерности 4 есть ровно 6 типов правильных многогранников, а при $n \geq 5$ в n-мерном пространстве есть только три типа правильных многогранников. Для исследования правильных многогранников он ввёл символ Шлефли.

Шлефли также определил n-мерную сферу и вычислил её объём. Он предложил рассматривать сферическое трёхмерное пространство как сферу в 4-мерном пространстве. Шлефли знал, как найти объём тетраэдра не только в сферической, но и в гиперболической геометрии. Когда он занимался этим в 1852 году, он не знал о соответствующих результатах Лобачевского об объёме тетраэдра в гиперболической геометрии.

В 1858 году Шлефли доказал, что 27 комплексных прямых на кубической поверхности составляют 45 компланарных троек и 36 так называемых двойных шестёрок. Рассмотрел кубические проверхности в вещественном пространстве с точки зрения того, какие из плоскостей, в которых лежат компланарные тройки, составленные из 27 комплексных прямых на кубической поверхности, будут вещественными и мнимыми. Выделил при этом 5 классов вещественных кубических поверхностей.

Шлефли получил интегральное представление функций Бесселя и гамма-функции.

В 1870 году при исследовании эллиптических модулярных функций ввёл модулярное уравнение Шлефли.

Среди неопубликованных результатов Шлефли — описание фундаментальной области модулярной группы в 1867 году, за 10 лет до Дирихле, и f-функций (инвариантов классов) за 20 лет до Генриха Вебера.

7.51. Джеймс Джозеф Сильвестр (1814-1897)

Сильвестр родился в Лондоне, в 1841 году он переехал в Америку, а в 1883 году вернулся в Англию. В 1878 году основал American Journal of Mathematics, первый математический журнал в США.

В 1840 году представил результант двух многочленов степени m и n в виде определителя матрицы порядка $n + m$ (матрица Сильвестра).

В 1850 году ввёл понятие и термин *минор* и ввёл термин *матрица*. В 1851 году доказал теорему об определителе матрицы, составленной из миноров (тождество Сильвестра).

В 1851 году открыл дискриминант кубического уравнения и первым использовал термин *дискриминант* для такого же рода выражений для уравнения четвёртой степени и более высоких степеней. Дискриминант Сильвестр связал с кратными корнями многочлена и предложил использовать для определителя матрицы термин *детерминант* вместо термина дискриминант, использовавшегося по традиции, восходящей к Гауссу (Гаусс использовал этот термин для квадратичных форм от двух переменных).

В 1852 году доказал, что квадратичная форма ортогональной заменой координат приводится к диагональному виду (сумме квадратов с положительными или отрицательными коэффициентами). В этой же работе доказан *закон инерции* квадратичных форм (число положительных коэффициентов квадратичной формы, приведённой к диагональному виду, не зависит от замены координат, приводящей форму к диагональному виду). Сильвестр доказал также, что квадратичная форма положительно определённая (т.е. приводится к сумме квадратов с положительными коэффициентами) тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы этой квадратичной формы положительны (критерий Сильвестра).

Сильвестр внёс существенный вклад в разработку теории элементарных делителей λ-матриц.

В 1853 году Сильвестр, развивая метод Штурма для оценки количества корней многочлена в данном интервале, указал матрицу, сигнатура которой равна количеству вещественных корней многочлена.

В 1881 году Сильвестр уточнил оценку Чебышева для числа простых чисел: вместо оценки $0,922 < \frac{\pi(x)}{x \ln x} < 1,105$ он получил оценку $0,95695 < \frac{\pi(x)}{x \ln x} < 1,04423$.

В 1893 году Сильвестр предложил доказать, что если на плоскости отмечено конечное число точек, не лежащих на одной прямой, то найдётся прямая, проходящая ровно через две отмеченные точки (другими словами, если на любой прямой, проходящей через две отмеченные точки, лежит ещё одна отмеченная точка, то все отмеченные точки лежат на одной прямой). Это утверждение было доказано лишь в 1940-е годы. По-видимому, Сильвестр исходил из конфигурации точек перегиба кубической кривой на плоскости с комплексными координатами. Эти девять точек как раз образуют такую конфигурацию: они не лежат на одной прямой, но на любой прямой, проходящей через две точки, лежит ещё одна из этих точек. Сильвестр фактически предложил доказать, что в такого рода конфигурациях координаты всех точек не могут быть вещественными.

При изучении разбиений чисел Сильвёстр ввёл термин *граф*; он также ввёл все основные термины теории инвариантов: *инвариант*, *ковариант*, *дискриминант*.

7.52. Джордж Буль (1815-1864)

В 1844 году Буль опубликовал статью, в которой изучал действия с некоммутирующими операторами с целью создания общих методов интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Это была первая попытка систематического анализа линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами операторными методами.

В 1854 году опубликовал книгу «Исследование законов мышления, на которых основана математическая теория логики и вероятности». Буль внёс ясное осознание абстрактности исчисления и того, что исчисление определяется теми законами, которым подчинены операции. Буль сопоставил логическим символам количественные символы, принимающие значения 0 и 1. Он указал на аналогию между алгебраическими символами и теми, которые представляют логические формы. Это положило начало алгебре логики, получившей название алгебра Буля.

7.53. Карл Вейерштрасс (1815-1897)

Долгое время Вейерштрасс работал учителем в гимназии. В 1854 и 1856 годах он опубликовал две статьи об абелевых функциях и об обращении гиперэллиптических функций, которые привлекли большое внимание, после чего его пригласили в Берлин.

Вейерштрасс дал современное определение непрерывности функции, предела, сходимости ряда, равномерной сходимости.

В 1841 году доказал теорему о разложении функции в ряд Лорана, но своевременно не опубликовал её. (Лоран представил свою работу в 1843 году.) В неопубликованной работе 1842 года предложил идею аналитического продолжения степеннных рядов, впоследствии игравшую важную роль в его построении теории аналитических функций. (Независимо от Вейерштрасса к этой идее пришёл Пюизё, опубликовавший способ аналитического продолжения рядов в 1850 году.) В 1842 году независимо от Коши доказал методом мажорант существование аналитического решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того (этого нет у Коши), применил идею аналитического продолжения функции для представления решения дифференциального уравнения вне области сходимости ряда, первоначально задававшего решение. Эти исследования были опубликованы лишь в 1894 году.

Теорема Вейерштрасса о разложении целой функции в произведение доказана им в 1840-е годы, но опубликована лишь в 1876 году. Он доказал, что $G(z) = \prod \left(1 - \frac{z}{\alpha_i}\right) e^{\Gamma_i(z)}$, где экспоненциальный множитель вводится для обеспечения сходимости. Эту теорему Вейерштрасс использовал для построения функции $\sigma(z)$ в теории эллиптических функций. В той же статье 1876 года доказано, что мероморфная функция — отношение двух целых функций. В 1877 году Миттаг–Лефлёр обобщил эту теорему: функция, мероморфная в некоторой области, является отношением двух функций, голоморфных в этой области. Вейерштрасс доказал, что целая функция, отличная от константы, в окрестности точки $z = \infty$ бесконечно много раз сколь угодно близко подходит к любому заданному значению; эту теорему дополнил Пикар.

Понятием равномерной сходимости владел Вейерштрасс к 1842 году. Он очень осторожно обращался с бесконечными рядами и понятие равномерной сходимости играло у него важную роль; на нём основывались многие из его доказательств.

Вейерштрасс определяет аналитическую функцию как множество степенных рядов, которые получаются из одного степенного ряда посредством аналитического продолжения вдоль различных кривых. Вейерштрасс строил теорию комплексных функций на основе разложений в ряды и аналитического продолжения.

Вейерштрасс оспаривал правомерность применения вариационного принципа Дирихле. Он отмечал, что если мы ищем минимум функционала, определённого на дифференцируемых функциях, то найденная функция может не быть дифференцируемой. Это ставило под сомнение доказательство Римана существования функций на римановых поверхностях.

В 1861 году Вейерштрасс разработал в своих лекциях общую теорию алгебр, но опубликовал свои исследования лишь в 1884 году. Он доказал, что любая коммутативная алгебра без нильпотентных элементов является прямой суммой нескольких полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

В 1863 году доказал, что комплексные числа — единственное коммутативное расширение вещественных чисел.

В 1868 году Вейерштрасс дал необходимое и достаточное условие подобия матриц, используя понятие элементарных делителей.

В 1872 году построил пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции (до Вейерштрасса пример такой функции построил Больцано, но не опубликовал его).

В 1879 году получил одно из необходимых условий существования экстремума функционала, основанное на *функции Вейерштрасса*, сопоставляемой функционалу.

В 1880 году ввёл понятие *существенно особой точки*.

Теорему о приближении многочленами, доказанную в 1885 году, Вейерштрасс сформулировал как теорему о представлении функции: непрерывную функцию на компакте не всегда можно представить степенным рядом, но всегда можно представить в виде предела равномерно сходящейся последовательности многочленов.

В 1885 году дал более простое доказательство теоремы Линдемана о трансцендентности числа π (1882). Отметил, что если ω — алгебраическое число, не равное нулю, то $\sin\omega$ — трансцендентное число.

Когда исследования Вейерштрасса по теории сходимости рядов распространились через его лекции, это оказало большой эффект на строгость. Это хорошо видно при сравнении первого издания «Курса анализа» Жордана со вторым и третьим. На других учебниках это тоже сказалось.

При исследовании эллиптических функций ввёл так называемую *функцию Вейерштрасса*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left(\frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right),$$

которая имеет периоды ω_1 и ω_2. В каждой точке $m\omega_1 + n\omega_2$ эта функция имеет полюс второго порядка, а в остальных точках аналитична.

Вейерштрасс доказал, что алгебраической теоремой сложения обладают только эллиптические функции и их вырождения, т.е. рациональные функции и рациональные функции от экспоненты (теорема Вейерштрасса).

7.54. Жан Фредерик Френе (1816-1900)

В 1847 году Френе вывел деривационные формулы для репера, связанного с кривой в пространстве; эти формулы включают кривизну и кручение кривой. Статья Френе «О кривых двоякой кривизны» опубликована в 1852 году (в то время кривыми двоякой кривизны называли кривые в пространстве). Одновременно и независимо эти формулы получил Серре. Часто их называют *формулами Френе*, но правильнее называть *формулами Серре–Френе* (такое название тоже достаточно распрстранено). Формулы Серре–Френе связывают направляющие косинусы касательной, главной нормали и бинормали к кривой и их производные по длине дуги кривой. Сейчас эти формулы обычно записывают не для направляющих косинусов, а для единичных векторов **t**, **n** и **b**, направленных по касательной, главной нормали и бинормали к кривой:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{t} + \varkappa\mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \varkappa\mathbf{n}.$$

Здесь k — кривизна кривой, а $\varkappa$ — кручение.

7.55. Шарль Брио (1817-1882)

Основные работы Брио выполнены совместно с Буке, с которым он подружился ещё в школе. В 1850-е годы они написали трактат по эллиптическим функциям. Они, в частности, доказали, что две эллиптические функции, имеющие одинаковые периоды, связаны полиномиальным соотношением.

Брио и Буке исследовали дифференциальные уравнения первого порядка, имеющие неподвижную особую точку в начале координат. Они исследовали также типичные формы дифференциального уравнения первого порядка. С этими исследованиями связано так называемое *уравнение Брио–Буке* $x^m y' = f(x,y)$, где m — натуральное число.

7.56. Зигфрид Генрих Аронгольд (1819-1884)

В 1849 году Аронгольд начал исследования по теории инвариантов. Он внёс значительный вклад в изучение инвариантов тернарных кубических форм.

Специальные дифференциальные уравнения в частных производных с линейными коэффициентами, к которым он пришёл во время этих исследований (1851), получили его имя. Его интересовали уравнения, инвариантные относительно замен (подстановок) коэффициентов.

7.57. Жан Клод Буке (1819-1885)

См. Шарль Брио (1817-1882).

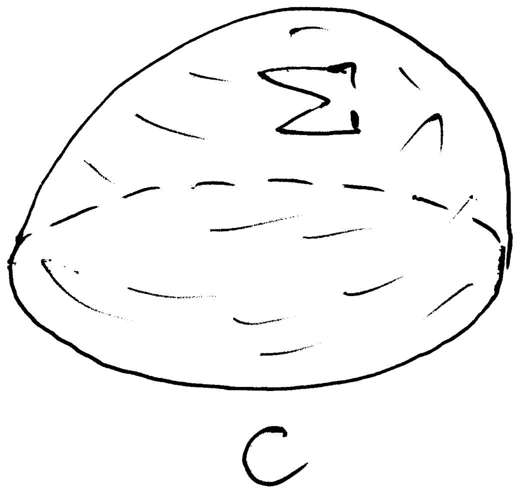

Рис. 7.15.

7.58. Жозеф Альфред Серре (1819-1885)

Серре получил *формулы Серре–Френе* для репера, движущегося вдоль кривой в пространстве, одновременно с Френе. Статья Серре «О некоторых формулах, относящихся к теории кривых двоякой кривизны» опубликована в 1851 году, а статья Френе опубликована в 1852 году (в разных томах одного и того же журнала).

В свои лекции по алгебре в Сорбонне Серре включал всё больше и больше теории Галуа. Теория Галуа стала общедоступной для алгебраистов только после публикации «Курса высшей алгебры» Серре. Во второй том своего «Курса высшей алгебры» Серре включил теорему Чебышева о простых числах.

Двухтомные курсы Серре по алгебре и по анализу оказали в своё время большое влияние и с интересом читаются даже сейчас.

7.59. Пьер Оссиан Бонне (1819-1892)

В 1867 году в «Мемуаре о теории поверхностей, наложимых на данную поверхность» Бонне заполнил пробел в описании необходимых и достаточных условий того, что одну поверхность можно наложить на другую, полученных Миндингом в 1839 году. Этот пробел был связан с возможностью особого решения уравнения в полных дифференциалах. В том же мемуаре обобщил теорему Гаусса о геодезическом треугольнике, доказав её для простого гладкого контура C, ограничивающего область Σ регулярной поверхности. Согласно *теореме Гаусса–Бонне*

$$\int_{\Sigma} K\, d\sigma + \oint_C \frac{ds}{\rho_g} = 2\pi,$$

т.е. сумма полной кривизны области Σ и интеграла геодезической кривизны $1/\rho_g$ по контуру C равна 2π (рис. 7.15).

В этом же мемуаре Бонне впервые опубликована теорема о том, что первая и вторая квадратичные формы определяют поверхность с точностью до движения. Но эта теорема была ранее доказана в неопубликованной диссертации Петерсона «Об изгибании поверхностей» (1853).

Бонне ввёл понятие геодезической кривизны. Независимо от Миндинга он доказал инвариантность геодезической кривизны при изгибаниях поверхности.

В 1859 году Бонне получил решение задачи о нахождении всех поверхностей с заданным линейным элементом. Его подход использовал изотермические и тангенциальные координаты.

7.60. Джордж Габриэль Стокс (1819-1903)

В 1845-1846 годы Стокс изучал движения несжимаемой жидкости и получил уравнение, получившее название уравнение Навье-Стокса. В 1851 изучал движение маятника в жидкости, получил закон падения круглого тела в вязкой жидкости (закон Стокса).

В 1854 году Стокс предложил на экзамене теорему, которую в 1850 году сообщил ему в письме лорд Кельвин: интеграл ротора векторного поля по поверхности равен интегралу этого векторного поля по краю поверхности, т.е.

$$\int\int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} d\Sigma = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} dr.$$

С тех пор это утверждение и его многомерное обобщение получило название *теорема Стокса*.

7.61. Джордж Сальмон (1819-1904)

Весьма популярны были учебники ирландского математика Сальмона «Конические сечения» (1848), «Высшие алгебраические кривые» (1852), «Введение в современную высшую алгебру» (1859) и «Аналитическая геометрия трёх измерений» (1862), содержащие обширный материал. В книге «Высшие алгебраические кривые» Сальмон доказал, в частности, что определитель композиции двух линейных преобразований равен произведению их определителей.

В 1849 году Сальмон доказал, что на гладкой кубической поверхности в комплексном пространстве расположено ровно 27 прямых. (В том же году Кэли тоже установил, что на гладкой кубической поверхности есть прямые, но не нашёл их число.)

7.62. Виктор Александр Пюизё (1820-1883)

Основная работа Пюизё — «Исследования об алгебраических функциях» (1850). В ней он сформулировал понятие алгебраической функции и детально изучил поведение алгебраической функции в окрестности особой точки. Получил разложение по степеням $(z-a)^{1/\nu}$ алгебраической функции в окрестности точки ветвления a. Коши обсуждал этот результат в статье 1851 года. На примере алгебраических функций Пюизё рассмотрел способ аналитического продолжения степенных рядов. (Этот способ был известен Вейерштрассу в 1842 году, но он не опубликовал его своевременно.) Пюизё фактически полностью выяснил структуру многолистной римановой поверхности, определяемой алгебраическим уравнением $f(u,z)=0$; для этого он изучил, что происходит при обходе вокруг точек ветвления. Дал общее определение периода абелевых интегралов и изучил свойства периодов для ультраэллиптических интегралов.

Пюизё разъяснил, чем точка ветвления отличается от полюса, и дал определение существенно особой точки — полюса бесконечного порядка.

Продолжение основной работы под названием «Новые исследования об алгебраических функциях» опубликовано в 1851 году. Здесь Пюизё доказал, что однозначная алгебраическая функция рациональна. Он доказал также, что для любого значения многозначной функции можно выбрать путь, идя по которому мы попадём в любое другое значение этой функции (на языке римановых поверхностей это означает, что риманова поверхность неприводимой алгебраической функции связна).

В этих работах Пюизё рассматривал непрерывные деформации путей, обходящих вокруг точки ветвления. Он, в частности, отмечает, что если сначала проходится некоторый путь, а затем тот же путь проходится в обратном направлении, то такой составной путь непрерывно деформируется в точку. Это постепенно подготавливало введение фундаментальной группы.

7.63. Генрих Эдуард Гейне (1821-1881)

В 1872 году Гейне сформулировал понятие равномерной непрерывности и доказал, что функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна. (Это доказывал ранее Дирихле в лекциях 1862 года.)

При этом Гейне доказал и использовал, что из счётного покрытия отрезка можно выбрать конечное подпокрытие. Как самостоятельную важную теорему это утверждение сформулировал и доказал (тоже для счётных покрытий) Эмиль Борель в 1895 году. Доказательство это не очень сложное, но главное было в том, чтобы осознать важность этой теоремы, которая впоследствии привела к понятию *компактности* множества. Для произвольного (не обязательно счётного) покрытия эту теорему доказали Кузен (1895), Шёнфлис (1900), Юнг (1902) и Лебег (1898, опубликовано в 1904).

7.64. Пафнутий Львович Чебышев (1821-1894)

В 1851 году Чебышев в мемуаре «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» изучал свойства функции $\pi(x)$, равной количеству простых чисел, не превосходящих x. Он доказал, что если функция $\frac{\pi(x)}{x \ln x}$ имеет предел при $x \to \infty$, то этот предел равен 1. Но существование предела Чебышев доказать не смог; это сделали независимо Адамар и Валле-Пуссен в 1896 году. Другой важный шаг в этом направлении

Чебышев сделал в 1852 году в мемуаре «О простых числах». Он доказал теорему об асимптотике числа простых чисел, не превосходящих данного числа:

$$0,92129 < \frac{\pi(x)}{x \ln x} < 1,10555.$$

Поводом для написания этого мемуара послужил так называемый *постулат Бертрана*: для любого натурального $n > 3$ существует простое число, которое большее n и меньше $2n - 2$, сформулированный Бертраном в 1845 году. Найденные оценки позволили Чебышеву доказать постулат Бертрана.

В 1853 году Чебышев доказал, что что интеграл $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ выражается в элементарных функциях только том случае, когда одно из чисел $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$ или p натуральное.

В 1854 году опубликован мемуар «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов». Именно здесь поставлена и решена задача о полиномах $P(x)$ данной степени, наименее уклоняющихся от нуля при $-1 \leq x \leq 1$. Эти многочлены получили название *многочленов Чебышева*.

В 1855 году опубликована работа «О непрерывных дробях» — первая из серии работ, посвящённых общей теории ортогональных многочленов. Ортогональные многочлены появляются в этой работе как знаменатели подходящих дробей для цепных дробей вида

$$\cfrac{1}{z - a_0 - \cfrac{b_0^2}{z - a_1 - \cfrac{b_1^2}{z - a_2 - \dots}}}.$$

Чебышев первым ввёл общее понятие ортогональной системы многочленов.

В 1857 году в Академию представлена вторая из работ о функциях, наименее уклоняющихся от нуля: «Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближённым представлением функций.» Здесь Чебышев рассматривает наилучшие приближения произвольными функциями.

Абель доказал, что если интеграл $\int \frac{\rho(x)}{\sqrt{R(x)}} dx$, где $R(x)$ — многочлен степени $2n$, а $\rho(x)$ — многочлен степени $n-1$, выражается в элементарных функциях, то $\sqrt{R(x)}$ раскладывается в непрерывную периодическую дробь. Наоборот, если $\sqrt{R(x)}$ раскладывается в непрерывную периодическую дробь, то можно подобрать многочлен $\rho(x)$ так, чтобы интеграл $\int \frac{\rho(x)}{\sqrt{R(x)}} dx$ выражался в элементарных функциях. Но этот критерий не был эффективным, потому что при последовательном вычислении частных дробей разложения $\sqrt{R(x)}$ в непрерывную дробь нельзя быть уверенным, что периодичность не начнётся дальше. Для случая, когда $R(x)$ — многочлен степени 4 с рациональными коэффициентами, в 1861 году Чебышев предложил (без доказательства) алгоритм, позволяющий за конечное число шагов решить вопрос о возможности выразить интеграл $\int \frac{\rho(x)}{\sqrt{R(x)}} dx$ в элементарных функциях.

В 1866 году Чебышев доказал, что если a — любое вещественное иррациональное число, то при любом вещественном b существует бесконечно много пар целых чисел x и y (где $y \neq 0$), удовлетворяющих неравенству $|y - ax - b| < \frac{1}{2|y|}$.

В 1867 году в статье «О средних величинах» Чебышев опубликовал неравенство Бьенеме–Чебышева $P\{|\xi - E\xi| < \beta\} > 1 - D\xi/\beta^2$ и закон больших чисел в форме Чебышева. (Бьенеме опубликовал это неравенство в том же году.)

В 1878 году опубликовал работу «О кройке одежды», посвящённую проблеме «одевания поверхностей». В этой работе впервые были введены *сети Чебышева*.

1887 в статье «О средних величинах» доказан закон больших чисел. При доказательстве Чебышев использовал разработанный им метод *моментов* случайных величин.

Чебышев занимался и теорией шарнирных механизмов. Он изобрёл шарнирный механизм, преобразующий вращательное движение в движение, приближающее прямолинейное. (Инверсор Посселье позволяет преобразовать вращательное движение в прямолинейное точно, а не приближённо.)

7.65. Артур Кэли (1821-1895)

В 1841 году Кэли определил понятие инварианта однородной формы степени n. В этом же году начал публикацию серии статей, в которых исследовал алгебраические аспекты проективной геометрии.

В том же году он получил соотношения между попарными расстояниями между тремя точками на прямой, четырьмя точками на плоскости и пятью точками в трёхмерном пространстве в виде равенства нулю определителей симметрических матриц порядка 4, 5 и 6. Кэли представил каждую из этих матриц в виде произведения двух матриц. Для многомерных пространств такие соотношения обобщил Менгер (определитель Кэли–Менгера).

В 1843 году Кэли публикует «Главы из аналитической геометрии n измерений», где вводит понятие n-мерного пространства с помощью n-мерной системы координат. В том же году выходит трактат Грассмана, в котором он даёт бескоординатное определение.

В 1845 году Кэли ввёл принятое ныне обозначение определителя в виде квадратной таблицы с вертикальными чертами по бокам.

В 1845 году Кэли публикует работу «Об эллиптических функциях Якоби», в которой вводит 8-мерную алгебру без делителей нуля над полем $\mathbb{R}$. Элементы этой алгебры получили названия *октавы* или *числа Кэли*. (До Кэли эту алгебру описал Гревс в письме к Гамильтону, но он не опубликовал свои результаты.)

В 1849 году Кэли установил, что на любой кубической поверхности есть прямые, но не выяснил, сколько именно их. В том же году Сальмон установил, что их ровно 27. В 1871 году Клебш привёл пример поверхности, на которой все эти прямые вещественные.

В 1851 году Кэли обобщил понятие детерминанта и ввёл гипердетерминанты.

В 1854 году в статье «О группах, зависящих от символического уравнения $\theta^n = 1$» впервые ввёл абстрактное понятие конечной группы. Кэли рассматривает два способа задания группы: таблицей умножения, а также образующими и соотношениями. Сначала эта работа не имела влияния. В этой же статье Кэли ввёл понятие *групповой алгебры*, т.е. алгебры, элементы которой — линейные комбинации элементов группы (с вещественными или комплексными коэффициентами). В 1878 году он написал ещё 4 статьи о группах, и они уже имели большое влияние, потому что значение групп было постепенно к тому времени осознано. В одной из этих статей Кэли доказал, что любая конечная группа является подгруппой группы подстановок (*теорема Кэли*).

С 1854 по 1878 год Кэли публикует серию статей, посвящённых изучению однородных многочленов от двух, трёх и многих переменных. В частности, он показал, что для бинарной формы $ax_1^4+4bx_1^3x_2+6cx_1^2x_2^2+4dx_1x_2^3+ex^4$ над $\mathbb{C}$ полной системой инвариантов относительно группы $\mathrm{SL}(2)$ являются $g_2 = ae - 4bd + 3c^2$ и $g_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}$, т.е. любой инвариант полиномиально выражается через них.

В 1858 году в «Мемуаре о теории матриц» Кэли вводит понятие матрицы, определяет сложение матриц, умножение матриц по аналогии с композицией линейных замен переменных. Обобщая одну из теорем Гамильтона о кватернионах, Кэли формулирует *теорему Гамильтона–Кэли* (каждая матрица аннулирует свой характеристический многочлен) и доказывает её для матриц порядка 2 и 3. Кэли строит реализацию кватернионов как комплексных матриц второго порядка, сопоставив кватерниону $a + bi + cj + dk$ матрицу $\begin{pmatrix} a+di & b+ci \\ -b+ci & a-di \end{pmatrix}$; умножение кватернионов соответствует умножению таких матриц.

В 1853 году Лагерр дал определение угла на основе проективных свойств. Идею Лагерра обобщил Кэли в «Шестом мемуаре о формах» (1859). Он ввёл так называемую проективную метрику, используя некоторый фиксированный образ второго порядка (по терминологии Кэли — *абсолют*). Для определения расстояния между точками P и P' Кэли использовал точки пересечения отрезка PP' с абсолютом. Кэли рассмотрел случай, когда абсолют задан уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, соответствующий сферической геометрии, и случай, когда коника состоит из двух циклических точек, соответствующий евклидовой геометрии. Кэли показал, что движения евклидовой плоскости — это проективные преобразования, сохраняющие абсолют. Метрические свойства фигуры — это её свойства по отношению к абсолюту. Кэли писал, что метрическая геометрия — это часть проективной геометрии, а проективная геометрия — это вся геометрия. Клейн обобщил идею Кэли, включив в этот круг идей неевклидову геометрию (в этом случае абсолют — вещественная коника).

В 1874 году, исходя из задачи об описании молекул углеводородов, Кэли пришёл к задаче о перечислении деревьев с вершинами степени 1, 2, 3 или 4. Он нашёл число таких графов с числом вершин не больше 11. Ранее он построил производящую функцию для корневых деревьев. В 1889 году Кэли предложил формулу n^{n-2} для числа деревьев с n занумерованными вершинами; доказал её при $n = 6$. Полное доказательство получил Прюфер в 1918 году.

7.66. Жозеф Луи Франсуа Бертран (1822-1900)

В 1845 году Бертран предположил, что при $n > 3$ между числами n и $2n - 2$ всегда найдётся простое число (постулат Бертрана). В 1850 году постулат Бертрана доказал Чебышев.

В 1845 году Бертран в связи с задачей о числе различных значений, принимаемых функцией при перестановках переменных, сформулировал *проблему Бертрана* об описании подгрупп небольшого индекса в группе перестановок и в знакопеременной группе.

Кривые Бертрана — это две пространственные кривые, имеющие во всех своих точках общие главные нормали. Такие кривые исследованы Бертраном в «Мемуаре о теории кривых двоякой кривизны» (1850). Формулы Серре–Френе существенно упростили задачу о нахождении этих кривых.

В книге «Исчисление вероятностей» (1888) привёл следующую задачу: «В круге случайным образом выбирается хорда. Какова вероятность, что её длина превосходит сторону равностороннего треугольника, вписанного в круг?» Бертран показал, что эта задача допускает много разных решений в зависимости от того, как понимать *случайным образом* (парадокс Бертрана).

Предметный указатель