Оглавление

Предисловие

История математики — важная часть математического образования. Полезно знать и понимать не только сами математические понятия, но и то, как они возникли и как развивались. В этой книге описана прежде всего история возникновения и развития математических идей и понятий. Знаменитые сейчас теоремы нередко открывались для весьма неожиданных целей и лишь потом находили более широкое применение. Для понимания истории математики необходимо также иметь некоторое представление о биографиях математиков. В этом отношении я стремился ограничится самым необходимым, особенно стараясь избегать обсуждения различных черт характера великих математиков.

Геометрия зародилась в Древнем Египте и Вавилоне в связи с потребностями измерения земельных участков, построения храмов и дворцов. Когда Нил размывал участок обрабатываемой земли, для взимания налогов было важно знать, сколько именно земли потеряно. Египетские землемеры использовали для своих измерений и построений туго натянутые веревки.

Примерно тогда же геометрия появилась в Древней Индии и Древнем Китае. В Индии геометрические сведения излагались в многочисленных трактатах о построении алтарей. Эти трактаты назывались «Правила веревки», поскольку основным инструментом для построений, как и в Египте, были веревки. В Китае составлением трактатов по арифметике и геометрии занимались важные сановники. Математика была одним из шести искусств, которым обучались дети китайских аристократов.

Важнейшее изменение в понимании того, что такое геометрия, произошло в Древней Греции. До греков геометрия представляла собой собрание полученных из опыта правил и фактов, и только у греков появились теоремы и доказательства, и именно тогда геометрия приобрела близкий к современному вид.

Развитие математики шло сложными путями, многие из которых сразу или постепенно оказались тупиковыми. Важнейшие понятия, общепринятые сейчас, сложились не сразу. Из-за этого многие математики по разным поводам допускали ошибки, которые часто хорошо характеризуют состояние математики их времени, и поэтому иногда имеет смысл поговорить и об этих ошибках.

Глава 1.

Древний Египет и Вавилон

1.1. Древний Египет

Возникновению математики предшествовало возникновение понятия числа и формирование системы записи чисел. До появления математики должны были также сформироваться представления об основных геометрических фигурах. Рисунки могли появиться только тогда, когда возникло представление о подобии фигур. Некоторые египетские рисунки показывают, что для изображения подобных фигур использовались квадратные сетки. Уже на первых рисунках встречаются попытки изображения перпендикулярных и параллельных прямых. В орнаментах часто встречаются шестиугольники. Но пятиугольники и десятиугольники на рисунках в Древнем Египте не встречаются.

В Египте хранили, передавали и развивали научные знания, в том числе и математические, так называемые писцы. Должность писца была очень почётной. В одном тексте читаем: «Писец руководит всеми, и не обложена налогами работа в письме. На неё нет налогов.» В другом тексте о писцах говорится: «Это больше, чем любая должность, и нет ничего равного им в этой стране.»

Египетские тексты записаны на хрупком папирусе, иногда на коже. Такие тексты сохранялись гораздо хуже и реже, чем вавилонские тексты, которые писались клинописью на сырой глине, а затем обжигались. До нашего времени сохранилось огромное число вавилонских математических клинописных текстов, а египетских математических папирусов сохранилось очень мало.

Самый большой из сохранившихся до наших дней математический папирус — это папирус Райнда, названный по имени владельца, который приобрёл его в 1858 г. Папирус Райнда составлен писцом Ахмесом (1680-1620 до н.э.); он содержит 84 задачи. Другой большой математический папирус — так называемый Московский папирус, хранящийся в Музее изобразительных искусств имени А.С.Пушкина. Он содержит 25 задач. Оба эти математических папируса составлены для учебных целей и переписаны с оригиналов, восходящих примерно к 1900 г. до н.э.

Папирус Райнда начинается обещанием научить «совершенному и основательному исследованию всех вещей, пониманию их сущности, познанию всех тайн...». А в действительности речь идёт только о тайнах счёта и о вычислениях с дробями.

1.1.1. Древнегреческие свидетельства о египетской математике

Древние греки считали Египет страной, в которой зародились почти все науки. При этом причины возникновения математики назывались едва ли не противоположные. Прокл писал: «Как у финикийцев начало точному знанию чисел было положено благодаря торговле и сделкам, так и у египтян геометрия была изобретена по указанной причине. Съездив в Египет, Фалес впервые перенес эту науку в Элладу...» Подробно обосновывал происхождение геометрии, (точнее сказать, землемерия) практическими потребностями Геродот: «Этот царь (Сесострис), как передавали жрецы, также разделил землю между всеми жителями и дал каждому по квадратному участку равной величины. От этого царь стал получать доход, повелев взимать ежегодную поземельную подать. Если река отрывала у кого-нибудь часть его участка, то владелец мог прийти и объявить царю о случившемся. А царь посылал людей удостовериться в этом и измерить, насколько уменьшился участок, для того чтобы владелец уплачивал подать соразмерно величине оставшегося надела. Мне думается, что при этом-то и было изобретено землемерное искусство и затем перенесено в Элладу». Аристотель же не считал практические потребности сколько-нибудь важными для возникновения математики: «...математические искусства были созданы прежде всего в Египте, ибо там было предоставлено жрецам время для досуга».

Изобретение математики приписывали иногда египетскому богу Тоту. В диалоге Платона «Федр» Сократ говорит: «Так вот, я слышал, что близ египетского Навкратиса родился один из древних тамошних богов, которому посвящена птица, называемая ибисом. А самому божеству имя было Тевт. Он первый изобрёл число, счёт, геометрию, астрономию, вдобавок игру в шашки и в кости, а также и письмена».

Очень важным свидетельством являются слова Демокрита: «Никто не превзошел меня в складывании линий, сопровождающемся доказательством, — даже так называемые гарпедонапты у египтян». Это едва ли не единственное прямое указание на то, что в египетской геометрии были доказательства. Косвенно подтверждают это и слова Прокла о том, что Фалес впервые перенёс геометрию из Египта в Элладу. Для греков геометрия подразумевала доказательства.

1.1.2. Характер египетской математики

В египетских математических папирусах много задач, возникающих из практики. Они связаны с распределением заработной платы между известным числом рабочих, вычислением необходимого количества зерна для приготовления заданного количества хлеба или пива, переводом одних мер в другие. Основное внимание уделяется не методам решения задач, а самим вычислениям.

Эти задачи имели большое значение для писцов, управлявших многими важными делами в Египте. Об этом свидетельствует один очень интересный текст папируса, в котором писец упрекает другого писца в математическом невежестве: «Ну вот, ты приходишь и наполняешь меня твоей должностью. Теперь я хочу объяснить тебе, в чем твоя сущность, когда ты говоришь: «Я полномочный писец войска». Тебе дают озеро, которое ты должен выкопать. Тогда ты приходишь ко мне, чтобы осведомиться насчёт провианта для солдат, ты говоришь: «Вычисли его мне». Ты неисправен по своей должности, и то, что я тебя должен поучать выполнению твоих обязанностей, обрушится на твой же затылок. Иди сюда, я скажу тебе кое-что в дополнение к тому, что ты сказал. Я ставлю тебя в затруднительное положение, когда я заставлю тебя представить себе следующее: ты царский писец, ты приведён к окну для аудиенции для какого-нибудь замечательного дела, когда горы изрыгают огромные памятники для Гора [т. е. для царя], владыки обеих стран. Я открываю тебе приказ твоего господина. Ибо смотри, ты — опытный писец, стоящий во главе войска. Необходимо сделать укрепление в 730 локтей длины и 55 локтей ширины, состоящее из 120 ящиков, наполненных балками и камышом; в верхней части его высота 60 локтей, в середине 30 локтей с... 15 локтей, и его... имеет 5 локтей. Спрашивают у генералов, сколько для этого укрепления потребно кирпичей, и собрались все писцы, и ни один из них ничего не знает, они все полагаются на тебя и говорят: «Мой друг, ты — опытный писец, так реши же это быстро для нас». Вот ты имеешь знаменитое имя; пусть же в этом месте найдётся хоть один, который возвеличит всех тридцать. Не допусти, чтобы о тебе сказали: «Есть также и такие вещи, которых и ты не знаешь».

Для развлечения изучающих математику приводились и задачи, явно возникшие не из практики. Вот одна из наиболее известных таких задач: «Есть 7 домов, и в каждом живёт по 7 кошек. Каждая кошка съела 7 мышей, каждая мышь съела 7 колосьев ячменя. Каждый колос мог дать 7 мер хлеба. Найти сумму домов, кошек, мышей, колосьев и мер.» В ответе получается 19607.

1.1.3. Египетские дроби

Деление $m : n$ египтяне иногда представляли как умножение m на аликвотную дробь $1/n$. Других дробей египтяне не рассматривали, за исключением дробей $2/3$ и $3/4$ (и иногда дробей $2/n$). Эти дроби, как и дроби $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/6$ и $1/8$ часто встречались на практике, а потому имели специальные названия.

Папирус Райнда начинается с таблицы представления дробей $2/n$ для n от 3 до 101 в виде сумм аликвотных дробей.

Использование только аликвотных дробей — характерная особенность египетской математики. Обычно достаточно скоро возникали дроби общего вида и развитие математики не останавливалось на аликвотных дробях.

1.1.4. Вычисления «аха»

Египетское слово «аха» означает «куча», «груда», «количество». Количество здесь — неизвестная величина, которую нужно найти. Вычисление «аха» приблизительно соответствует нашим уравнениям первой степени с одним неизвестным. Пример таких вычислений даёт задача 26 из папируса Райнда. «Количество и его четвертая часть дают вместе 15». Таким образом, речь идёт о решении уравнения $x + \frac{1}{4}x = 15$. Египетское решение начинается так: «Считай с 4; от них ты должен взять четверть, а именно 1; вместе 5». Затем производится деление $15 : 5 = 3$, а в конце умножение $4 \cdot 3 = 12$. Требуемое количество равно 12.

Здесь используется приём, который в средневековой Европе получил название «метод ложного положения». Начинаем с того, что в качестве искомого количества берём произвольное число (в рассматриваемом случае это 4, для которого легко вычислить четвёртую часть). Четыре и его четвёртая часть вместе дают 5. Но результат должен быть равен 15, поэтому выбранное количество нужно ещё умножить на $15 : 5 = 3$.

Вычисления «аха» использовались и для решения двучленных квадратных уравнений вида $ax^2 = b$. Например, решается такая задача. «Квадрат и другой квадрат, сторона которого есть $\frac{3}{4}$ стороны первого квадрата, имеют вместе площадь 100. Вычисли мне это.» В решении берётся квадрат со стороной 1, тогда сторона другого

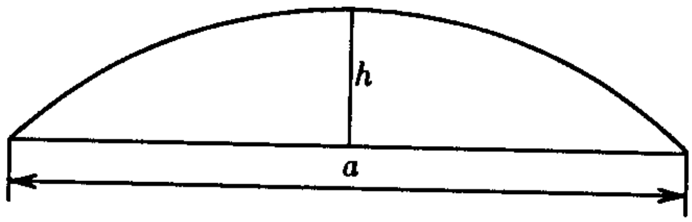

Рис. 1.1.

квадрата равна $\frac{3}{4}$. Сумма площадей этих квадратов равна $1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$. Квадратный корень из этой площади равен $\frac{5}{4}$. Квадратный корень из 100 равен 10. А сколько раз $\frac{5}{4}$ входит в 10? Ясно, что 8 раз. Поэтому стороны искомых квадратов равны 8 и $8 \cdot \frac{3}{4} = 6$.

Данные в условии только что разобранной задачи выбраны, конечно, не случайно. Ясно, что составитель этой задачи был хорошо знаком с тождеством $3^2 + 4^2 = 5^2$.

1.1.5. Вычисление площадей

В Древнем Египте умели правильно вычислять площадь треугольника и трапеции. При этом площадь представляли в виде прямоугольника: площадь треугольника представляли в виде площади прямоугольника, одна сторона которого равна половине основания треугольника, а другая — его высоте; площадь трапеции представляли в виде площади прямоугольника, одна сторона которого равна полусумме оснований трапеции, а другая — её высоте.

Наряду с правильными формулами применяли и приближённые формулы. Например, площадь четырёхугольника со сторонами a, b, c и d вычисляли по формуле $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$. Для четырёхугольника, не очень сильно отличающегося от прямоугольника, это приближение достаточно хорошее.

Площадь круга диаметра d считали равной $\left(\frac{8d}{9}\right)^2$. Эту формулу мы ещё обсудим более подробно.

В одном из египетских папирусов, правда, сравнительно позднем (III в. до н. э.), есть интересная приближённая формула для вычисления площади сегмента круга. Если h — высота сегмента, a — длина хорды, отсекающей этот сегмент (рис. 1.1), то его площадь S в этом папирусе считается равной $\frac{ah+h^2}{2}$. В книге «Метрика» Герон использует формулу $S = \frac{ah+h^2}{2} + \frac{1}{14}\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Он также пишет, что «древние» использовали формулу $S = \frac{ah+h^2}{2}$. Герон полагал, что эту формулу они получили, считая площадь круга равной $3R^2$ (тогда для полукруга, т. е. в случае $a = 2h$, формула даёт точный результат). Сам он использует более точное значение $\pi = 22/7$. Если считать, что это значение точное, а не приближённое, то для полукруга его формула даёт точный результат. Для сегментов, близких к полукругу, формула Герона точнее египетской, но при малых по сравнению с a значениями h она не применима. Свидетельства Герона важны для нас, потому что он жил в Александрии и там познакомился со многими традициями египетской математики.

1.1.6. Египетский треугольник

Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5 получил название *египетского треугольника*. Это произошло, по-видимому, благодаря упоминанию о нём в сочинении Плутарха «Об Исиде и Осирисе»: «И, видимо, египтяне сравнивают природу Всеобщности с красивейшим из треугольников... Этот треугольник имеет катет из трёх частей, основание — из четырёх и гипотенузу — из пяти... Таким образом, катет можно считать мужским началом, основание — женским, а гипотенузу — отпрыском обоих». Но свидетельство Плутарха относится к сравнительно позднему времени (II в. н. э.). Что же касается часто встречающихся рассказов о том, что в Египте для построения прямого угла применяли верёвку с узлами, отстоящими друг от друга на расстояния 3, 4 и 5, то эта легенда без каких-либо обоснований появилась в конце XIX века.

Соотношение $3^2 + 4^2 = 5^2$ египтянам было известно. На с. 5 разобрана задача, составителю которой это тождество было известно. Но тождество $3^2 + 4^2 = 5^2$ не предполагает знания теоремы Пифагора; оно могло возникнуть и без связи с прямоугольными треугольниками. Во всяком случае, в указанной задаче прямой связи с прямоугольными треугольниками нет.

Единственное подтверждение того, что египтянам был известен прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5, дают обмеры памятников архитектуры Египта. Например, в храме Аменхотепа на острове Элефантина (XVI в. до н. э.) использованы пропорции этого треугольника.

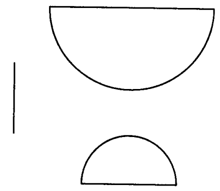

Рис. 1.2.

1.1.7. Задача московского папируса

В 1930 г. В. В. Струве опубликовал перевод математического папируса, хранящегося в Московском музее изобразительных искусств. Десятая задача этого папируса произвела настоящую сенсацию в мире историков математики. В этой задаче, как считал Струве, вычислялась площадь поверхности полусферы. Вот его перевод: «Форма вычисления корзины, если тебе называют корзину с устьем диаметра $4\frac{1}{2}$. О, дай мне знать её поверхность! Сосчитай $\frac{1}{9}$ от 9, потому что корзина есть половина яйца. Получается 1. Посчитай остаток за 8. Сосчитай $\frac{1}{9}$ от 8. Получится $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$. Отними от 8 эти $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$. Получается $7\frac{1}{9}$. Сосчитай $7\frac{1}{9}$ $4\frac{1}{2}$ раза. Получается 32. Смотри: это и есть поверхность. Ты правильно нашёл».

Струве считал, что «корзина с устьем диаметра $4\frac{1}{2}$» — это полусфера с диаметром $d=4\frac{1}{2}$. При этом площадь S поверхности полусферы в решении задачи вычисляется по формуле

$$S = d\left\{\left(2d-\frac{1}{9}\cdot 2d\right)-\frac{1}{9}\left(2d-\frac{1}{9}\cdot 2d\right)\right\} = 2\left(\frac{8}{9}d\right)^2. \tag{1}$$

В Египте площадь круга диаметром d вычисляли как $(8d/9)^2$. При таком приближении для числа π формула (1) правильная. В самом деле, площадь поверхности сферы в 4 раза больше площади большого круга (экватора) этой сферы.

Это толкование весьма заманчиво, потому что формула для вычисления поверхности сферы свидетельствует об очень высоком уровне развития математики. Но даже сам Струве не считал свое толкование единственно возможным, и почти сразу после него Пит и Нейгебауэр предложили другие переводы и толкования. Больше всего споров вызывает иероглиф, который Струве перевёл как «корзина»; этот иероглиф изображён на рис. 1.2. Выражение «корзина есть половина яйца» свидетельствует, по-видимому, о том, что «корзина» — это некоторый специальный технический термин, и это выражение означает, например, что «полушарие есть половина шара». Отметим, кстати, что перевод «яйцо» весьма условен, потому что соответствующее место папируса сильно испорчено. Этот технический термин может означать не только половину шара, но и половину круга (посмотрите ещё раз на рис. 1.2). Струве не исключал такой возможности, тем более что $4\frac{1}{2}$ может означать не только диаметр d, но и радиус r. Во втором случае речь должна идти о полукруге, потому что его площадь равна $\pi r^2/2$, а площадь поверхности полусферы равна $\pi d^2/2$. Употребляемый в тексте предлог «г» также свидетельствует о том, что речь идет, по-видимому, о двумерной, а не трёхмерной фигуре. Поэтому весьма вероятно, что в задаче приведено вычисление площади полукруга.

Есть ещё и другие толкования текста этой задачи. Пит предположил, что речь идет не о поверхности полусферы, а о половине боковой поверхности цилиндра диаметром $4\frac{1}{2}$ и такой же высотой. Нейгебауэр предположил, что речь идет о вычислении поверхности купола.

* * *

При любом толковании задачи 10 московского математического папируса ясно, что она связана с числом π, причём для него используется стандартное для египтян приближение $4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2 \approx 3{,}14$. Это приближение выглядит странно. Его происхождение пытались объяснить по-разному, но почти все гипотезы неубедительны. Одна из наиболее правдоподобных гипотез выдвинута в книге [6]. Она основана на формуле (1). Согласно этой формуле, площадь круга диаметра d должна вычисляться как $\left(1-\frac{1}{9}\right)d^2\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{9}\right)d^2$. Такую последовательность вычислений можно объяснить следующим образом. Впишем круг в квадрат со стороной 1. Вырежем из этого квадрата четыре квадратика со стороной 1/6 (рис. 1.3). Площадь оставшейся части равна $1-4\left(\frac{1}{6}\right)^2=1-\frac{1}{9}$, но она еще явно больше площади круга. Вырежем ещё восемь квадратиков со стороной 1/9 (рис. 1.3). Их площадь равна $\frac{8}{81}=\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{9}\right)$, а площадь оставшейся части равна $1-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{9}\right)$. Возможно, что египтяне поступили именно так и решили, что площадь оставшейся части равна площади круга.

Интересные, хотя и менее правдоподобные гипотезы о происхождении древнеегипетской формулы для площади круга предложены в статьях [1] и [9].

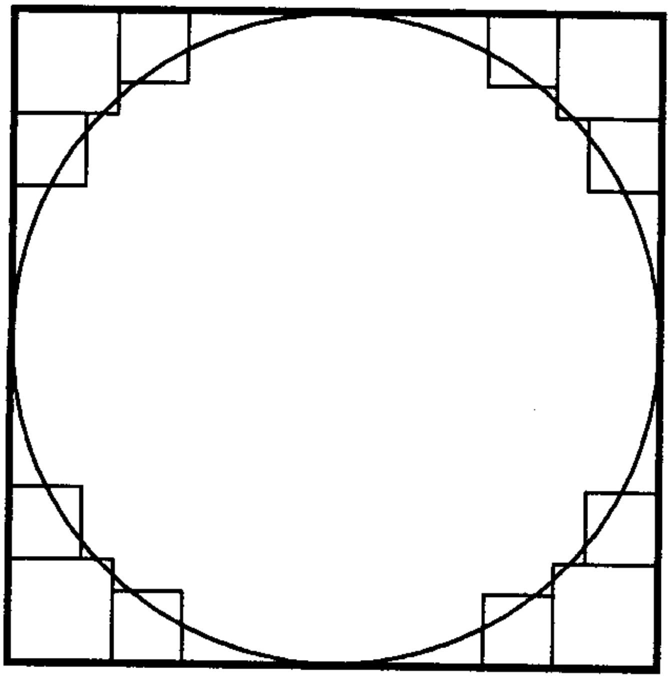

Рис. 1.3.

1.1.8. Объём усечённой пирамиды

Применение египтянами формулы для вычисления площади поверхности сферы вызывает сомнения. Но применение ими формулы для вычисления объема усеченной пирамиды с квадратными основаниями несомненно. Не совсем ясна лишь форма этой пирамиды. Сохранившийся чертёж неточен. По-видимому, в задаче рассматривалась пирамида, две смежные боковые грани которой перпендикулярны основаниям (рис. 1.4).

Объём усеченной пирамиды, основаниями которой являются квадраты со сторонами $a = 2$ и $b = 4$, а высота h равна 6, в задаче 14 московского математического папируса вычислялся как $\frac{6}{3} \cdot \left(2^2 + 2 \cdot 4 + 4^2\right)$, т. е. как $\frac{h}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right)$. Эта формула точная.

Объём пирамиды, вообще говоря, нельзя найти путем разрезания куба. Это можно сделать лишь для некоторых пирамид. Например, в вавилонских глиняных табличках вычисляется лишь объём пирамиды, угол между основанием (квадратным) и боковыми гранями которой равен 45°, а куб можно разрезать на шесть таких пирамид (подробности см. на с. 18).

Данные египетской задачи в этом отношении таковы, что от общего случая эта конкретная задача ничем

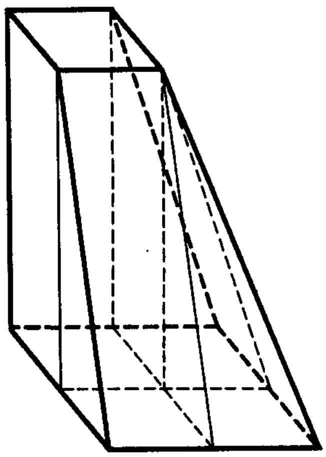

Рис. 1.4.

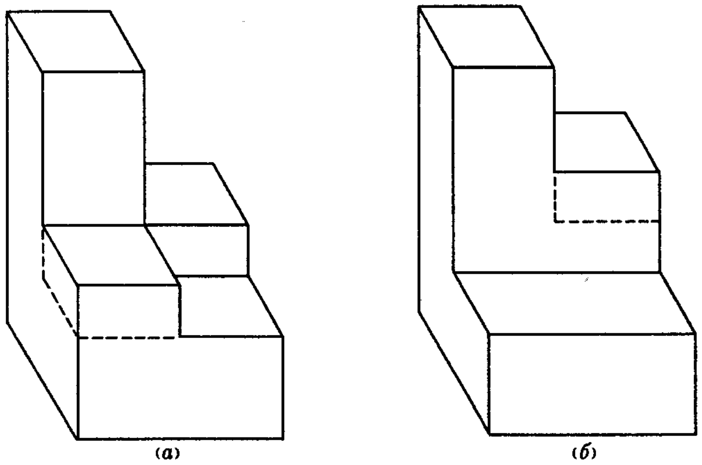

Рис. 1.5.

существенным не отличается. Таким образом, если формула для нахождения объёма усеченной пирамиды не была случайной догадкой, то для её доказательства требовалось применение предельного перехода в том или ином виде.

Нет никаких оснований сомневаться в том, что объём пирамиды был найден раньше, чем объём усечённой пирамиды. Но переход от пирамиды к усечённой пирамиде у египтян должен был вызвать затруднения. На рис. 1.4 показано, как рассматриваемую усеченную пирамиду можно разрезать на прямоугольный параллелепипед, две призмы и пирамиду. Поэтому объём усечённой пирамиды равен

$$a^2h + (b-a)ah + (b-a)^2h/3 = abh + (b-a)^2h/3$$

(переход от одной из этих формул к другой можно осуществить, сложив из двух призм параллелепипед). Но переход от этих формул к применявшейся египтянами формуле $\left(a^2+ab+b^2\right)h/3$ далеко не очевиден. Алгебраическое тождество $3ab+(b-a)^2 = a^2+ab+b^2$ египтянам вряд ли было хорошо знакомо. Переход от одной формулы к другой, скорее всего, был осуществлен геометрически. Это можно было сделать, например, следующим образом. Заменим призмы и пирамиду на равновеликие им прямоугольные параллелепипеды (рис. 1.5, *а*). Затем отрежем от параллелепипеда, соответствующего одной из призм, часть, возвышающуюся над параллелепипедом, соответствующим пирамиде (на рис. 1.5, *а* эти разрезы изображены штриховыми линиями). Отрезанную часть приставим к параллелепипеду, соответствующему второй призме (рис. 1.5, *б*). Плоскости, удалённые от основания полученной фигуры на расстояния $h/3$ и $2h/3$, разрезают её на прямоугольные параллелепипеды объёма $a^2h/3$, $abh/3$ и $b^2h/3$.

1.1.9. Архитектура

Исследование египетской архитектуры имеет большое значение для истории математики. Например, в математических папирусах не упоминается прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 (египетский треугольник), но обмеры архитектурных памятников показывают, что пропорции этого треугольника использовались в египетской архитектуре. Своды египетских храмов выглядят обычно следующим образом. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с гипотенузой $AB = 5$ и катетами $AC = 3$ и $BC = 4$; AB_1C — такой же треугольник (рис. 1.6). Проведём дуги B_1D_1 и BD окружностей радиуса BB_1 с центрами B и B_1 (точки D_1 и D лежат на прямых AB и AB_1 соответственно), а затем проведём дугу DD_1 окружности с центром A.

Функции архитекторов и математиков слились в египетских гарпедонаптах («натягивателях веревок»). При заложении храмов совершалась торжественная церемония — натягивание веревок для определения направлений стен храма. О важности этой церемонии свидетельствуют египетские рисунки, на которых изображены совершающие её фараоны в белых или красных коронах, боги, богини, жрецы. О натягивании верёвок фараонами при заложении храмов есть и письменные свидетельства. Храм Амона-Ра в Карнаке ориентирован на точку восхода Солнца в день зимнего солнцестояния. На одной из его стен изображён фараон Тутмос III (1500 г. до н. э.), натягивающий веревку при заложении храма. На другом рисунке фараон при заложении храма проводит мотыгой священную борозду.

Непосредственное отношение к египетской геометрии имеет понятие наклона, применявшееся в архитектуре. При этом длины в вертикальном направлении измеряли в царских локтях, а в горизонтальном — в ладонях (царский локоть считали равным семи ладоням, а обычный — шести). Наклоном называли величину b/a

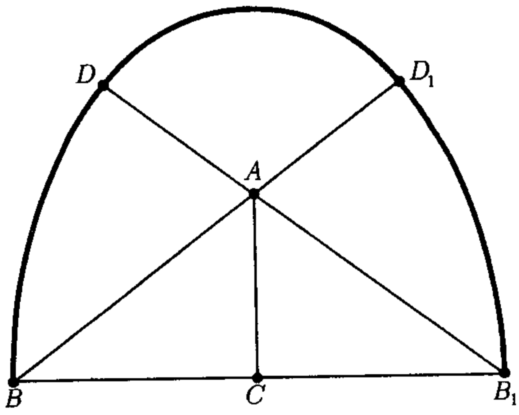

Рис. 1.6.

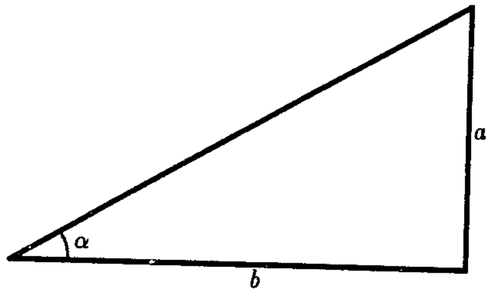

Рис. 1.7.

(рис. 1.7), где a равно 1 локтю, b — расстояние, измеренное в ладонях. Так как $b/a = 7\operatorname{ctg}\alpha$, то эту величину лучше назвать покатостью: она тем меньше, чем больше (круче) наклон. Любопытно, что в Вавилоне горизонтальные и вертикальные отрезки тоже измеряли в разных единицах: вертикальные, как и в Египте, измеряли в локтях, а горизонтальные отрезки — в единицах GAR, где 1GAR = 12 локтей.

Понятие наклона свидетельствует о том, что египтяне имели некоторое представление о подобии треугольников.

Единица измерения наклона позволяет сделать достаточно правдоподобные предположения о том, какими принципами руководствовались египетские архитекторы при выборе угла наклона граней пирамид. В этом отношении наиболее изучена пирамида Хеопса, поэтому мы разберём некоторые гипотезы о выборе угла наклона её граней. Одно из первых известных нам объяснений содержится в книге Геродота «История» (V в. до н. э.): «Она четырехсторонняя, каждая сторона её шириной в 8 плефров и такой же высоты». Длина стороны пирамиды Хеопса равна 233 м; это весьма хорошо согласуется со значением 8 плефров (236,8 м). Но высота пирамиды равна 147 м и отличается от длины стороны слишком сильно. Брёйнс, рецензируя книгу по истории древнеегипетской математики, высказал предположение, что в этом месте текст Геродота испорчен (см. [8]). Он предложил изменить в этом тексте одну букву, после чего перевод текста выглядит следующим образом: «Она четырехсторонняя, каждая сторона её шириной в 8 плефров и равна квадрату высоты». (Имеется в виду, что площадь стороны пирамиды равна квадрату высоты). Это толкование очень хорошо согласуется с реальными размерами пирамиды Хеопса. В самом деле, пусть a — сторона пирамиды, b — высота грани, h — высота пирамиды. Тогда по условию $ab/2 = h^2$, а по теореме Пифагора $4h^2 = 4b^2 - a^2$. Следовательно, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 4h^2 + b^2 = 5b^2$, а значит, $b = \frac{a}{\sqrt{5}-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} a$ и $h^2 = \frac{ab}{2} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Если φ — угол боковой грани такой пирамиды, то $\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, поэтому $\varphi \approx 51^\circ\,49'\,38''$. Это хорошо согласуется с измерениями угла наклона грани пирамиды Хеопса, дающими значение $51^\circ\,50'$.

Согласно толкованию Брёйнса, при сооружении пирамиды Хеопса использованы пропорции золотого сечения. (Золотым сечением называют такое деление отрезка AB точкой C, что $AC : AB = BC : AC$; если $AC = x$ и $BC = 1$, то $x : (x+1) = 1 : x$, т. е. $x = (1+\sqrt{5})/2$.) Но это толкование не единственное. Весьма интересное объяснение выбора угла наклона грани не только пирамиды Хеопса, но и других пирамид предложено в статье [11]. Как мы уже говорили, для измерения угла наклона в Египте использовали величину $7\operatorname{ctg}\alpha$. Робинс и Шют, авторы этой статьи, установили, что наиболее распространен был наклон граней, при котором эта величина равна $5\frac{1}{2}$; в более поздней архитектуре (около XVII в. до н. э.) величина $5\frac{1}{2}$ заменилась на $5\frac{1}{4}$. Если $7\operatorname{ctg}\alpha = 5\frac{1}{2}$, то $\operatorname{tg}\alpha = 7 : 5\frac{1}{2} = \frac{14}{11}$, т. е. $\alpha \approx 51^\circ\,50'\,34''$. Эта величина тоже очень хорошо согласуется с углом наклона грани пирамиды Хеопса. Если же $7\operatorname{ctg}\alpha = 5\frac{1}{4}$, то $\operatorname{tg}\alpha = 7 : \frac{21}{4} = 4 : 3$, т. е. в этом случае мы приходим к пропорциям треугольника со сторонами 3, 4 и 5 (египетского треугольника). Возможно, изменение угла наклона пирамид связано с сознательным применением пропорций этого треугольника.

1.2. Вавилон

Математика Древнего Вавилона известна нам в основном из расшифрованных текстов глиняных табличек. Некоторые из этих клинописных текстов содержат разные задачи и таблицы чисел. Эти задачи большей частью учебные; такие глиняные таблички были своего рода учебниками.

В Вавилоне должность писца считалась столь же почётной, как и в Египте: «Тот, кто в совершенстве овладеет искусством писать на табличках, будет сверкать подобно солнцу.» Каждый писец должен был хорошо знать математику.

Вавилонская техника вычислений была гораздо более совершенной, чем египетская, и задачи решались тоже более сложные, например, связанные с системами линейных уравнений и с квадратными уравнениями. От аликвотных дробей, на которых остановилась египетская математика, в Вавилоне быстро перешли к дробям общего вида.

В Вавилоне использовались две системы счисления: десятичная и шестидесятиричная. Точнее говоря, в шестидесятиричной системе числа записывались в виде $a_n \cdot 60^n + \dots + a_1 \cdot 60 + a_0$, а для записи чисел $a_0, \dots, a_n$ использовались два символа, один из которых обозначал единицы, а другой — десятки. Запись была неоднозначной: числа, отношение которых равно 60, записывались одинаково; кроме того, отсутствовал знак пропуска разряда, соответствующий нашему нулю, поэтому, например, числа $60 + 1$ и $60^2 + 1$ тоже записывались одинаково. Какое именно написано число, порой можно понять лишь из контекста.

Для вычислений в Вавилоне широко использовались разного рода таблицы. Во многом это связано с тем, что вычисления в шестидесятиричной системе более сложные, чем в десятичной. В частности, таблица умножения слишком велика, и запомнить её почти невозможно. Вместо деления производилось умножение на обратную величину, поэтому часто применялись таблицы обратных величин. Сначала в такие таблицы включались только те обратные величины чисел, которые были конечными шестидесятиричными дробями, т.е. обратные величины чисел вида $2^a 3^b 5^c$. В более позднее время в таблицы включались и приближённые значения обратных величин чисел 7, 11, 13, 17, 19 и т.д. Известна даже таблица чисел вида $n^3 + n^2$. Её, по-видимому, использовали для решения уравнения $x^3 + x^2 = a$, встречающегося в одной из табличек.

1.2.1. Одна вавилонская задача

Чтобы стало ясно, что представляют собой дошедшие до нас вавилонские математические тексты, приведём конкретный пример. К этому тексту нам ещё не раз придётся возвращаться, потому что в нём слились многие особенности вавилонской математики. Вот перевод этого текста.

«Длина, ширина. Длину и ширину я перемножил и площадь получил. Затем избыток длины над шириной я прибавил к площади; 183 получилось у меня. Затем я длину и ширину сложил: 27. Спрашивается длина, ширина и площадь.

(Даны)	27 и 183	суммы
(Результат)	15 длина	180 площадь.
	12 ширина	

Ты сделаешь так:

$$\begin{aligned} 27 + 183 &= 210, \\ 27 + 2 &= 29. \end{aligned}$$

Возьми половину от 29 (это даёт 14,5).

$$\begin{aligned} 14{,}5 \times 14{,}5 &= 210{,}25, \\ 210{,}25 - 210 &= 0{,}25. \end{aligned}$$

0,25 имеет квадратный корень 0,5.

$$\begin{aligned} 14{,}5 + 0{,}5 &= 15 \quad \text{длина}, \\ 14{,}5 - 0{,}5 &= 14 \quad \text{ширина}. \end{aligned}$$

Отними 2, которые ты прибавил к 27, от ширины 14; 12 истинная ширина.

15 длину, 12 ширину я перемножил:

$$\begin{aligned} 15 \times 12 &= 180 \qquad \text{площадь}, \\ 15 - 12 &= 3, \\ 180 + 3 &= 183 \text{ »}. \end{aligned}$$

Решение задачи приведено в виде последовательности операций с некоторыми числами. Для вавилонских текстов это характерно. Общие правила в них содержатся крайне редко. Но в данном случае легко понять, что означают все встречающиеся числа, т. е. решение можно перевести на современный алгебраический язык. Пусть x — длина, y — ширина прямоугольника. В задаче требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + x - y = 183, \\ x + y = 27. \end{cases}$$

Для упрощения этой системы делается замена $y' = y+2$. Тогда $xy' = xy+2x = (xy+x-y)+(x+y) = 183+27 = 210$ и $x + y' = x + y + 2 = 27 + 2 = 29$. Система уравнений

$$\begin{cases} xy = p, \\ x + y = a \end{cases}$$

в Вавилоне решалась обычно по правилу $x = a/2 + w$ и $y = a/2 - w$, где $w = \sqrt{(a/2)^2 - p}$. Это правило применено и в нашем случае: $(a/2)^2 = (29/2)^2 = 210{,}25$ и $(a/2)^2 - p = 210{,}25 - 210 = 0{,}25$. Далее вычисляется $x = (a/2)+w = 14{,}5+\sqrt{0{,}25} = 14{,}5+0{,}5 = 15$ и $y' = (a/2)-w = 14{,}5-0{,}5 = 14$. Наконец, $y = y'-2 = 14-2 = 12$.

Комментирование этого текста не вызывает затруднений. Но у многих других табличек с математическими текстами важные для их понимания части отломаны или сколоты. Кроме того, в них встречаются ошибки и описки.

1.2.2. Квадратные уравнения

В математических табличках часто встречаются задачи, связанные с квадратными уравнениями. Рецепты для решения таких задач показывают, что вавилонские математики знали общее правило решения квадратных уравнений тех типов квадратных уравнений, которые они рассматривали. А рассматривали они только два типа квадратных уравнений: $x^2 + ax = b$ и $x^2 - ax = b$. В Вавилоне операции сложения и вычитания были известны, но числа рассматривались только положительные. Корни уравнений, разумеется, могли быть только положительными. Есть ещё один тип квадратных уравнений, которые могут иметь положительные корни, а именно, $x^2 + b = ax$. Но уравнения такого типа в Вавилоне не рассматривали. Это довольно странно, потому что эквивалентные им системы уравнений $x+y = a$, $xy = b$, как видно из первого нашего примера вавилонской задачи, в Вавилоне решали. Возможно, уравнения типа $x^2+b = ax$ не рассматривали потому, что такие уравнения могли иметь не один положительный корень (как уравнения $x^2+ax = b$ и $x^2-ax = b$), а два. По-видимому, вавилонские математики не понимали, как к этому нужно относиться.

Корень уравнения $x^2 - ax = b$ находился по правилу, которое можно выразить формулой

$$\sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{a}{2}.$$

Система уравнений $xy = p$, $x - y = q$ решалась по следующему правилу:

$$x = w + \frac{q}{2}, \quad y = w - \frac{q}{2}, \quad w = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + p}.$$

1.2.3. Несколько задач с площадями

Вавилонские математические тексты содержат несколько интересных задач, связанных с площадями треугольников и трапеций. О том, какими методами они решались, почти ничего не известно; из табличек можно лишь понять, по каким формулам вычислялся ответ. До некоторой степени можно быть уверенным лишь в следующем:

1) никаких сколько-нибудь серьезных алгебраических преобразований вавилонские математики не производили;

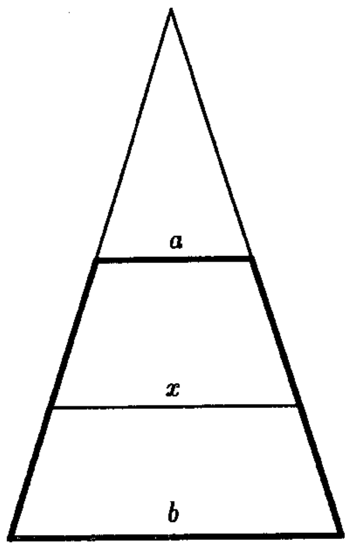

Рис. 1.8.

2) они знали и использовали тот факт, что если фигуру разрезать на части и сложить из них другую фигуру, то площади обеих фигур и суммы площадей частей будут равны (наиболее ранние известные доказательства геометрических теорем в Индии и Китае основаны именно на этом);

3) они знали свойства подобных треугольников и умели их использовать.

В вавилонских табличках есть задача, которую можно сформулировать следующим образом.

Задача 1. *Основания трапеции равны a и b. Отрезок длиной x, параллельный основаниям трапеции, делит её на две части равной площади. Найти x, если известны a и b.*

Ответ вычисляется по правильной формуле $x = \sqrt{(a^2+b^2)/2}$. Для решения этой задачи достаточно знать, что площади подобных треугольников пропорциональны квадратам соответственных сторон. В самом деле, продолжим стороны трапеции до пересечения (рис. 1.8). Площадь одной части трапеции равна разности площадей треугольников с основаниями x и a, а площадь второй части равна разности площадей треугольников с основаниями b и x. Поэтому $x^2 - a^2 = b^2 - x^2$, т. е. $x^2 = (a^2+b^2)/2$.

Следующая задача не связана непосредственно с предыдущей, но её можно к ней свести, и такое решение для вавилонских математиков всё же более естественно, чем решение, использующее сложные алгебраические преобразования.

Задача 2. *Прямоугольный треугольник разделён на две части отрезком, параллельным одному из катетов. Известны величины b, $\Delta = S_1 - S_2$ и $\delta = y_2 - y_1$ (рис. 1.9). Нужно найти y_1, S_1, y_2 и S_2.*

Основная сложность в решении этой задачи — вычисление длины z отрезка, делящего треугольник (получение ответа в табличке начинается именно с вычисления z). Этот отрезок можно вычислить следующим образом. Достроим треугольник до трапеции, чтобы продолжение отрезка z делило её на две равновеликие части (рис. 1.10). Существование такой трапеции следует из того, что $S_1 > S_2$ и $y_1 < y_2$. В самом деле, с увеличением a разность площадей прямоугольников размером $a \times y_2$ и $a \times y_1$ возрастает, поэтому для некоторого a она равна $S_1 - S_2$, и тогда $S_1 + ay_1 = S_2 + ay_2$. Это значение a равно $(S_1 - S_2) \,/\, (y_2 - y_1) = \Delta/\delta$. Воспользовавшись результатом задачи 1, получим $2(a+z)^2 = a^2 + (a+b)^2$, т. е.

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{\delta} + b\right)^2\right]} - \frac{\Delta}{\delta}.$$

В условии одной из вавилонских задач (см. с. 14) в качестве одного из данных использован «наклон» — отношение катетов прямоугольного треугольника. Поэтому не будет очень большой натяжкой записать $y_1 = k(b-z)$, $S_2 = kz^2/2$ и $S_1 + S_2 = kb^2/2$. Тогда $\Delta = S_1 - S_2 = (S_1 + S_2) - 2S_2 = kb^2/2 - kz^2$ и $y_1 = \frac{\Delta}{b^2/2 - z^2}(b-z)$. Далее, $S_1 = (b+z)y_1/2$, $y_2 = y_1 + \delta$ и $S_2 = zy_2/2$.

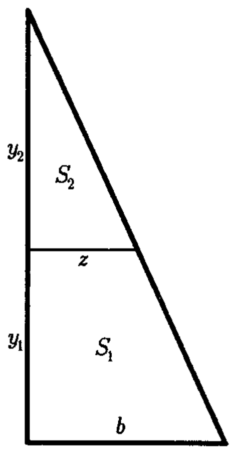

Рис. 1.9.

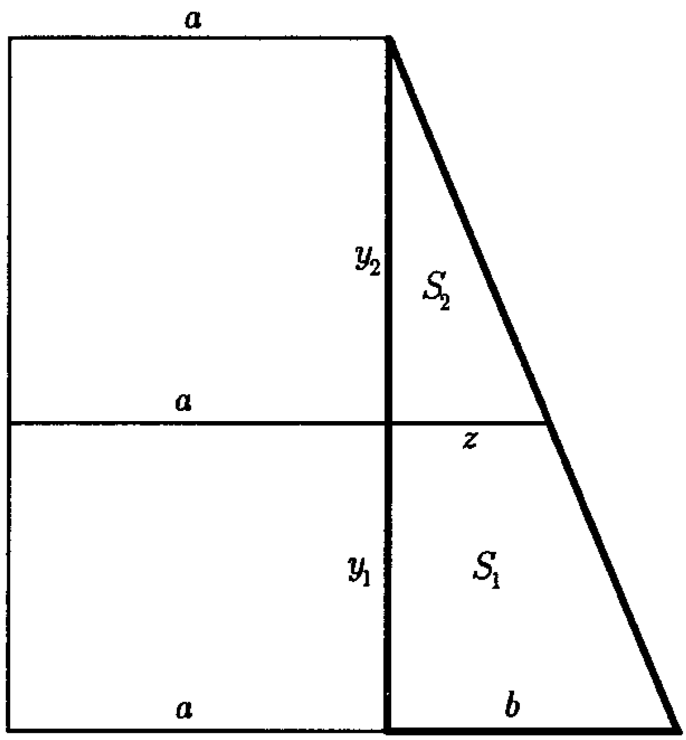

Рис. 1.10.

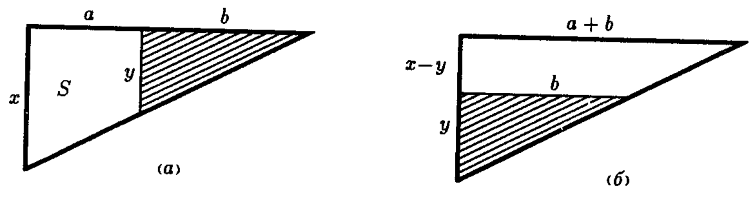

Рис. 1.11.

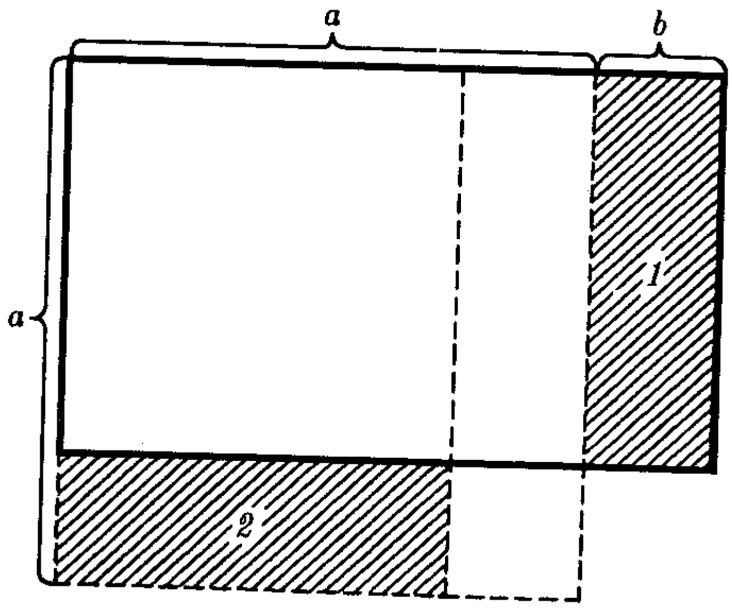

Рис. 1.12.

Задача 3. *Прямоугольный треугольник разделён отрезком, параллельным одному из катетов, на треугольник и трапецию. Известны площадь трапеции S и длины отрезков a и b (рис. 1.11,* а*). Требуется найти длины отрезков x и y.*

Для решения этой задачи можно использовать соотношения $x + y = 2S/a$ и $x - y = 2S/(a + 2b)$. Подставив значения $S = 320$, $a = 20$ и $b = 30$, приведённые в табличке, получим $x = 20$ и $y = 12$.

Соотношение $x + y = 2S/a$ получается из формулы для площади трапеции. Соотношение $x - y = 2S/(a + 2b)$ можно переписать в виде $x - y = a(x + y)/(a + 2b)$. Несложными алгебраическими преобразованиями его можно получить из соотношения $y : b = x : (a + b)$. Но его можно получить и геометрически. Прямоугольный треугольник с катетами y и b можно отрезать от треугольника с катетами x и $a + b$ двумя способами (см. рис. 1.11, *а* и *б*). Поэтому площадь трапеции с основаниями $a + b$ и b и высотой $x - y$ равна S, т. е. $S = (x - y)(a + 2b)/2$.

Задача 4. *Сечение насыпи имеет форму равнобедренной трапеции с высотой h и основаниями a и b. Известны площадь S этой трапеции, большее основание a и наклон насыпи $\beta = (a - b)/2h$ (наклон — котангенс угла при основании трапеции). Нужно найти меньшее основание b.*

Так как $S_\beta = \frac{h(a+b)}{2} \cdot \frac{a-b}{2h} = \frac{a^2-b^2}{4}$, то $b^2 = a^2 - 4S_\beta$. В табличке число b вычисляется именно по этой формуле. Более того, в другой задаче этого же текста a вычисляется по формуле $a^2 = b^2 + 4S_\beta$. Из этого, пожалуй, можно сделать вывод, что в Вавилоне тождество $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ было известно. Это тождество можно доказать геометрически, переместив фигуру *1* на место фигуры *2* (рис. 1.12). Обнаружить это тождество арифметически, вычисляя сумму и разность конкретных чисел a и b, а затем их произведение, весьма затруднительно. Такого рода доказательство должно использовать алгебраические преобразования. Поэтому для вавилонских математиков более правдоподобно геометрическое доказательство.

В этой задаче нужно отметить ещё появление в качестве одного из данных «наклона», соответствующего котангенсу угла. Это свидетельствует о том, что понятие наклона было достаточно привычным для вавилонских математиков, а это понятие включает в себя представление о подобии треугольников.

1.2.4. Задачи с площадями и решение уравнений в целых числах

Составители школьных учебников и в наше время часто стараются подбирать данные в условиях задач так, чтобы получился целочисленный ответ. Это делали и составители задач клинописных табличек в Вавилоне. Поэтому им пришлось столкнуться с решением уравнений $x^2 + y^2 = z^2$ и $p^2 + q^2 = 2r^2$ в целых числах. Решения первого уравнения называют *пифагоровыми тройками*, а решения второго — *вавилонскими тройками.* Вавилонские тройки возникают в задачах 1 и 2: данные в условиях задач подобраны так, что решения уравнения целочисленные, а именно (1, 5, 73) и (7, 13, 173).

Пифагоровы тройки возникают при решении следующей задачи.

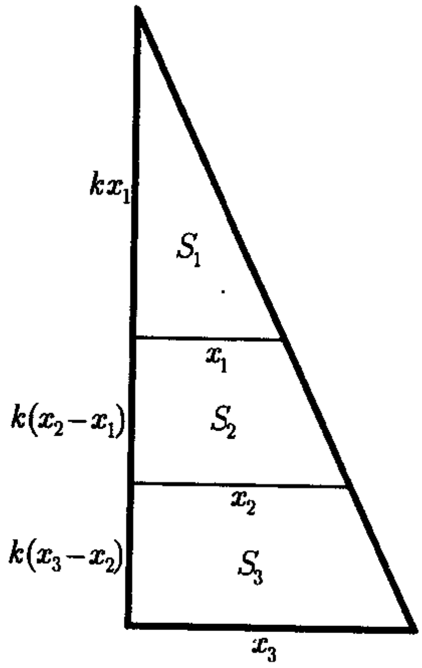

Рис. 1.13.

Задача 5. *Прямоугольный треугольник разделен двумя отрезками, параллельными одному из катетов, на три части, площади которых равны S_1, S_2 и S_3 (рис. 1.13). Какими должны быть длины отрезков x_1, x_2 и x_3, чтобы выполнялось равенство $S_1 = S_3$?*

Воспользовавшись обозначениями рис. 1.13, легко проверить, что $S_1 = kx_1^2/2$ и $S_3 = k(x_3 - x_2)(x_3 + x_2)/2$. Значит, равенство $S_1 = S_3$ эквивалентно равенству $x_1^2 = x_3^2 - x_2^2$, т. е. $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$. На глиняных табличках встречаются изображения таких разбиений треугольника на три части, причём эти чертежи соответствуют пифагоровой тройке (3, 4, 5). Эта задача показывает, что пифагоровы тройки возникали и независимо от теоремы Пифагора.

Более естественно, казалось бы, выяснить сначала, когда выполняется равенство $S_1 = S_2$. Но табличек с такими чертежами нет, и это не случайно. В самом деле, равенство $S_1 = S_2$ эквивалентно равенству $x_1^2 = x_2^2 - x_1^2$, т. е. $x_2^2 = 2x_1^2$. Поэтому табличка с примером решения задачи 5 свидетельствует, по-видимому, о том, что вавилонские математики пытались решить в натуральных числах уравнение $x^2 = 2y^2$.

Вавилонские тройки можно получать из пифагоровых троек. В самом деле, если $x^2 + y^2 = z^2$ и $p = x - y$, $q = x + y$, $r = z$, то $p^2 + q^2 = 2(x^2 + y^2) = 2r^2$. На глиняных табличках встречаются изображения разбиений трапеций на пары равновеликих трапеций. На рис. 1.14 приведён (в искаженном масштабе) один из таких примеров: площади двух верхних трапеций равны 3, а площади двух нижних равны 15. Известна табличка и с разбиением трапеции на три пары равновеликих трапеций. Согласно задаче 1 длины оснований трапеций в таких разбиениях образуют последовательность $x_1, x_2, \ldots$, обладающую тем свойством, что $x_1^2 + x_3^2 = 2x_2^2$, $x_3^2 + x_5^2 = 2x_4^2, \ldots$ В результате мы приходим к задаче построения такой последовательности вавилонских троек, что наибольшее число каждой тройки совпадает с наименьшим числом следующей за ней тройки. Для построения такой последовательности рассмотрим сначала последовательность пифагоровых троек $((n+1)^2 - n^2, 2n(n+1), (n+1)^2 + n^2)$; ей соответствует последовательность вавилонских троек $(2n^2 - 1, 2n^2 + 2n + 1, 2n^2 + 4n + 1)$. Так как $2n^2 + 4n + 1 = 2(n+1)^2 - 1$, то эта последовательность обладает требуемым свойством. При этом мы получаем тройки $(1, 5, 7)$, $(7, 13, 17)$, $(17, 25, 31)$, $(31, 41, 49)$, $(49, 61, 71), \ldots$ Последовательность продолжается и дальше, но мы ограничились перечислением лишь тех троек, которые действительно встречаются в вавилонских табличках.

1.2.5. Прямоугольные треугольники

Вавилонские таблички содержат много задач о прямоугольных треугольниках, использующих теорему Пифагора. Их решения свидетельствуют о том, что эта теорема была известна в Вавилоне задолго до рождения Пифагора. Решения, правда, не всегда верные. Например, гипотенуза z прямоугольного треугольника с катетами $x = 3$ и $y = 4$ в одной табличке вычисляется сразу двумя способами: $z = x + y/2$ и $z = y + x/3$. Обе формулы дают верный результат, но лишь в этом частном случае. Однако в решениях других задач той

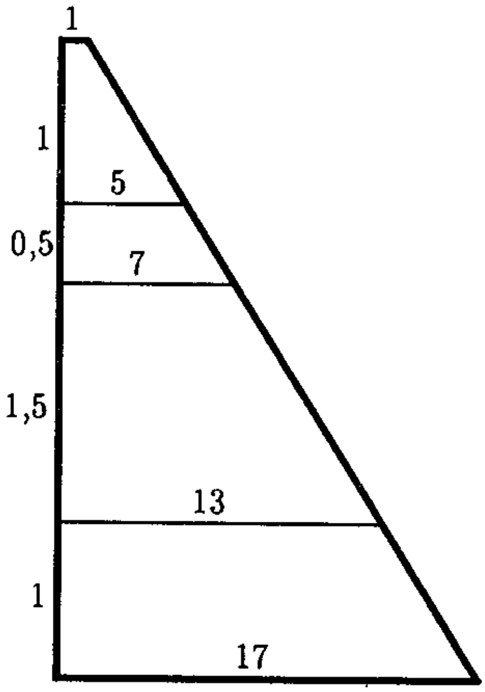

Рис. 1.14.

же самой таблички теорема Пифагора применяется верно. Уже в следующей задаче катет x прямоугольного треугольника со вторым катетом $y = 4$ и гипотенузой $z = 5$ вычисляется по формуле $x = \sqrt{z^2 - y^2}$.

Во многих вавилонских задачах о прямоугольных треугольниках заданы две величины (сумма или разность катетов, сумма или разность катета и гипотенузы, сумма всех сторон, произведение катетов) и нужно определить длины катетов. Рассмотрим несколько таких задач, обозначая катеты прямоугольника буквами x и y, а гипотенузу буквой z.

Задача 6. В*ертикально стоящая рейка возвышается над стеной на* 3 *локтя. Если верхний конец рейки опереть на верх стены, то нижний конец отодвинется от стены на* 9 *локтей. Найти длину рейки и высоту стены.*

В этой задаче даны величины $d = z - y$ и $a = x$. Требуемые величины z и y вычисляются в табличке по формулам $z = ((a^2 + d^2)/2)/d$ и $y = \sqrt{z^2 - a^2}$, катет y можно вычислить проще: $y = z - d$. Выражение для z можно получить следующим образом. Сложив равенства $a^2 = x^2 = z^2 - y^2 = (z-y)(z+y) = d(z+y$ и $d^2 = d(z+y)$, получаем $a^2 + d^2 = 2dz$.

Известна также задача, в которой вместо величины $d = x - y$ дана величина $b = z + y$. Эту задачу можно решить аналогично: сложив равенства $a^2 = (a^2 + b^2)/(2b)$ и $b^2 = b(z - y)$, получаем $z = (a^2 + b^2)/(2b)$. В табличке, правда, сначала вычисляется $y = (b^2 - a^2)/(2b)$, а затем вычисляется $z = b - y$.

Задача 7. *Даны величины $x + y + z = a$ и $xy = b$. Нужно найти x.*

Для решения этой задачи возведём в квадрат обе части равенства $x + y = a - z$. В результате получим $x^2 + 2xy + y^2 = a^2 - 2az + z^2$. Учитывая, что $x^2 + y^2 = z^2$ и $xy = b$ получаем $z = (a^2 - 2b)/(2a)$. В одной из табличек сформулировано общее правило для вычисления z по данным a и b. Это весьма редкий случай; обычно решение в табличках приводится для конкретных чисел.

Замечание. *Формула $z = (a^2 - 2b)/(2a) = a/2 - b/a$ эквивалентна тождеству $z = p - r$ где p — полупериметр, $r = b/a = S/p$ — радиус вписанной окружности прямоугольного треугольника.*

Задачи о прямоугольных треугольниках часто приводили к системам уравнений с двумя неизвестными. Если задано произведение катетов и их сумма или разность, то получаем систему уравнений вида

$$\begin{cases} x \pm y = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

Решения таких систем находили по правилу $x = \frac{a}{b} + w$ и $y = \pm\left(\frac{a}{b} - w\right)$, где $w = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)}$.

В одной из табличек вычислены площади правильных пятиугольника, шестиугольника и семиугольника со стороной 1. По-видимому, площадь S_n правильного n-угольника со стороной 1 вычислялась по формуле

$$S_n = \frac{n}{12}\sqrt{n^2 - 9}. \tag{1.1}$$

Эту (приближённую) формулу можно получить с помощью теоремы Пифагора следующим образом. Пусть a_n — сторона правильного n-угольника, h_n — расстояние от центра описанной окружности до стороны, d — диаметр описанной окружности. Тогда

$$S_n = \frac{na_n h_n}{2} = \frac{na_n}{2}\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}. \tag{1.2}$$

Длину окружности считали равной $d/3$. Если длину окружности считать равной na_n, то при $a_n = 1$ получим $d = n/3$. Если подставить в (1.2) значения $a_n = 1$ и $d = n/3$, то получим (1.1).

1.2.6. Табличка Плимтон 322

В коллекции Джорджа Плимтона под номером 322 была зарегистрирована очень интересная глиняная табличка, датируемая 1800 г. до н. э. В ней приведены четыре столбца чисел, причем последние три столбца в привычной нам десятичной записи (после исправления нескольких ошибок или описок) выглядят следующим образом:

119	169	1
3367	4825	2
4601	6649	3
12709	18541	4
65	97	5
319	481	6
2291	3541	7
799	1249	8
481	769	9
4961	8161	10
45	75	11
1679	2929	12
161	289	13
1771	3229	14
56	106	15

Числа первого столбца таблички получены следующим образом. Обозначим числа второго и третьего столбцов (т. е. первого и второго столбцов приведенной нами таблицы) буквами b и c соответственно. В первом столбце записаны числа c^2/a^2, где $a^2 = c^2 - b^2$.

Легко заметить, что в табличке записаны числа пифагоровых троек, причём величина c^2/a^2 (а значит, и величина b/a) изменяется строго монотонно. Кроме того, простыми делителями чисел a являются лишь 2, 3 и 5. Числа вида $2^k \cdot 3^l \cdot 5^m$, где k, l и m — целые числа, характеризуются тем, что соответствующие им шестидесятиричные дроби конечны. Все пифагоровы тройки нашей таблицы получаются с помощью чисел такого вида следующим образом. Для получения первой тройки нужно взять дробь 12/5 и рассмотреть числа $12/5 - 5/12 = 119/60$ и $12/5 + 5/12 = 169/60$. Для получения остальных троек нужно взять следующие дроби: 64/27, 79/32, 125/54, 9/4, 20/9, 54/25, 32/15, 25/12, 81/40, 2, 48/25, 15/8, 50/27, 9/5. Эти дроби монотонно убывают от $12/5 = 2{,}4$ до $9/5 = 1{,}8$. Более того, в указанных пределах нет других дробей вида $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, знаменатели которых меньше 60. Наиболее правдоподобно следующее объяснение происхождения таблички Плимтон 322. Так как $\left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\right) = \frac{c^2 - b^2}{a^2} = 1$, то $\frac{c}{a} + \frac{b}{a} = t$, $\frac{c}{a} - \frac{b}{a} = \frac{1}{t}$. Поэтому $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ и $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$. У вавилонян были таблички значений обратных величин целых чисел. Эти таблички можно было использовать для вычисления значений $t = rs^{-1}$ и $t^{-1} = sr^{-1}$, где r и s — целые числа. Как мы уже говорили, для получения конечных шестидесятиричных дробей нужно было, чтобы числа s и r имели вид $2^k \cdot 3^l \cdot 5^m$. Числа в табличке Плимтон 322 удовлетворяют условию $b < a$; для положительных t это условие можно записать в виде $t^2 - 2t - 1 < 0$, т. е. $1 - \sqrt{2} < t < 1 + \sqrt{2}$. В нашем случае остается ограничение $1 < t < 1 + \sqrt{2}$. Числа в табличке Плимтон 322 можно охарактеризовать как все пифагоровы тройки, соответствующие числам $t = s/r$, где s и r — целые числа вида $2^k \cdot 3^l \cdot 5^m$, причём $r < 60$ и $9/5 < t < 1 + \sqrt{2}$.

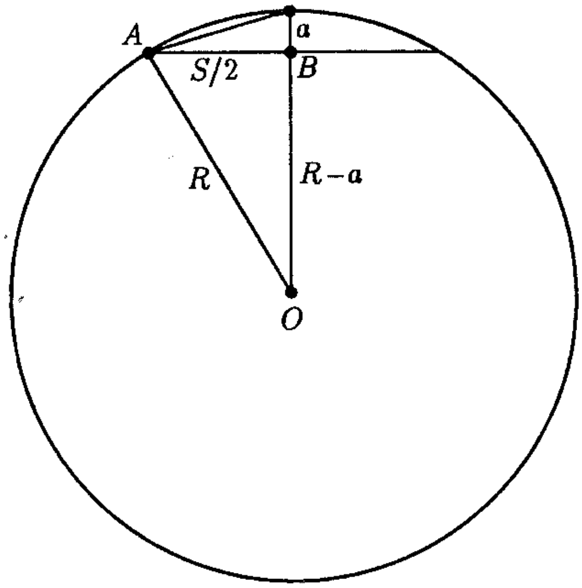

Рис. 1.15.

1.2.7. Окружность

Одной из задач, связанных с окружностью, является вычисление длины s хорды при заданных диаметре d и высоте a сегмента, отсекаемого хордой. Применив теорему Пифагора к треугольнику OAB (рис. 1.15), получаем $s^2/4 = R^2 - (R-a)^2$, т. е. $s = \sqrt{4R^2 - (2R-2a)^2} = \sqrt{d^2 - (d-2a)^2}$. В табличках длина хорды вычисляется именно по этой формуле.

* * *

С окружностью связана весьма любопытная, хотя и очень грубая, приближённая формула $S = L^2/12$, где S — площадь круга, L — длина окружности. В Вавилоне использовалась также формула $L = 3d$, где d — диаметр.

Происхождение формулы $S = L^2/12$ непонятно; у нее нет геометрической наглядности. В статье [14] Зайденберг выдвинул две гипотезы о происхождении этой формулы. Комбинируя встречающиеся в табличках формулы $S = L^2/12$ и $L = 3d$, можно получить формулы $S = Ld/4$ и $S = 3d^2/4$. Зайденберг поэтому считает весьма вероятным, что интересующая нас формула была получена подстановкой выражения $d = L/3$ в одну из этих формул. Предпочтение он отдаёт формуле $S = Ld/4$ по следующим причинам:

1. Эта формула в отличие от всех остальных точная. (Она связана с представлением круга в виде объединения бесконечно малых равнобедренных треугольников с вершинами в его центре.) В этом случае становится понятным спокойное отношение вавилонских математиков к столь грубому приближению как $\pi \approx 3$.

2. В одной из вавилонских табличек площадь полукруга вычисляется как четверть произведения длины дуги полукруга на его диаметр.

Длина окружности и площадь круга выражаются через диаметр формулами $L = \pi_1 d$ и $S = \pi_2 d^2/4$. Было ли вавилонским математикам известно, что $\pi_1 = \pi_2$? Приближённая формула $S \approx L^2/12$ эквивалентна равенству $\pi_2 d/4 \approx \pi_1^2 d^2/12$, т. е. $\pi_1^2 = 3\pi_2$, из которого никак нельзя сделать вывод о том, что $\pi_1 = \pi_2$. Но соотношение $S = Ld/4$ сразу же приводит к равенству $\pi_1 = \pi_2$. Поэтому вавилонские математики могли понимать, что $\pi_1 = \pi_2$.

1.2.8. Объём усечённой пирамиды

В одной из вавилонских табличек приведено вычисление объема усечённой пирамиды с квадратными основаниями. Метод разрезания на части позволяет найти объём не любой пирамиды, поэтому вывод формулы объёма пирамиды в общем случае требует предельного перехода. Но вычислить объём некоторых пирамид можно путём разрезания куба. Например, куб можно разрезать на шесть равных пирамид, взяв в качестве их общей вершины центр куба, а в качестве оснований — его грани (рис. 1.16). В этих пирамидах угол между плоскостями боковых граней и плоскостью основания равен 45°. В табличке вычисления производятся для усеченной пирамиды именно с таким углом между боковыми гранями и основанием. Таблички с вычислением объёмов

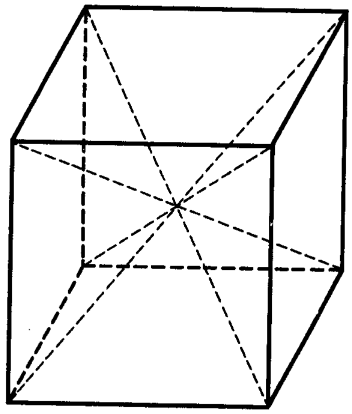

Рис. 1.16.

других пирамид не известны, поэтому нет оснований делать выводы о том, что вавилонские математики умели вычислять объём любой пирамиды.

Текст интересующей нас таблички, к сожалению, испорчен в очень важном для расшифровки месте. В задаче требуется найти объём, вероятно, водохранилища, имеющего форму усеченной пирамиды с квадратными основаниями, причём известны сторона верхнего (большего) основания $a = 10$, высота пирамиды $h = 1{,}5$ (сторона и высота заданы в разных единицах измерения, и решение начинается с того, что высота приводится к тем же единицам измерения, что и сторона) и «наклон» 1, соответствующий углу 45°. Сторона b другого основания вычисляется как $10 - 3 = 7$, т. е. $b = a - 2h$. Затем берётся величина $17/2 = 8{,}5$, т. е. $(a + b)/2$. Эта величина возводится в квадрат; получаем $72\frac{1}{4}$. Затем с величиной $(a - b)/2$ производится некоторая операция, в результате которой получается $3/4$. Но какая именно операция, непонятно, потому что текст испорчен. По поводу того, что делается в табличке с величиной $(a - b)/2$, есть два мнения. Согласно одному мнению вычисляется величина $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$. В этом случае мы получаем верную формулу

$$V = h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{c}\right)^2\right],$$

но такое толкование не очень хорошо согласуется с остатками текста. Согласно другому мнению вычисляется величина $\frac{a-b}{4} = \frac{3}{4}$. В этом случае мы получаем бессмысленную формулу

$$V = h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{a-b}{c}\right],$$

но такое толкование всё же нельзя исключить.

Формула для вычисления объёма усеченной пирамиды могла быть получена, например, следующим образом. Слагаемое $h\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ соответствует, скорее всего, параллелепипеду с высотой h, основанием которого является квадрат со стороной $(a + b)/2$. Такой параллелепипед образуют плоскости оснований усеченной пирамиды и плоскости, проходящие через средние линии боковых граней (которые являются трапециями) перпендикулярно плоскостям оснований. Разрежем усеченную пирамиду по этим плоскостям. В результате получим четыре пирамиды, четыре призмы и ещё некоторую фигуру (рис. 1.17). Если же фигуру попытаться дополнить призмами до параллелепипеда, то призмы перекроются, причём их общими частями будут четыре такие же пирамиды, какие были получены раньше. Высоты у всех пирамид равны $h/2$, а основания являются квадратами со стороной $(a - b)/4$. Сумма объёмов этих пирамид равна $\frac{8}{3} \cdot \frac{h}{2}\left(\frac{a-b}{4}\right)^2 = \frac{h}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, причём формулу для вычисления объёма таких пирамид можно получить путём разрезания куба.

1.2.9. Арифметические и геометрические прогрессии

Вавилоняне знали правило суммирования n членов арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

В вавилонских табличках III–II вв. до н.э. встречаются задачи с суммированием членов геометрической прогрессии, например, $1, 2, 2^2, \ldots, 2^9$.

Наиболее замечательно правило вычисления суммы $1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2$. Но оно встречается уже после того, как суммы квадратов научился вычислять Архимед, и неизвестно был ли получен этот результат самостоятельно.

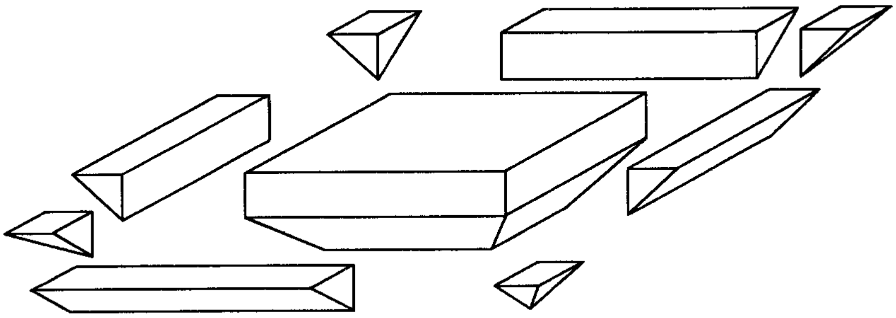

Рис. 1.17.

1.2.10. Заключение

Математика в Древнем Египте и Вавилоне не была дедуктивной наукой, как впоследствии в Греции. Она имела догматический характер, что отражало авторитарный склад мышления в деспотических и жёстко иерархических государствах. Математикам не нужно было убеждать других в истинности их правил и методов, никто с ними не спорил. Становление и развитие математики как дедуктивной науки связано с Древней Грецией, где по многим вопросам происходили жаркие споры философов.

Литература

[1] Вайман А. А. *Длина окружности и площадь круга в древнеегипетской математике.* В кн.: Древний Египет. Сб. статей. М.: Изд. Вост. литературы, 1960. С. 97–102.

[2] Вайман А. А. *Шумеро-вавилонская математика.* М.: Изд. Вост. литературы, 1961.

[3] ван дер Варден Б.Л. *Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции*, М.: ГИФМЛ, 1959.

[4] *История математики с древнейших времен до начала XIX века*, в трех томах. Под редакцией А.П.Юшкевича.

Том первый. *С древнейших времен до начала Нового времени*, М.: Наука, 1970.

[5] Прасолов В. В. *Геометрические задачи древнего мира*, М.: Фазис, 1997.

[6] Раик А. Е. *Очерки по истории математики в древности*, Саранск: Мордов. кн. изд., 1967.

[7] Цейтен Г.Г. *История математики в древности и в Средние века*, М.-Л.: ГОНТИ, 1938.

[8] Bruins E. M. Рецензия на кн.: Gillings R. J., *Mathematics in the Time of the Pharaohs*, Cambridge, Mass.: MIT Press, 1972.
Janus, 1972, Vol. 59, No. 1-2-3, p. 239-248.

[9] Gerdes P. *Three alternate Methods of Obtaining the Ancient Egyptian Formula for the Area of the Circle.* Historia Math., 1985, Vol. 12, No. 3, p. 261–268.

[10] Kline M. *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York: Oxford Univ. Press, 1972.

[11] Robins G., Shute C. D. *Mathematical Bases of Ancient Egyptian Architecture and Graphic Art*, Hist. Math., Vol. 12, No. 2, p. 107–122.

[12] Seidenberg A. *The Ritual Origin of Geometry*, Archive Hist. Ex. Sci., 1962, Vol. 1, No. 5, p. 488–527.

[13] Seidenberg A. *On the Area of a Semi-Circle*, Archive Hist. Ex. Sci., 1972, Vol. 9, No. 3, p. 171–211.

[14] Seidenberg A. *On the Volume of a Sphere*, Archive Hist. Ex. Sci., 1988, Vol. 39, No. 2, p. 97–119.

[15] Weil A. *Number Theory. An approach through history from Hammurapi to Legendre*, Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1984.

Предметный указатель