Оглавление

2. Древняя Греция **5**
2.1. Фалес Милетский (624-546 до н.э.) 6
2.2. Пифагор (580-520 до н.э.) 8
2.3. Зенон (490-430 до н.э.) 13
2.4. Три классические задачи на построение 17
2.4.1. Удвоение куба 18
2.4.2. Трисекция угла 25
2.4.3. Квадратура круга 28
2.5. Гиппократ Хиосский (470-410 до н.э.) 29
2.6. Феодор Киренский (465-398 до н.э.) 35
2.7. Архит Тарентский (428-350 до н.э.) 37
2.8. Платон (428-347 до н.э.) 41
2.9. Теэтет Афинский (415-369 до н.э.) 45
2.10. Евдокс Книдский (408-355 до н.э.) 46
2.11. Диностратт (390-320 до н.э.) 49
2.12. Аристотель (384-322 до н.э.) 58
2.13. Менехм (380-320 до н.э.) 60
2.14. Евклид (325-265 до н.э.) 63
2.14.1. Книга I 66
2.14.2. Книга II 70
2.14.3. Книга III 77
2.14.4. Книга IV 78
2.14.5. Книга V 79
2.14.6. Книга VI 80
2.14.7. Книги VII-IX 81
2.14.8. Книга X 82

2.14.9. Книга XI 82
2.14.10.Книга XII 83
2.14.11.Книга XIII 83
2.14.12.Другие сочинения Евклида 88
2.15. Аристарх Самосский (310-230 до н.э) 88
2.16. Архимед (287-212 до н.э.) 89
2.16.1. Биография 89
2.16.2. «Метод» 94
2.16.3. О шаре и цилиндре 99
2.16.4. Измерение круга 102
2.16.5. О коноидах и сфероидах 103
2.16.6. О спиралях 104
2.16.7. Квадратура параболы 107
2.16.8. Книга лемм 107
2.16.9. Теорема о ломаной, вписанной в круг 110
2.16.10.Формула Герона 111
2.16.11.Трисекция угла 113
2.16.12.Построение правильного семиугольника 114
2.16.13.Исчисление песка 114
2.16.14.Полуправильные многогранники 115
2.17. Никомед (280-210 до н.э.) 115
2.18. Эратосфен Киренский (276-194 до н. э.) 120
2.19. Аполлоний Пергский (262-190 до н.э.) 123
2.19.1. Книга I 123
2.19.2. Книга II 126
2.19.3. Книга III 127
2.19.4. Книга IV 127
2.19.5. Книга V 127
2.19.6. Книга VI 128
2.19.7. Книги VII и VIII 128
2.19.8. Другие сочинения Аполлония 128
2.20. Зенодор (ок. 200-140 до н. э.) 129
2.21. Гипсикл Александрийский (ок. 190-120 до н. э.) 130

2.22. Герон Александрийский (ок. 10-75) 130
2.23. Менелай Александрийский (70-130) 135
2.24. Клавдий Птолемей (85-165) 136
2.25. Диофант Александрийский (200-284) 137
2.26. Папп Александрийский (290-350) 139
2.26.1. Биография 139
2.26.2. Обобщение теоремы Пифагора 141
2.26.3. Окружности, вписанные в арбелон 142
2.26.4. Теорема Паппа–Гульдена 147
2.26.5. Теоремы Паппа и Дезарга 147
2.26.6. Теорема о центре масс 150
2.26.7. Итерационное удвоения куба 151

Глава 2.

Древняя Греция

Развитие математики в Древней Греции началось в Малой Азии, в ионийских городах. Фалес Милетский испытал большое влияние математики Древнего Египта и Вавилона, которые он посетил во время своих путешествий и куда он уже в старости советовал поехать юному Пифагору. В последующем развитии важнейшую роль играла пифагорейская школа, основанная в так называемой Великой Греции (восточное побережье Италии, где в то время были многочисленные греческие колонии). Затем центр сместился в Афины, в школы Платона и Аристотеля. А последняя стадия связана с городом Александрия в Египте; после завоеваний Александра Македонского этот город находился в сфере влияния греческой культуры. И здесь снова греческая математика испытывает большое влияние математики Древнего Египта и Вавилона (очень велико было также влияние вавилонской астрономии).

Слово «математика» греческого происхождения. В современном значении оно встречается впервые у Аристотеля. Ещё у Платона это слово означало любой важный предмет изучения. В диалоге «Государство» Платон считает главной математикой идею Бога. Но в «Законах» он говорит, что есть три математики, наиболее подходящих свободнорождённому: арифметика, наука измерения (геометрия) и астрономия. Это уже весьма близко к современному смылу слова «математика». Такое употребление этого слова связано с пифагорейской школой, многие представители которой были друзьями Платона. Пифагорейцы называли математиками тех, кто глубоко усвоил их учение, основную часть

которого составляла именно математика в современном смысле. Последователи Аристотеля объясняли значение слова «математика» так. Риторику и поэзию может понимать и тот, кто их специально не изучал. А предмет, называемый математикой, может понять только тот, кто его предварительно изучил.

Греческую науку часто изображают чисто теоретической, далёкой от практики и от наблюдений. Это неправильное представление. Например, астрономические наблюдения проводились очень тщательно. В частности, было отмечено лунное затмение в такой момент, когда Солнце и Луна находились над горизонтом (были видимы). Это противоречило объяснению лунных затмений (Луна попадает в тень, отбрасываемую Землёй). Над этим явлением греческие физики и математики долго думали. Возможно, именно из-за него Анаксагор и некоторые другие считали, что есть другие небесные тела, которые иногда вызывают лунные затмения. Потом нашли правильное объяснение: в действительности Солнце находится ниже горизонта, но из-за преломления лучей света кажется, что оно находится выше горизонта. В связи с этим приводили опыт с пустым кувшином и кольцом, лежащим на его дне. Сначала кольцо не видимо, но после наливания воды в кувшин оно становится видимым.

Трудно проследить, какие именно обстоятельства привели к той строгости рассуждений, которой придерживались древнегреческие математики. Строгость их рассуждений — явление исключительное. Когда древнегреческая наука угасла, эта строгость была утрачена на два тысячелетия, и возврат к древнегреческой строгости рассуждений произошёл лишь в 19 веке.

2.1. Фалес Милетский (624-546 до н.э.)

Одним из первых древнегреческих геометров был Фалес, который родился в городе Милет в Малой Азии. Фалес Милетский многое перенял из геометрии Египта и Вавилона во время своих путешествий. Известен рассказ о том, что он вычислил высоту египетской пирамиды,

измерив её тень в тот момент, когда длина тени, отбрасываемой предметом равна длине самого предмета. Так пишут ранние историки. Но Плутарх (живший уже гораздо позже) пишет, что Фалес при этом измерении рассматривал подобные треугольники и приравнивал отношения соответственных сторон. Это, скорее всего, просто домыслы Плутарха.

Однажды Фалес, предвидя большой урожай оливок, взял в наём все маслодавильни и, став фактическим монополистом в изготовлении оливкового масла, нажил целое состояние.

Известен рассказ Геродота о том, что Фалес предсказал солнечное затмение (современные историки полагают, что речь идёт о солнечном затмении 585 г до н.э.). Предсказание солнечного затмения требует многолетних астрономических наблюдений, поэтому Фалес должен был хорошо знать вавилонскую астрономию.

Считается, что Фалес открыл следующие геометрические факты: 1) диаметр делит круг пополам; 2) углы при основании равнобедренного треугольника равны; 3) углы между двумя пересекающимися прямыми равны; 4) если сторона и прилегающие к ней углы одного треугольника равны стороне и прилегающим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны; 5) вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой.

Сообщение Прокла о том, что Фалес первым доказал, что диаметр делит круг пополам, пытались оспорить многие историки математики. Это предложение не доказывается даже у Евклида, и если Фалес считал необходимым доказывать такие очевидные вещи, то это означает, что математика Фалеса обладала строгой логической структурой. Но со свидетельством Прокла, которому были доступны утерянные впоследствии источники, спорить трудно. Фалес заслуженно пользуется славой человека, который ввёл в геометрию доказательства.

В список геометрических фактов, открытых Фалесом, включено лишь то, о чём есть непосредственные свидетельства древнегреческих источников. В нём отсутствует теорема, которая в последние десятилетия называется у нас во многих школьных учебниках теоремой

Фалеса, а до того без специального названия входила обычно в раздел «теоремы о пропорциональных отрезках». Некоторые историки математики, основываясь, в частности, на крайне сомнительном свидетельстве Плутарха, решили, что Фалес мог знать теорему, приписываемую ему школьными учебниками. Поэтому термин «теорема Фалеса» получил распространение в нашей стране и отчасти во Франции, но не в Англии и не в Германии. Точнее говоря, на английском языке теоремой Фалеса обычно называют теорему о том, что вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой.

Фалеса, когда он уже был стариком, посетил юноша Пифагор. Фалес поделился с ним тем, что знал, и посоветовал поехать в Египет для продолжения изучения геометрии.

2.2. Пифагор (580-520 до н.э.)

Для современников Пифагор был прежде всего религиозным пророком. Он создал мистическое религиозное учение, которое отличалось от многочисленных мистических религий того времени тем, что очищение души и соединение с божеством достигались при помощи математики. Это учение было столь влиятельным, что Пифагора многие его ученики обожествляли.

Пифагор родился на острове Самос в Эгейском море. Юношей он отправился в странствия, продлившиеся более 20 лет. Прежде всего Пифагор посетил Милет, чтобы встретиться с Фалесом. Фалес передал ему все знания, какие мог, и побудил его плыть в Египет. Много лет Пифагор провел в храмах Египта, изучая астрономию и геометрию. После этого 10 лет он находился в плену в Вавилонии, а затем вернулся на Самос. Недолго пожив там, он переехал в город Кротон на юге Италии (там было так много древнегреческих колоний, что эта область Италии называлась в то время Великой Грецией). В Кротоне у Пифагора сначала было 200 учеников, а потом более 2000. Он проповедовал презрение к славе и богатству, уважение к старшим, воздержание от мяса, отказ от вина; его ученики принимали обет щадить

и не губить животных, не вредных для человека. Пифагорейцы считали свое имущество общим и не брали плату за обучение тех, кто к ним приходил. Важную роль в воспитании учеников Пифагор отводил музыке. Он первым разработал теоретические основы музыки и установил, что числовые отношения играют в музыке большую роль. Это побудило Пифагора обратить внимание на важность количественных соотношений в познании природы; ему принадлежит тезис «Все вещи суть числа». В его учении числа и мистика чисел играли важную роль. Например, Пифагор учил, что небесным богам нужно приносить нечётное, а подземным чётное число приношений.

Пифагорейцы верили в переселение душ. Как пишет Ямвлих, Пифагор очень живо и ясно припоминал множество случаев из своих прежних жизней, которые прожила когда-то его душа перед тем, как была заключена в это тело, и с помощью несомненных доказательств утверждал, что он был Эвфорбом, сыном Панфоя, противником Патрокла. Из стихов Гомера Пифагор особенно восхвалял строки о «гордом сердцем Эвфорбе».

Ученики Пифагора были разделены на две группы. В первой группе были начинающие. Их называли акусматиками, т.е. слушателями, потому что они прослушивали обобщенный свод знаний без подробного изложения и слушали поучения без доказательств. Более продвинутых учеников Пифагора называли математиками, т.е. познавателями; они изучали всю суть науки и занимались доказательствами.

Известна история об ученике Пифагора, которому Пифагор сначала платил деньги за каждую усвоенную им теорему, а потом ученик так увлёкся, что уже сам захотел платить за обучение.

Традиционно пифагорейцы изучали четыре предмета: арифметику, музыку, геометрию и астрономию. Школа Пифагора существовала много столетий после его смерти. Именно в этой школе была обнаружена и доказана иррациональность числа $\sqrt{2}$ (несоизмеримость диагонали квадрата и его стороны). Это открытие потребовало пересмотра всех основ пифагорейской математики, потому что противоречило основному тезису «Все вещи суть числа». Дело в том, что под

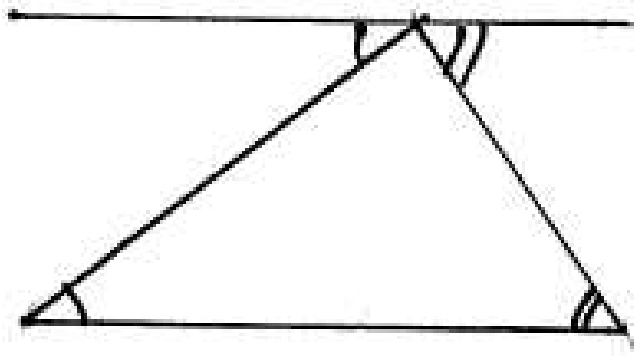

Рис. 2.1.

числами подразумевались только натуральные числа и их отношения.

Пифагорейцы нашли рекуррентный способ построения приближений числа $\sqrt{2}$ рациональными числами d_n/a_n, где $a_{n+1} = a_n + d_n$, $d_{n+1} = 2a_n + d_n$ и $a_1 = d_1 = 1$.

Разделение чисел на чётные и нечётные восходит к Пифагору.

Пифагорейцы доказали теорему о том, что сумма углов любого треугольника равна двум прямым углам. Их доказательство было следующее: через вершину треугольника проводилась прямая, параллельная противоположной стороне, и приравнивались две пары накрест лежащих углов (рис. 2.1). По-видимому, пифагорейцам была известна и теорема о сумме углов многоугольника (и о сумме его внешних углов — эту теорему упоминает Аристотель). Пифагорейцы знали, какими правильными многоугольниками можно замостить плоскость.

С именем Пифагора связана теорема о том, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах. Сведения о том, как именно доказывал Пифагор эту теорему, до нашего времени не дошли. Сохранились лишь неясные упоминания о «знаменитом чертеже» Пифагора, причем уже древнегреческие историки не были уверены, что этот чертёж относился именно к теореме Пифагора. Ситуация осложняется ещё и тем, что у пифагорейцев был обычай все свои открытия приписывать Пифагору.

Пифагор знал, что площадь квадрата, сторона которого равна це-

лому числу n, равна n^2. Поэтому для прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами он знал, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Пифагору был известен прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5, т.е. он знал равенство $3^2 + 4^2 = 5^2$. Он получил и более общее равенство

$$m^2 + \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2,$$

где число m нечётно. Геометрический смысл этого равенства — добавление гномона к квадрату; требуется лишь выбрать гномон так, чтобы он был полным квадратом. Другое равенство такого типа приписывают Платону:

$$(2m)^2 + (m^2-1)^2 = (m^2+1)^2,$$

где m — любое целое число. Геометрически это равенство означает добавление к квадрату двух последовательных гномонов.

Первоначально *гномоном* (т.е. индикатором) в Древней Греции называли часть солнечных часов, отбрасывающую тень. Затем так стали называть иструмент, предназначенный для построения прямых углов. В математике этот термин означал фигуру, полученную при вырезании меньшего квадрата из большего (рис. 2.2, *а*). Более общий гномон, полученный при вырезании меньшего параллелограмма из большего (рис. 2.2, *б*), рассматривает Евклид. Гномон играл большую роль в математике пифагорейцев. В геометрии с помошью гномона решали задачи на приложение площадей, а в арифметике с помошью гномона доказывали, что $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$. Эта формула (представление квадрата в виде объединения гномона и меньшего квадрата) была известна Пифагору.

Метод приложения площадей (историки математики часто называют его «геометрическая алгебра») был разработан пифагорейцами (если не самим Пифагором). Этот метод позволяет геометрически решать квадратные уравнения.

У пифагорейцев была теория пропорций, но только для соизмеримых величин. (Для несоизмеримых величин теорию пропорций разра-

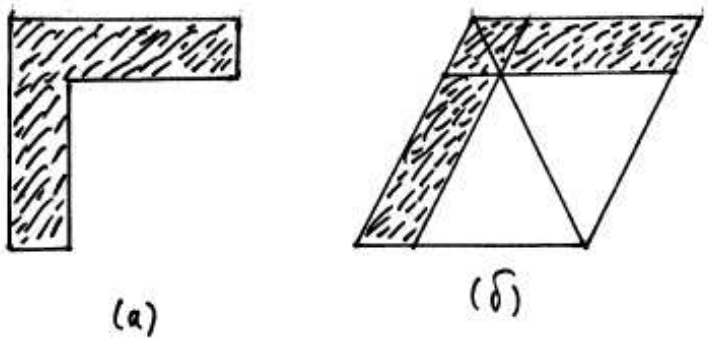

Рис. 2.2.

ботал Евдокс.) Но пифагорейцы без колебаний пользовались ей в применении к любым величинам до того момента, когда была открыта несоизмеримость стороны квадрата и его диагонали.

Золотое сечение[1] было открыто Пифагором; оно играет большую роль в пифагорейской теории музыки. Золотое сечение тесно связано с правильным пятиугольником и, соответственно, с правильной пятиконечной звездой (пентаграммой). Пятиконечная звезда служила опознавательным знаком для пифагорейцев; она символизировала здоровье. Когда один пифагореец умирал на чужбине и не мог заплатить человеку, который за ним ухаживал, он велел ему изобразить на жилище пентаграмму: если мимо будет проходить пифагореец, то он обязательно спросит о ней. И действительно, несколько лет спустя проходивший мимо пифагореец увидел этот знак, и хозяин дома получил богатое вознаграждение.

Пифагорейцы, по-видимому, имели представление о правильных многогранниках. Найден этрусский додекаэдр; это означает, что додекаэдр имеет весьма древнее происхождение. Пифагореец Гиппас дал построение шара, описанного вокруг додекаэдра. Есть указание, что куб, тетраэдр и додекаэдр происходят от пифагорейцев, а октаэдр и икосаэдр введены Теэтетом. Но, возможно, Теэтет лишь обосновал то наглядное представление, которое было у пифагорейцев. Октаэдр и

[1]Первое дошедшее до нас письменное упоминание о золотом сечении содержится в «Началах» Евклида. Но там оно называется делением отрезка «в крайнем и среднем отношении». В 1509 г. известный итальянский математик Лука Пачолли использовал термин «божественная пропорция». А термин «золотое сечение» ввёл немецкий математик Мартин Ом (1792-1872), младший брат знаменитого физика Георга Ома, в честь которого названа единица измерения сопротивления.

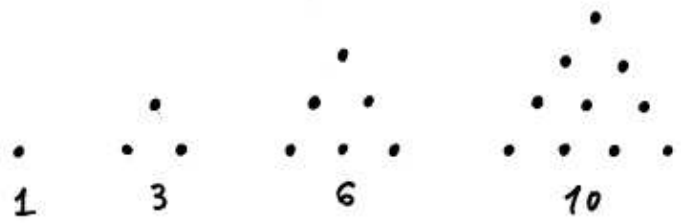

Рис. 2.3.

икосаэдр отличаются от остальных правильных многогранников тем, что в вершине сходятся не 3 грани, а 4 или 5, и поэтому они образуют нежёсткую конструкцию. Возможно, именно с этим связано то, что октаэдр и икосаэдр, были обнаружены позже остальных правильных многогранников.

Весьма вероятно, что Пифагор ввёл треугольные числа. (Треугольные числа — это числа вида $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$; происхождение такого названия поясняет рис. 2.3). Квадратные числа (квадраты целых чисел) были известны Пифагору.

Во времена Пифагора были известны три средних: арифметическое, геометрическое и гармоническое.

Пифагор сделал важные открытия и в астрономии. Он одним из первых утверждал, что Земля имеет форму шара. Вряд ли такой вывод он сделал из того, что во время лунного затмения тень, отбрасываемая Землёй, круглая. Такое объяснение лунных затмений предложил лишь гораздо позже Анаксагор. Скорее всего, Пифагор исходил из эстетических математических представлений о совершенстве круглой формы. Пифагор также установил тождественность утренней и вечерней звезды (Венеры). До него считали, что Венера утром и Венера вечером (утренняя звезда и вечерняя звезда) — это две разные планеты

2.3. Зенон (490-430 до н.э.)

Зенон не был математиком, но его рассуждения о природе бесконечного оказали очень большое влияние на развитие греческой математики, заставив математиков осторожно обращаться с бесконечностью — не

только исключить актуальную бесконечность, но и с потенциальной бесконечностью обращаться более аккуратно, чем это было принято до Зенона.

Зенон привёл логические рассуждения, показывающие, что как пространство, так и время, одновременно должны быть бесконечно делимыми и не могут быть бесконечно делимым, и что невозможна множественность вещей. Он был любимым учеником Парменида — главы школы элеатов, который первым начал строить философию на основе логических рассуждений. Симпликий писал, что до Парменида философы высказывали своё мнение без доказательств. Именно Парменид впервые высказал логические законы тождества и исключённого третьего и применял их в своих доказательствах.

Апории Зенона сохранились лишь в пересказе его противников, дававших свои объяснения его «заблуждений». Не исключено, что они несколько исказили рассуждения Зенона, чтобы их было проще опровергать. При этом сохранилась лишь малая часть из 40 разработанных Зеноном апорий, основанных на трудностях, происходящих из анализа непрерывности.

Наиболее известны следующие апории Зенона (первые 4 из них приводит Аристотель с своей книге «Физика»).

1. «Дихотомия». Движущееся тело перемещается на какое-то расстояние. Но всякое расстояние делимо до бесконечности, поэтому движущееся тело должно сначала пройти половину того расстояния, на которое оно перемещается, и лишь после этого всё расстояние. Однако до этого тело должно пройти половину оставшейся половины расстояния и т.д. Стало быть, половины бесконечны, а бесконечные по числу величины нельзя пройти за конечное время.

2. «Ахиллес и черепаха». Пусть быстроногий Ахиллес бежит за черепахой. Ему требуется какое-то время, чтобы добежать до исходного пункта черепахи, уползающей от него. За то время, за которое Ахиллес достиг пункта, где находилась черепаха, она проползла какое-то расстояние, которое Ахиллесу придётся пробежать. За это время черепаха снова проползёт какое-то расстояние и т.д. В силу бесконечной

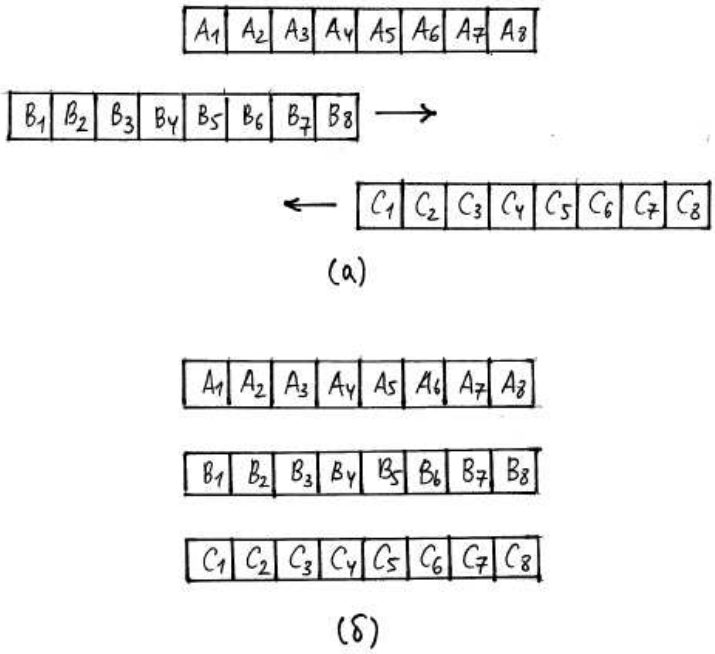

Рис. 2.4.

делимости пространства можно брать всё меньшие и меньшие расстояния — до бесконечности. Следовательно, быстроногий Ахиллес не сможет догнать медленно ползущую черепаху.

3. «Стрела». Движущаяся стрела в любой момент либо движется, либо находится в покое. Если момент времени неделим, то стрела в этот момент не может двигаться, потому что если бы она двигалась, то момент можно было бы разделить. Но если стрела не может двигаться в каждый момент, то она не может двигаться вообще, потому что время складывается из моментов. Следовательно, движущаяся стрела пребывает в покое.

4. «Стадион». На стадионе неподвижно стоят одинаковые предметы $A_1, \ldots, A_n$ (на рис. 2.4, *а* $n = 8$). Предметы $B_1, \ldots, B_n$ и $C_1, \ldots, C_n$, равные по размеру предметам A и расположенные так, как показано на рис. 2.4, *а*, начинают двигаться в указанных направлениях с равными скоростями. Предметы B_n и C_1 одновременно окажутся на противоположных концах предметов A (рис. 2.4, *б*). При этом предмет C_8 пройдёт мимо всех предметов B, а предмет B_8 мимо лишь половины предметов A. Следовательно, время будет тоже половинным, так как каждый предмет мимо каждого проходит в одинаковое время.

(Аристотель, опровергая это рассуждение Зенона, говорит, что ошибка в предположении, что предмет затрачивает равное время, двигаясь мимо неподвижного предмета и мимо движущегося. Но Зенон здесь рассуждает о неделимых моментах времени и неделимых элементах пространства.)

5. «Куча». Одна песчинка, очевидно, не образует кучи песка. Если n песчинок не образуют кучу песка, то после добавления ещё одной песчинки они по-прежнему не будут образовывать кучи песка. Следовательно, никакое число песчинок не образует кучу песка.

Первая и вторая апории должны были показать противоречивость предположения о том, что возможно бесконечное деление пространства и времени. После этого оставалось предположить, что пространство и время состоят из неделимых элементов. Именно против этого предположения направлены третья и четвёртая апории.

Техника доказательств была разработана в жарких спорах представителей разных философских школ, под жёсткой критикой со стороны философов-противников. Важную роль сыграли также публичные выступления в суде, где нужно было доказывать свою правоту безупречными рассуждениями и опровергать утверждения противника. Представление древнегреческих математиков о том, что такое доказательство, практически такое же, как у нас. Доказательство состоит из исходных положений, которые должны быть ясны всем, и промежуточных рассуждений, с которыми должен быть согласен собеседник. Правила рассуждений были выработаны экспериментально, в спорах. Как только аксиомы сформулированы, никакие новые попытки прибегнуть к интуиции уже недопустимы — правдоподобные рассуждения нельзя принимать в расчёт. Но это, конечно, было только теоретическое требование, на практике оно не могло быть выполнено.

От разрушительной критики Зеноном понятия бесконечности впечатление у всех философов осталось неизгладимое. По-видимому, именно из-за этой критики древнегреческие математики избегали вводить в рассуждения «актуальную бесконечность» (т.е. множества, содержащие бесконечное число элементов, которые предполагаются существу-

ющими одновременно) и ограничивались «потенциальной бесконечностью», т.е. возможностью увеличивать данную величину (или уменьшать её, если речь идёт о «непрерывной» величине). Типичный пример — формулировка Евклида: «Первых чисел существует больше всякого предложенного количества первых чисел». Евклид также нигде не говорит о бесконечных прямых, а говорит только об отрезках, хотя и использует при этом слово «прямая». Он отмечает, что отрезок можно многократно продолжать, получая при этом каждый раз новый отрезок (но не всю прямую). Знаменитый пятый постулат также использует возможность продолжить отрезки: «Если секущая пересекает две прямые так, что сумма односторонних углов меньше 180°, то продолженные неограниченно эти две прямые встретятся с той стороны, где сумма односторонних углов меньше 180°.» (Здесь под словом «прямая», конечно, подразумевается отрезок, потому и говорится о продолжении прямой.)

Метод исчерпывания, разработанный древнегреческими математиками для доказательства теорем, которые впоследствии доказывались переходом к пределу, избегал актуальной бесконечности, и именно поэтому удовлетворял высочайшим требованиями строгости. Создатели анализа неоднократно сетовали, что разработанные ими методы с точки зрения строгости очень сильно уступают методу исчерпывания, и лишь иногда высказывали надежду, что когда-нибудь их методы получат такое же строгое обоснование, как метод исчерпывания.

2.4. Три классические задачи на построение

В дальнейшем, начиная уже с Гиппократа Хиосского, нам неоднократно предстоит встретиться с тремя классическими задачами на построение, интерес к которым у древнегреческих геометров возник очень рано и сохранялся до самого заката древнегреческой математики. Поэтому сейчас уместно вкратце рассказать об этих задачах, нарушив хронологическую последовательность.

2.4.1. Удвоение куба

О возникновении задачи удвоения куба сохранилась следующая легенда: «...во время эпидемии чумы послали афиняне в Дельфы вопросить оракула, что им сделать, чтоб чума прекратилась. Бог ответил им: удвоить алтарь и принести на нем жертвы. А так как алтарь был кубической формы, они взгромоздили на него ещё один такой же куб, думая тем исполнить повеление оракула. Когда же чума после этого не прекратилась, отправились они к Платону и спросили, что же теперь делать. Тот отвечал: „Сердится на вас бог за незнание геометрии“, — и объяснил, что следовало подразумевать здесь не простое удвоение, но найти некое среднее пропорциональное и произвести удвоение с его помощью; и как только они это сделали, чума тотчас же кончилась». Эта легенда сравнительно поздняя; в ней многое искажено: задачей удвоения куба занимался ещё Гиппократ Хиосский, живший до Платона. Но эту легенду сохранило несколько источников. В ней много интересного: для древних греков совсем не чуждым было мнение, что боги могут гневаться за незнание геометрии.

Для практических целей точное решение задачи удвоения куба не было нужно, но математиков она заинтересовала. Гиппократ Хиосский переформулировал задачу примерно так: «По отрезкам a и $2a$ построить такие отрезки x и y, что $a : x = x : y = y : 2a$». В самом деле, тогда

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{2a} = \frac{1}{2},$$

т. е. $x^3 = 2a^3$. Эта переформулировка была существенна. Алгебра возникла гораздо позже, и древнегреческие математики произведение двух отрезков представляли как прямоугольник; для сложения двух произведений отрезков приходилось преобразовывать прямоугольники в равновеликие им прямоугольники с общей стороной, чтобы их можно было прикладывать друг к другу. Произведение трёх отрезков приходилось рассматривать уже как параллелепипед. Преобразовывать параллелепипеды было бы слишком сложно, а замечание Гиппократа позволяло работать с отношениями отрезков. В дальнейшем

все решали задачу именно в формулировке Гиппократа, причём, как правило, в общем виде: отрезок $2a$ заменяли на произвольный отрезок b и строили такие отрезки x и y, что $a : x = x : y = y : b$. В этом случае

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a}{b} \text{ и } \left(\frac{y}{b}\right)^3 = \frac{a}{b},$$

т. е. $x = \sqrt[3]{a^2 b}$ и $y = \sqrt[3]{ab^2}$. Решение этой задачи позволяло также для прямоугольного параллелепипеда строить ребро куба, объём которого равен объёму параллелепипеда (по этому поводу в одном древнегреческом тексте говорится: «После этого мы сможем вообще любой заданный ограниченный параллелограммами объём превращать в куб...»; этот текст Евдема Родосского, друга и ученика Аристотеля, даёт прямое указание на интерес математиков к задаче превращения параллелепипеда в куб). Поясним, как по рёбрам p, q и r прямоугольного параллелепипеда можно построить ребро нужного куба. По данным сторонам p и q прямоугольника строить сторону a квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника, умели уже на самом раннем этапе развития древнегреческой математики. Ясно также, что если $a = \sqrt{pq}$ и $b = r$, то $\sqrt[3]{a^2 b} = \sqrt[3]{pqr}$.

По разным причинам древнегреческие математики при построениях циркуль и линейку предпочитали всем другим инструментам. Здесь, впрочем, нужно сделать уточнение. Ни о циркуле, ни о линейке в их сочинениях речи нет; говорится лишь о «построениях посредством прямых и окружностей». Более того, для Евклида построение окружности означает не совсем то же самое, что использование циркуля. Согласно третьему постулату Евклида, можно строить лишь окружность с данным центром A, проходящую через данную точку B. Окружность с центром A и радиусом BC этот постулат строить не позволял (это построение описано Евклидом в предложении 2 книги 1). Циркуль, конечно же, позволил бы выполнять такие построения. По-видимому, формулировка постулата Евклида связана с уходящим в глубокую древность построением окружностей с помощью колышка и привязанной к нему верёвки. В этом случае для построения окружности с центром A

и радиусом BC пришлось бы сначала забить колышек в точке B, отметить на верёвке точку C, а затем выдернуть колышек и забить его в точке A. Лишь после этого можно было строить требуемую окружность. Такое построение, при котором нужно было забивать колышек не один, а два раза, существенно отличается от элементарного построения.

В Греции циркуль был изобретен в X в. до н. э., задолго до Евклида, в связи с потребностями керамического производства. В это время широкое распространение получил геометрический стиль, и циркуль был нужен для изображения на керамике концентрических окружностей. Греческая мифология связывает изобретение циркуля с именем Талоса (согласно другим источникам — Пердикса), племянника Дедала. О Талосе пишет древнегреческий историк Диодор Сицилийский (I в. до н. э.): «Точно так же, изобретя циркуль и некоторые другие технические приспособления, он достиг большой славы». Римский писатель Гигин (I в. до н. э.) сообщает: «Пердикс, сын сестры Дедала, изобрёл циркуль и пилу из рыбьего хвоста». Об этом изобретении двенадцатилетнего мальчика упоминает даже знаменитый римский поэт Овидий (I в. до н. э.) в поэме «Метаморфозы»:

> Первый железным узлом два железных конца съединил он,
> Чтобы, когда друг от друга они в расстоянии равном,
> Часть стояла одна, другая же круг обводила.

Дедал известен в греческой мифологии как искуснейший изобретатель и архитектор. (Странным образом гораздо более знаменит ныне его неразумный сын Икар, который прославился тем, что, несмотря на подробные наставления отца, так и не научился правильно пользоваться сделанными Дедалом крыльями из перьев, скрепленных воском.) Одарённость отданного ему в обучение племянника, грозившая затмить его славу, вызвала у Дедала зависть, и он столкнул его с акрополя.

* * *

Скорее всего, древнегреческие математики достаточно быстро поняли, что задачу удвоения куба нельзя решить с помощью циркуля

и линейки, хотя доказать этого они не могли и, по-видимому, даже не пытались. По поводу того, чем помимо циркуля и линейки можно пользоваться при построениях, у древнегреческих математиков были разные мнения. Первое решение задачи удвоения куба, полученное великим полководцем и математиком Архитом Тарентским, трудно даже назвать построением. Он получил решение как пересечение цилиндра, конуса и тора. Ни о какой практической реализации такого решения не могло быть и речи. Несколько более позднее решение Менехма было уже в некотором смысле оптимальным: он находил решение как пересечение двух конических сечений. Оптимальным это решение было вот в каком смысле. На последнем этапе развития древнегреческой математики, через несколько веков после Менехма, сложилась следующая классификация задач на построение, изложенная александрийским математиком Паппом:

1) плоские задачи (решаемые с помощью прямых и окружностей, т. е. с помощью циркуля и линейки);

2) пространственные задачи (решаемые с помощью конических сечений, т. е. параболы, гиперболы и эллипса; название, по-видимому, связано с тем, что использовались сечения пространственной фигуры — конуса);

3) граммические задачи, решаемые лишь с помощью других, более сложных кривых линий (от греческого $\gamma\rho\alpha\mu\mu\eta$ — линия).

Папп писал, что если задачу можно решить с помощью прямых и окружностей, то было бы ошибкой использовать в геометрии для её решения другие инструменты. Он был уверен, что задачу удвоения куба нельзя решить с помощью прямых и окружностей.

Классификация Паппа неполная. Она не включает построения, использующие специальные инструменты, а такие построения встречались у древнегреческих математиков нередко. Специальные инструменты для решения задачи удвоения куба использовали Эратосфен и Никомед; специальный инструмент использован также в решении, приписываемом Платону.

За первым решением задачи удвоения куба, полученым Архитом

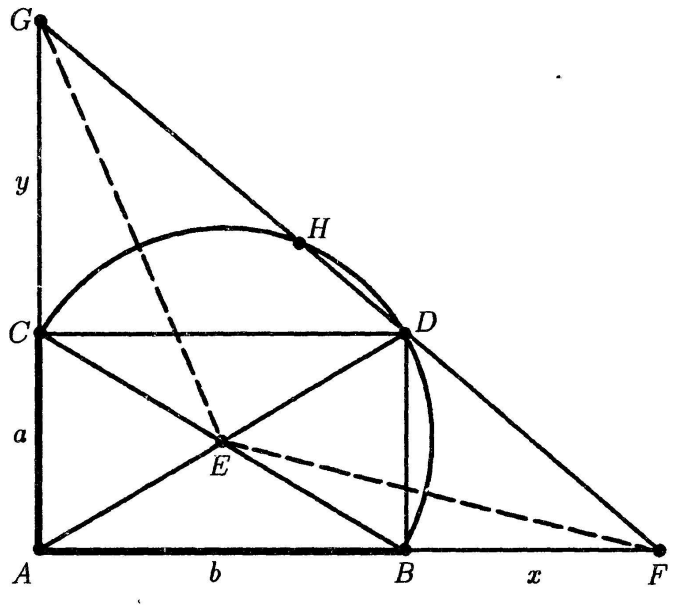

Рис. 2.5.

Тарентским, последовали решения Платона, Менехма и Никомеда. Обо всех этих решениях подробно рассказано в параграфах, посвящённых этим учёным.

Три математика древности, Аполлоний (III в. до н. э.), Филон Византийский (III в. до н. э.) и Герон (I в. н. э.) в разное время предложили фактически одно и то же решение задачи удвоения куба. Но они не указали, с помощью каких инструментов можно было бы осуществить такое построение.

Рассмотрим прямоугольник $ABDC$, где AB и AC — данные отрезки. Пусть E — точка пересечения диагоналей этого прямоугольника. Для решения задачи удвоения куба достаточно выполнить любое из следующих эквивалентных построений (рис. 2.5):

1) провести окружность с центром E так, чтобы точка D лежала на отрезке, соединяющем точки пересечения этой окружности с лучами AB и AC (Аполлоний);

2) провести через точку D прямую так, чтобы описанная окружность прямоугольника $ABDC$ и прямые AB и AC высекали на ней равные отрезки GH и DF (Филон);

3) провести через точку D прямую так, чтобы она пересекала пря-

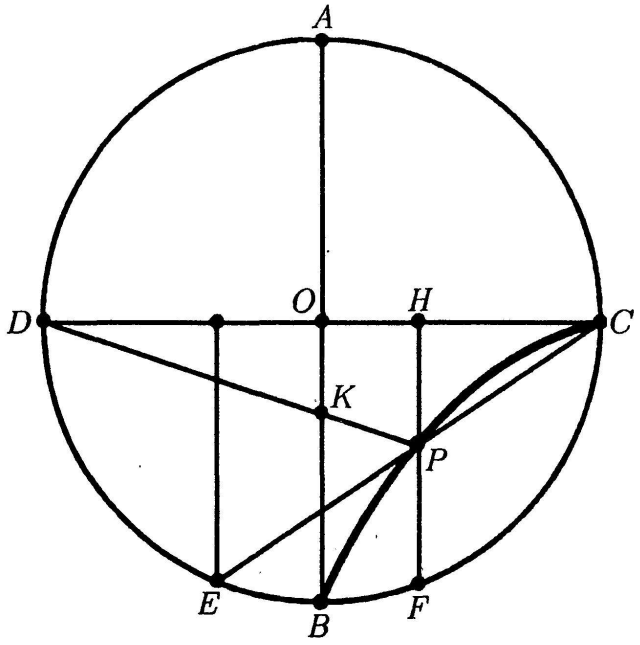

Рис. 2.6.

мые AB и AC в точках, равноудалённых от точки E (Герон).

Построения Аполлония и Герона, очевидно, эквивалентны. Что же касается построения Филона, то достаточно заметить, что точка E лежит на серединном перпендикуляре к отрезку DH, поэтому равенства $GH = DF$ и $GE = EF$ эквивалентны.

Пусть $a = AC$, $b = AB$, $x = BF$ и $y = GC$. Докажем, что $a : x = x : y = y : b$. Из подобия треугольников CGD и BDF следует, что $xy = ab$. Равенство $GE = EF$ можно записать в виде $(y+a/2)^2+b^2/4 = (x + b/2)^2 + a^2/4$, т. е. $x(x + b) = y(y + a)$. Из равенства $a/x = y/b$ следует, что $(a + y)/(x + b) = a/x = y/b$. Остается воспользоваться равенством $x/y = (y + a)/(x + b)$.

Для решения задачи удвоения куба Диокл (II в. до н. э.) предложил использовать кривую, которую впоследствии называли *циссоидой*. Эта кривая получается следующим образом. Проведём в окружности два перпендикулярных диаметра AB и CD. Отложим на дугах BC и BD равные дуги BF и BE. Пусть P — точка пересечения отрезка CE и перпендикуляра, опущенного из точки F на отрезок CD (рис. 2.6). Когда точка F перемещается по дуге BC, точка P заметает циссоиду Диокла.

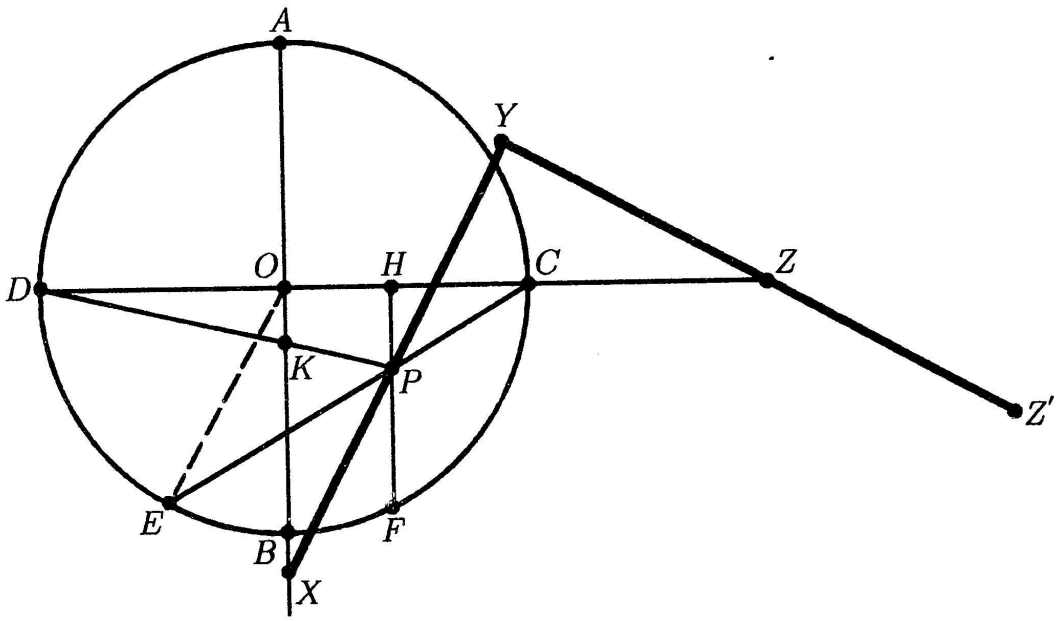

Рис. 2.7.

Так как $\angle HDF = \angle HFC = \angle HCP = \alpha$, то $DH : HF = HF : HC = HC : HP = \operatorname{tg}\alpha$. Поэтому для построения таких отрезков x и y, что $a : x = x : y = y : b$, где a и b — данные отрезки, причём $a > b$, можно поступить следующим образом. Возьмём на радиусе OB такую точку K, что $DO : OK = a : b$. Пусть P — точка пересечения луча DK и циссоиды. Тогда $DH : HF = HF : HC = HC : HP$ и $DH : HP = a : b$. Следовательно, $x = kHF$ и $y = kHC$, где $k = a/DH = b/HP$.

После Диокла почти такие же решения предложили Папп (III в. н. э.) и Спор. В этих решениях проводилась прямая DK (см. рис. 2.6), а затем вокруг точки C начинали вращать линейку; нужно было добиться того, чтобы диаметр AB делил отрезок EP пополам (E и P — точки пересечения линейки с окружностью и с прямой DK соответственно).

Пусть радиус рассматриваемой окружности равен a. Введём систему координат Oxy так, что $x = OH$ и $y = HP$. Равенство $DH \cdot HP = HF \cdot HC$ перепишется тогда в виде $(a + x)y = \sqrt{a^2 - x^2}(a - x)$, т. е. $y^2(a + x) = (a - x)^3$. Таким образом, циссоида задаётся уравнением третьей степени (Диокл рассматривал лишь ту часть этой кривой, которая лежит внутри угла BOC).

О древнегреческих инструментах для построения циссоиды не сохранилось никаких достоверных сведений. Поэтому мы опишем такой инструмент, изобретённый Ньютоном. Проведём в окружности S перпендикулярные диаметры AB и CD (рис. 2.7). Возьмём на луче OC такую точку Z, что $OZ = CD$. В качестве инструмента для построения циссоиды Ньютон предложил использовать прямоугольный треугольник XYZ', у которого длина катета XY равна диаметру окружности S. Пусть P — середина отрезка XY. Если точка X движется по прямой AB, а катет YZ' проходит через точку Z, то точка P движется по циссоиде. Докажем это утверждение. Точки O и Y лежат на окружности с диаметром XZ, а отрезки XY и OZ равны диаметру окружности S, поэтому $XOYZ$ — равнобедренная трапеция. Прямая PC соединяет середины её диагоналей, значит, она параллельна основаниям трапеции и делит отрезок OX пополам. Кроме того, $\angle EPX = \angle YPC = \angle OCP$. А так как $OC = OE$, то $\angle OCP = \angle OEP$. Следовательно, $OE \parallel PX$. В четырёхугольнике $EOPX$ диагональ OX делится диагональю EP пополам, а стороны OE и PX параллельны. Поэтому четырёхугольник $EOPX$ — параллелограмм и отрезок EP делится диаметром AB пополам, а значит, точка P лежит на циссоиде.

2.4.2. Трисекция угла

О возникновении задачи трисекции угла (т. е. деления угла на три равные части) никаких интересных легенд нет. По-видимому, она появилась внутри самой математики в связи с решением задачи о построении правильных многоугольников. Построение правильного пятиугольника циркулем и линейкой должно было произвести на пифагорейцев большое впечатление, потому что правильная пятиконечная звезда была их опознавательным знаком (она символизировала здоровье).

При решении задачи трисекции угла можно ограничиться случаем острого угла, потому что если $\varphi > 90°$, то $\varphi/3 = (\varphi - 90°)/3 + 30°$, а угол $30°$ легко построить циркулем и линейкой.

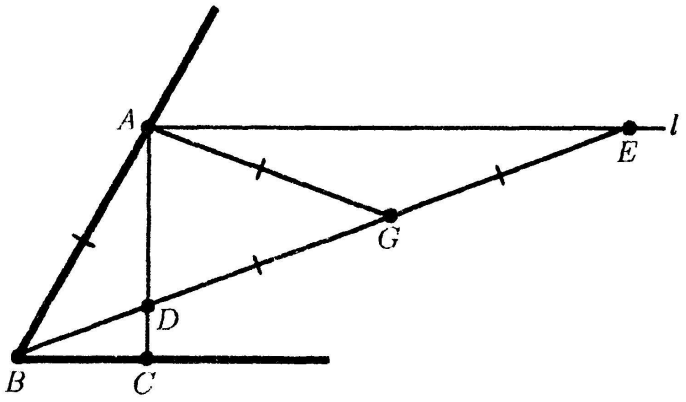

Рис. 2.8.

При решении задач на построение древнегреческие геометры часто использовали так называемый способ «вставок». Он заключается в том, чтобы вставить отрезок данной длины между двумя данными прямыми, т.е. через данную точку провести прямую так, чтобы две данные прямые высекали на ней отрезок данной длины.

С помощью способа «вставок» разделить угол на три равные части очень легко. Возьмем на стороне угла с вершиной B произвольную точку A и опустим из неё перпендикуляр AC на другую сторону (рис. 2.8). Проведём через точку A луч l, сонаправленный с лучом BC. Вставим теперь между лучами AC и l отрезок DE длиной $2AB$ так, чтобы его продолжение проходило через точку B. Тогда $\angle EBC = \angle ABC/3$. В самом деле, пусть G — середина отрезка DE. Точка A лежит на окружности с диаметром DE, поэтому $AG = GE = DE/2 = AB$. Треугольники BAG и AGE равнобедренные, поэтому $\angle ABG = \angle AGB = 2\angle AEG = 2\angle EBE$.

Папп Александрийский показал, что задача «вставления» отрезка между данными перпендикулярными прямыми l_1 и l_2 сводится к построению точки пересечения окружности и гиперболы. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, продолжения сторон BC и CD которого являются данными прямыми, а вершина A является данной точкой, через которую нужно провести прямую, пересекающую прямые l_1 и l_2 в таких точках E и F, что отрезок EF имеет данную длину (рис. 2.9). Достроим треугольник DEF до параллелограмма $DEFG$. Для построе-

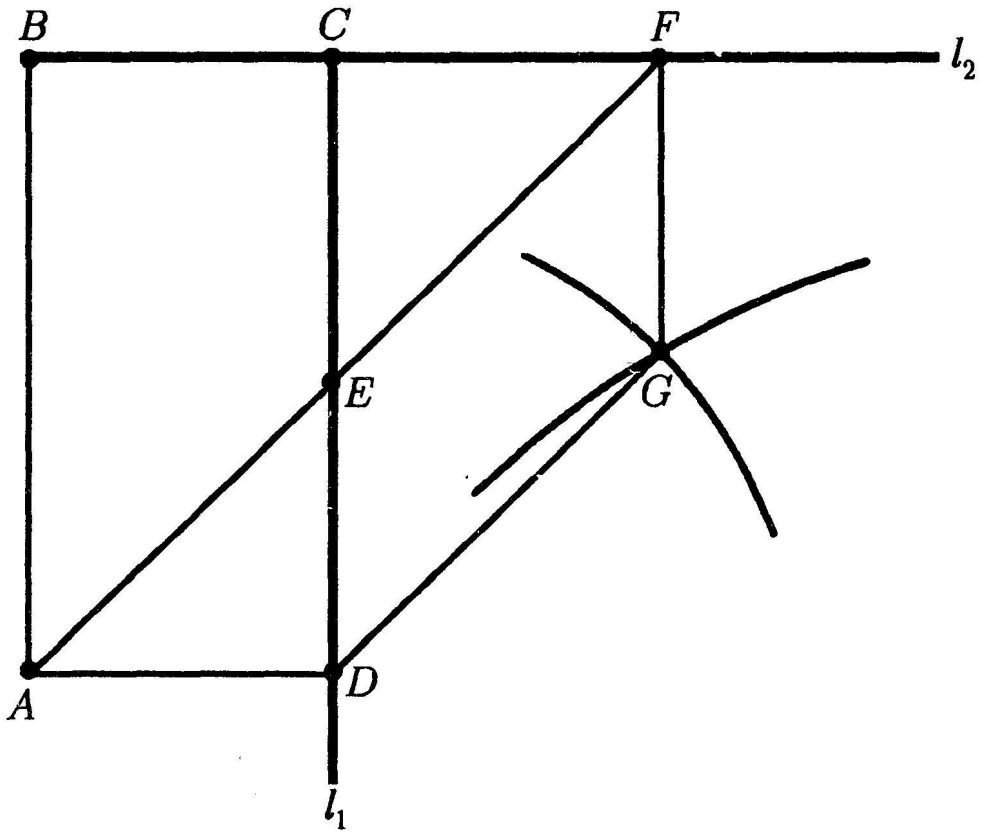

Рис. 2.9.

ния искомой прямой достаточно построить точку G, а затем через точку A провести прямую, параллельную прямой DG. Точка G удалена от точки D на данное расстояние $DG = EF$, поэтому точка G лежит на окружности, которую можно построить. С другой стороны, из подобия треугольников ABF и EDA получаем $AB : ED = BF : AD$, т. е. $ED \cdot BF = AB \cdot AD$. Следовательно, $FG \cdot BF = AB \cdot AD = S_{ABCD}$, т. е. точка G лежит на гиперболе (если направить оси Ox и Oy по лучам BF и BA, то эта гипербола задаётся уравнением $xy = S_{ABCD}$).

Это построение почти без изменений можно применить и в случае неперпендикулярных прямых l_1 и l_2.

Одно из решений задачи трисекции угла получено Архимедом (см. с. 113).

2.4.3. Квадратура круга

Задача *квадратуры круга*, т. е. построения квадрата, равновеликого данному кругу, в Древней Греции была, по-видимому, очень популярна. Плутарх сообщает, что философ Анаксагор (ок. 500—428 гг. до н. э.) в тюрьме занимался этой задачей. О ней говорится и в комедии Аристофана «Птицы» (414 г. до н. э.): «Приложив сюда линейку, круг описываю циркулем, и верх и низ... Потом линейкой отношу прямую. Круг теперь подобен четырёхугольнику». Это упоминание в комедии означает, что задача квадратуры круга была общеизвестна.

Наиболее ранние дошедшие до нас древнегреческие решения задачи квадратуры круга на первый взгляд кажутся просто глупостью. Афинянин Антифонт вписывал в круг многоугольник (треугольник или квадрат), затем делил дуги пополам и строил вписанный многоугольник с удвоенным числом сторон и т. д. Он думал, что в конце концов получится многоугольник, который, благодаря крайней малости своих сторон, совпадёт с окружностью. Бризон взял квадрат, вписанный в круг, и квадрат, описанный около круга, а затем взял квадрат, лежащий между ними. Он утверждал, что площадь последнего квадрата равна площади круга.

Позднейшие древнегреческие комментаторы к решениям Антифонта и Бризона относились пренебрежительно и их вообще не обсуждали. Но деятельность Антифонта и Бризона не следует недооценивать. Для решения задачи квадратуры круга необходимо было понять, что же такое площадь круга, а для этого было нужно представление о пределе. В Древней Индии обошли эти трудности, приняв на веру неточное решение этой задачи. Антифонт и Бризон наощупь искали понятие предела. В их рассуждениях неверного много, но есть и кое-что очень важное; созданный впоследствии метод исчерпывания многое у них перенял. Архимед при вычислении числа π как отношения длины окружности к диаметру использовал как идею Антифонта (переход от вписанного n-угольника к вписанному $2n$-угольнику), так и идею Бризона (применение не только вписанных, но и описанных много-

угольников).

Решение задачи квадратуры круга с помощью кривой, названной впоследствии *квадратрисой Диностратa*, получил Динострат (см. с. 49).

На этом мы закончим отступление о трёх классических задачах на построение.

2.5. Гиппократ Хиосский (470-410 до н.э.)

Гиппократ первым составил «Начала» аналогичные «Началам» Евклида. Эти «Начала» не сохранились.

Наиболее известен Гиппократ открытием так называемых луночек Гиппократа. Другое важное открытие Гиппократа состоит в том, что он свёл задачу удвоения куба к нахождению двух средних членов x и y в пропорции $a : x = x : y = y : b$ для заданных a и b. Этим впоследствии пользовались все, кто занимался задачей удвоения куба.

С точки зрения математики квадратура луночек, выполненная Гиппократом, с решением задачи квадратуры круга не связана, потому что все его примеры основаны как раз на том, что число π не входит в выражения для площадей некоторых луночек. Но исторически его деятельность непосредственно связана с попыткой решить задачу квадратуры круга. Более того, позднейшие комментаторы даже писали, будто сам Гиппократ был уверен, что он решил задачу квадратуры круга. Но это, по-видимому, просто недоразумение. Гиппократ должен был хорошо понимать, что он делал и что он сделал. Хотя он жил задолго до Евклида и Архимеда, уровень его математических познаний весьма высок.

Будем называть *луночкой* фигуру, ограниченную двумя дугами окружностей (рис. 2.10). Гиппократ привёл три примера квадрируемых луночек, т. е. луночек, для которых легко построить равновеликие им многоугольники. Наиболее известен его первый пример. Рассмотрим полукруг с диаметром AB. Пусть O — середина отрезка AB, C — середина дуги AB. Построим также полукруг на катете BC пря-

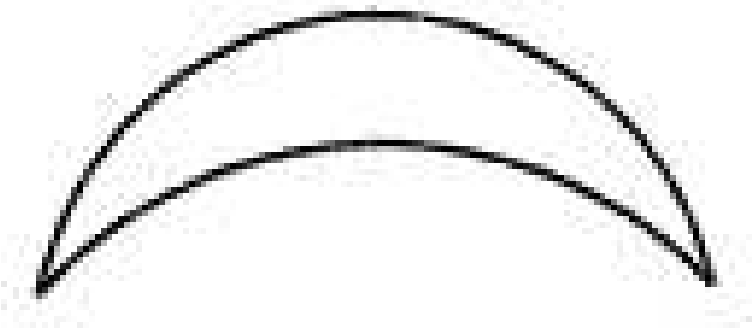

Рис. 2.10.

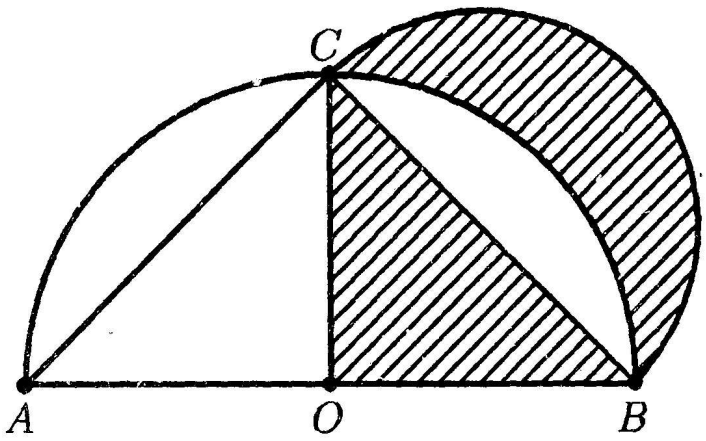

Рис. 2.11.

моугольного треугольника ABC. Тогда площадь заштрихованной на рис. 2.11 луночки равна площади прямоугольного треугольника BOC. В самом деле, как площадь сектора BOC, так и площадь полукруга с диаметром BC равна половине площади полукруга с диаметром AB. Поэтому, вырезав из этих фигур их общую часть — сегмент BC, получим равновеликие фигуры.

Для построения второго примера Гиппократ взял равнобедренную трапецию $ABCD$, основания BC и AD которой равны 1 и $\sqrt{3}$, а боковые стороны AB и CD равны 1. Рассмотрим луночку, ограниченную описанной окружностью S трапеции $ABCD$ и окружностью S_1, полученной из окружности S при гомотетии, переводящей отрезок BC в отрезок AD (рис. 2.12). Площадь сегмента AD в три раза больше площади каждого из сегментов AB, BC и CD, т. е. она равна сум-

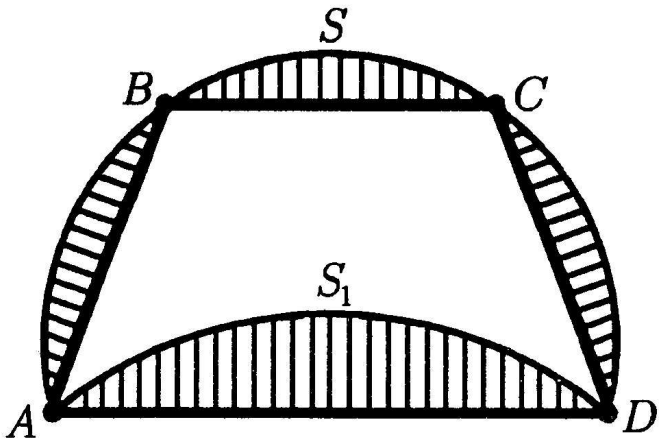

Рис. 2.12.

ме их площадей. Поэтому площадь луночки равна площади трапеции $ABCD$.

Для построения третьего примера Гиппократ взял трапецию $ABCD$, в которой основание BC и боковые стороны AB и CD равны 1 и, кроме того, $AO = OD = \sqrt{3/2}$, где O — точка пересечения диагоналей. Эту трапецию он строит следующим образом. Возьмём на луче BC такую точку E, что $BE = 2BC$, и рассмотрим окружность S с диаметром BE. Пусть l — серединный перпендикуляр к отрезку BC. Используя способ «вставок», построим отрезок $OD = \sqrt{3/2}BC$ с концами, лежащими соответственно на прямой l и окружности S, продолжение которого проходит через точку B. Точка A симметрична точке D относительно прямой l (рис. 2.13). Рассмотрим описанные окружности трапеции $ABCD$ и треугольника AOD. Ясно, что площади каждого из сегментов, ограниченных хордами AO и OD, в $3/2$ раза больше площади каждого из сегментов, ограниченных хордами AB, BC и CD. Поэтому площадь первых двух сегментов равна площади трёх других сегментов. Следовательно, площадь луночки, ограниченной дугами $ABCD$ и AOD, равна площади многоугольника $ABCDO$.

В каждом из этих трёх примеров для доказательства нужно знать, что площади кругов относятся как квадраты их диаметров. Ученик Аристотеля Евдем Родосский (IV в. до н.э.) в написанной им истории древнегреческой геометрии утверждает, что Гиппократ это действи-

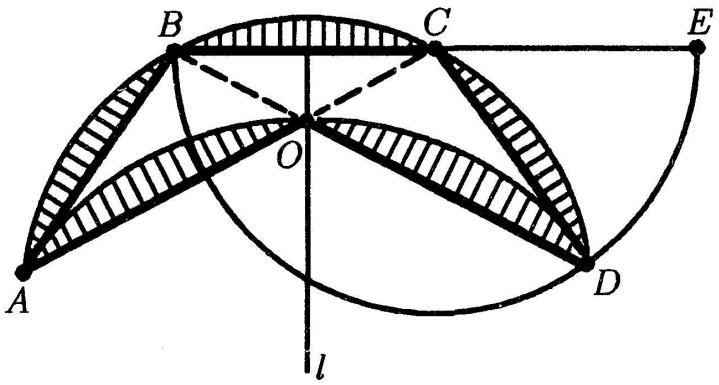

Рис. 2.13.

тельно умел доказывать. У Евклида это доказывается методом исчерпывания, и без чего-нибудь вроде метода исчерпывания здесь нельзя обойтись.

Впоследствии конструкция Гиппократа была обобщена. Но прежде чем перейти к этому обобщению, нужно обсудить третий пример Гиппократа. Дело в том, что применение способа «вставок» в этом случае излишне: трапецию $ABCD$ можно построить с помощью лишь циркуля и линейки. Рассмотрим окружность с диаметром AB. Пусть O — центр этой окружности, l — серединный перпендикуляр к отрезку OB. Докажем, что с помощью циркуля и линейки можно вставить между окружностью и прямой l отрезок PQ данной длины d, продолжение которого проходит через точку B (рис. 2.14). Введём систему координат с началом в центре окружности и осью Ox, направленной по лучу OB. Пусть точка P имеет координаты (x, y). Тогда $x^2 + y^2 = R^2$, где R — радиус окружности, и $PQ : KQ = PB : LB$ (см. рис. 2.14), т. е. $d : (R/2 - x) = \sqrt{y^2 + (R - x)^2} : (R - x)$. Учитывая, что $y^2 + (R - x)^2 = (y^2 + x^2) + R^2 - 2Rx = 2R(R - x)$, получим $d^2(R - x) = 2R(R/2 - x)^2$, т. е. x — корень квадратного уравнения. Это означает, что точку P можно построить с помощью циркуля и линейки.

Конструкцию Гиппократа можно обобщить следующим образом. Разделим дугу AB некоторой окружности на n равных частей и соединим точки A и B с точками деления (рис. 2.15). Точки пересечения полу-

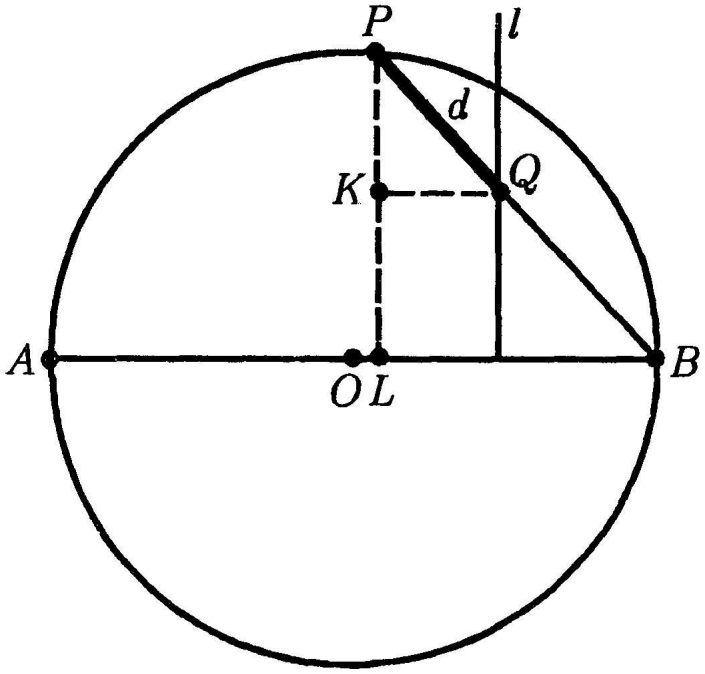

Рис. 2.14.

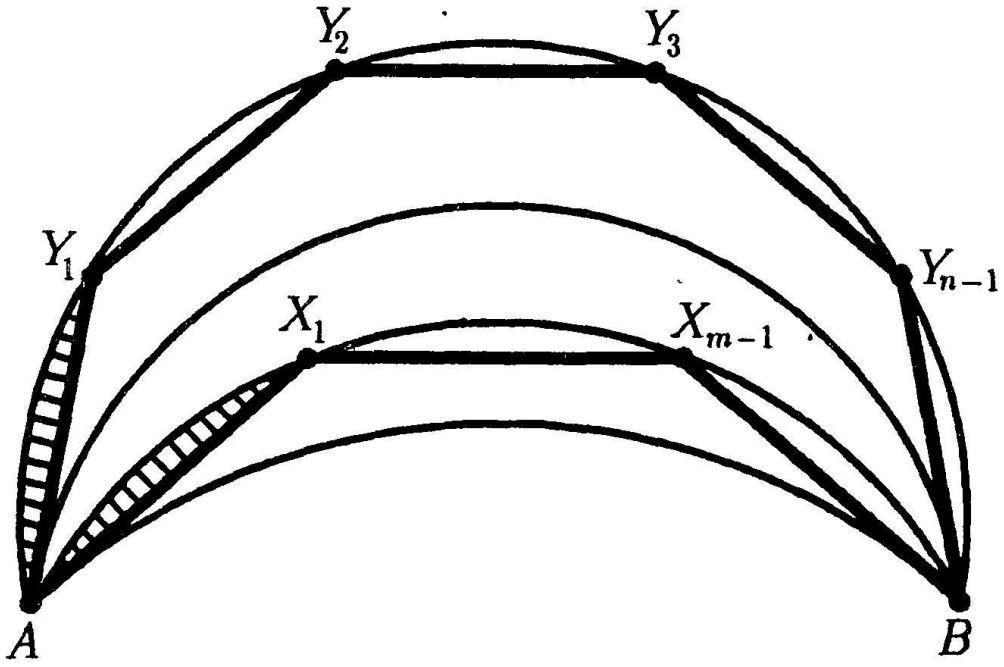

Рис. 2.15.

ченных отрезков лежат на $n-2$ окружностях, проходящих через точки A и B. Если $n\varphi$ — угловая величина дуги AB исходной окружности, то дуги AB этих окружностей состоят соответственно из $n-1, n-2, \ldots, 2$ дуг с угловой величиной φ. К этим окружностям следует добавить также окружность, угловая величина дуги AB которой равна φ. Площадь луночки, ограниченной дугами AY_1B и AX_1B (см. рис. 2.15), равна площади многоугольника $AY_1 \ldots Y_{n-1}X_{m-1} \ldots BX_{m-1} \ldots X_1$, если отношение площадей сегментов AY_1 и AX_1 равно m/n. В самом деле, тогда площадь n сегментов $AY_1, Y_1Y_2, \ldots, Y_{n-1}B$ равна площади m сегментов $AX_1, X_1X_2, \ldots, X_{m-1}B$. Сегменты AY_1 и AX_1 подобны, так как на них опираются равные углы ABY_1 и ABX_1. Итак, мы приходим к соотношению $AY_1^2 : AX_1^2 = m : n$. По теореме синусов имеем $AY_1 : AX_1 = \sin AX_1B : \sin AY_1B = \sin\left(\frac{2\pi - m\varphi}{2}\right) : \sin\left(\frac{2\pi - n\varphi}{2}\right) = \sin m\alpha : \sin n\alpha$, где $\alpha = \varphi/2$. В итоге получаем, что если корень уравнения $\sin m\alpha : \sin n\alpha = \sqrt{m} : \sqrt{n}$ можно построить с помощью циркуля и линейки, то существует квадрируемая луночка описанного выше типа. Найденные Гиппократом примеры квадрируемых луночек соответствуют парам $(1,2)$, $(1,3)$ и $(2,3)$. В 1766 г. было обнаружено, что пара $(1,5)$ тоже соответствует квадрируемой луночке, а в 1840 г. была обнаружена еще одна такая пара — $(3,5)$. И лишь в 1934 г. известный советский математик Н. Г. Чеботарев доказал, что никаких других квадрируемых луночек с нечётными m и n нет. (Основная трудность заключается в том, чтобы выяснить, можно ли корень уравнения $\sin m\alpha : \sin n\alpha = \sqrt{m} : \sqrt{n}$ построить с помощью циркуля и линейки.)

Гиппократ не ограничился тем, что нашел эти весьма редкие и интересные примеры квадрируемых луночек. Он их детально исследовал: доказал, что во втором случае внешняя дуга больше 180°, а в третьем меньше 180°. По-видимому, именно это привело к недоразумению. Позднейшие древнегреческие комментаторы решили, будто Гиппократ, найдя квадрируемые луночки с внешней дугой 180°, больше 180° и меньше 180°, подумал, что тем самым он доказал квадрируемость любой луночки и квадрируемость круга. Но сочинения этих

комментаторов показывают, что математику они понимали хуже Гиппократа. Так что заблуждались, скорее всего, они сами, а не Гиппократ.

2.6. Феодор Киренский (465-398 до н.э.)

Феодор Киренский известен тем, что обучил Платона математике и доказал иррациональность некоторых квадратных корней из натуральных чисел.

Иррациональность числа $\sqrt{2}$ была известна ещё пифагорейцам. В диалоге Платона «Теэтет» говорится, что Феодор доказал иррациональность квадратных корней из чисел от 3 до 17 (исключая 4, 9 и 16). Процитируем соответствующее место диалога: «**Теэтет.** Вот Феодор объяснял нам на чертежах нечто о сторонах квадрата, [площадь которого выражена продолговатым числом], налагая их на трёхфутовый и пятифутовый [отрезки] соответственно и доказывая, что по длине они несоизмеримы с однофутовым [отрезком]; и так перебирая [эти отрезки] один за другим, он дошёл до семнадцатифутового. Тут его что-то остановило.»

Сразу возникают два вопроса. Почему пифагорейцы остановились на $\sqrt{2}$? Почему Феодор остановился на $\sqrt{17}$?

На первый вопрос ответить легко. Пифагорейцы не знали общей теории делимости целых чисел. Для доказательства теоремы о том, что любое натуральное число единственным образом разлагается в произведение простых чисел, нужна весьма продвинутая теория, включающая алгоритм Евклида. Этой общей теорией пифагорейцы не владели. Но для числа $\sqrt{2}$ эта общая теория была не нужна, достаточно было теории делимости на 2, которую пифагорейцы знали.

По поводу ответа на второй вопрос есть только несколько догадок и предположений. Было предложено несколько доказательств, которые годятся для чисел от 3 до 17, но не годятся в общем случае. (Для доказательства в общем случае обычно используется единственность разложения на простые множители, которая обычно доказывается с

помощью алгоритма Евклида.) Наиболее убедительной представляется гипотеза, предложенная в статье [5]. Эта гипотеза состоит в том, что специально отмеченные в диалоге числа 3 и 5 означают, что Феодор в своём доказательстве применял остатки от деления на 3 и на 5. Деление с остатком — существенно более элементарная операция, чем алгоритм Евклида, который заключается в последовательном выполнении делений с остатком по определённому правилу; эта операция была известна и до появления алгоритма Евклида. Число $\sqrt{n}$, где n — натуральное число, является рациональным тогда и только тогда, когда уравнение

$$a^2 = nb^2 \tag{1}$$

имеет целочисленное решение (a, b); при этом можно считать, что числа a и b не имеют общих делителей. Составим таблицы остатков от деления на 3 и на 5 произведения двух чисел:

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Эти таблицы показывают, что **произведение двух натуральных чисел делится на 3 тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них делится на 3** и **произведение двух натуральных чисел делится на 5 тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них делится на 5**. Эти утверждения позволяют доказать, что если n делится на 3 или на 5 и не делится на квадрат натурального числа, превосходящего 1, то уравнение (1) не имеет целочисленных решений. Действительно, пусть $n = 3k$, где k не делится на 3. Тогда $a^2 = a \cdot a$ делится на 3, поэтому a делится на 3. Следовательно, $a^2 = 3kb^2$ делится на 9, поэтому kb^2 делится на 3. По условию k не делится на 3, поэтому b^2 делится на 3, а значит, b делится на 3, а это противоречит тому, что числа a и b не имеют общих делителей. Для чисел вида $5k$ рассуждения аналогичны.

Таким образом, мы можем исключить из рассмотрения числа n, де-

лящиеся на 2, 3 или 5, а также, все числа, делящиеся на квадраты. После этого остаются числа 7, 11, 13, 17, 19, ... Пусть n — одно из этих чисел. Таблица остатков от деления на 3 показывает, что если уравнение (1) имеет целочисленное решение (и числа a и b не имеют общих делителей), то оба числа a и b не делятся на 3 и их квадраты при делении на 3 дают в остатке 1. Поэтому **число** n **имеет вид** $3k+1$. После этого замечания приходим к списку 7, 13, 19, ... Пусть n — одно из этих чисел. Таблица остатков от деления на 5 показывает, что если уравнение (1) имеет целочисленное решение (и числа a и b не имеют общих делителей), то оба числа a и b не делятся на 5 и их квадраты при делении на 5 дают в остатке 1 или 4. Поэтому **число** n **имеет вид** $5k+1$ **или** $5k+4$. После этого замечания остаётся список, начинающийся с числа 19, которое при делении на 3 даёт в остатке 1, а при делении на 5 даёт в остатке 4, и для него наши рассуждения не работают. Таким образом, эти рассуждения дают доказательство для всех чисел от 2 до 17 (число $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ исключается из рассмотрения по очевидным причинам).

2.7. Архит Тарентский (428-350 до н.э.)

В начале IV в. до н. э. пифагорейцы были изгнаны из почти всех греческих колоний в южной Италии. Лишь в Таренте Архит сумел сохранить полуаристократический режим, и этот город остался единственным существенным политическим центром пифагорейцев. В своём городе Архит был очень влиятельным человеком. Диоген Лаэртский писал о нём: «Всяческими своими добродетелями вызывал он всеобщее восхищение и был над своими согражданами военачальником семь раз, тогда как другие по закону не военачальствовали более одного года... в свое военачальство он ни разу не потерпел поражения; а однажды, когда ему стали завидовать, он отказался от начальства, и войско тотчас было разбито».

Архит был очень дружен с философом Платоном. Их обоих обучил математике Феодор Киренский. Однажды Архит даже спас Платона

от смерти. Эту историю рассказал Диоген Лаэртский: «...во второй раз он <Платон> ездил к Дионисию Младшему просить о земле и людях, чтобы жить по законам его Государства <«Государство» — книга Платона>. Дионисий обещал, но не дал. Некоторые пишут, что при этом он попал было в беду, оттого что побуждал Диона и Феодота к освобождению острова; но пифагореец Архит в письме к Дионисию добился для него прощения и свободного возвращения в Афины».

Архит обучил математике Евдокса.

Научные интересы Архита на первый взгляд поражают разнообразием. Самым главным его достижением является решение задачи удвоения куба. Другим важным достижением являются его теоретико-числовые исследования, составившие основу восьмой книги «Начал» Евклида. Кроме того, Архита с полным основанием называли крупнейшим пифагорейским теоретиком музыки. Более близкое знакомство со всеми этими результатами Архита поражает, однако, странным единообразием при таком разнообразии. Решая задачу удвоения куба, он между данными отрезками a и b вставляет отрезки x и y, образующие пропорцию $a : x = x : y = y : b$. В теории чисел Архит исследует, когда между данными натуральными числами a и b можно вставить натуральные числа $x_1, \ldots, x_n$, образующие пропорцию $a : x_1 = x_1 : x_2 = \ldots = x_{n-1} : x_n = x_n : b$. В теории музыки Архит изучает средние и пропорции: среднее арифметическое ($a - b = b - c$, т. е. $b = (a+c)/2$), среднее геометрическое ($a : b = b : c$, т. е. $b = \sqrt{ac}$) и среднее гармоническое $\left(\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}\right.$, т. е. $\left. b = \frac{2ac}{a+c}\right)$.

Архит занимался также механикой и, по-видимому, любил мастерить разные приспособления. Диоген Лаэртский писал о нём: «Он первый упорядочил механику, приложив к ней математические основы, и первый свёл движение механизмов к геометрическому чертежу». Об изобретениях Архита есть не очень достоверные сведения, будто он изготовил деревянного голубя, который мог летать, и совершенно достоверное сообщение Аристотеля, что Архит изобрёл детскую погремушку: «С другой стороны, и дети должны иметь какое-нибудь занимательное дело, и в этом отношении нужно считать прекрасным изо-

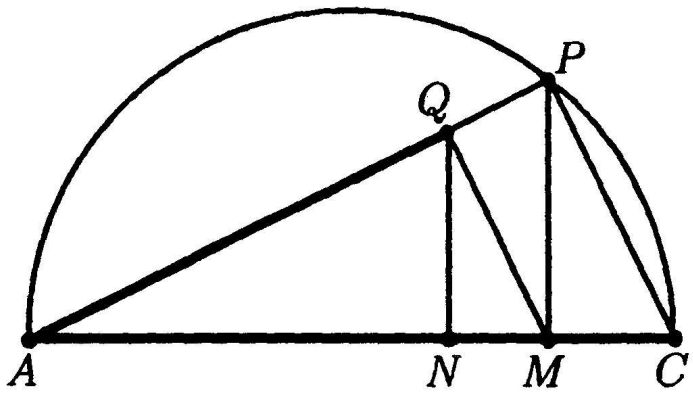

Рис. 2.16.

бретением ту погремушку Архита, которую дают малым детям, чтобы они, занимаясь ею, не ломали ничего из домашних вещей: ведь то, что молодо, не может оставаться спокойным». Аристотелю приходится поверить, потому что он был лучшим учеником Платона, близкого друга Архита.

Архит получил первое решение задачи удвоения куба. Его решение прямое и естественное, но для современного восприятия оно одно из наиболее сложных, потому что оно полностью геометрическое и современная алгебраизация ничем не помогает его понять. Прежде чем перейти к решению Архита, рассмотрим рис. 2.16. На этом рисунке изображён полукруг с диаметром AC; из точки P, лежащей на окружности, опущен перпендикуляр PM на диаметр AC, из точки M опущен перпендикуляр MQ на отрезок AP, а из точки Q опущен перпендикуляр QN на диаметр AC. Ясно, что

$$\frac{AC}{AP} = \frac{AP}{AM} = \frac{AM}{AQ},$$

поэтому

$$\frac{AC}{AQ} = \frac{AC}{AP} \cdot \frac{AP}{AM} \cdot \frac{AM}{AQ} = \left(\frac{AM}{AQ}\right)^3.$$

В частности, если $AC = 2AQ$, то $AM = \sqrt[3]{2}AQ$.

Чтобы прийти к рис. 2.16, поступим следующим образом. Пусть AB и AC — данные отрезки, причём $AB < AC$. Тогда можно считать,

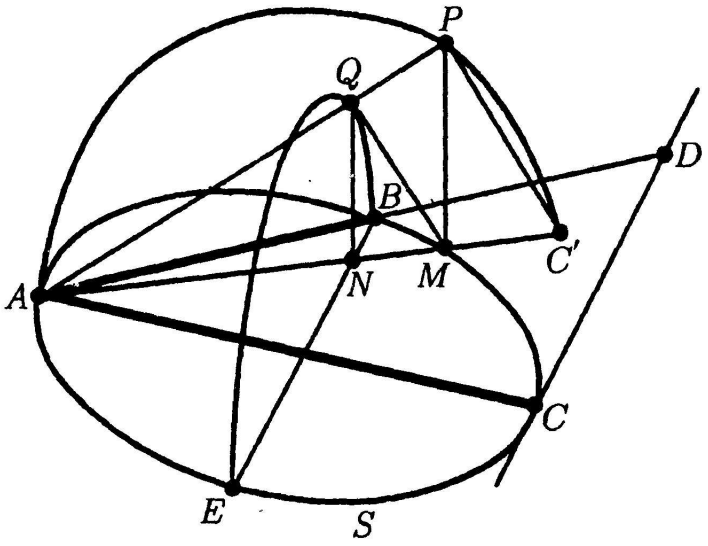

Рис. 2.17.

что точка B лежит на окружности S с диаметром AC (рис. 2.17). Рассмотрим три поверхности:

1) цилиндр с основанием S;

2) конус с осью AC и образующей AD, где D — точка пересечения прямой AB и касательной к окружности S в точке C (этот конус получается при вращении прямоугольного треугольника ACD вокруг катета AC);

3) повернём окружность S на $90°$ вокруг оси AC и будем вращать полученную окружность S' вокруг оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости окружности S; в результате получим поверхность вырожденного тора (тор получается при вращении круга относительно оси l, лежащей в плоскости круга и удалённой от него на некоторое расстояние a (рис. 2.18); если, как в нашем случае, $a = 0$, то получаем вырожденный тор).

Пусть P — одна из точек пересечения трёх рассматриваемых поверхностей (см. рис. 2.17); M — проекция точки P на плоскость окружности S. Точка P лежит на поверхности цилиндра, поэтому точка M лежит на окружности S. Проведём через точку B хорду BE, перпендикулярную диаметру AC. Пусть Q — точка отрезка AP, проецирующаяся в некоторую точку N отрезка BE. Так как AP — обра-

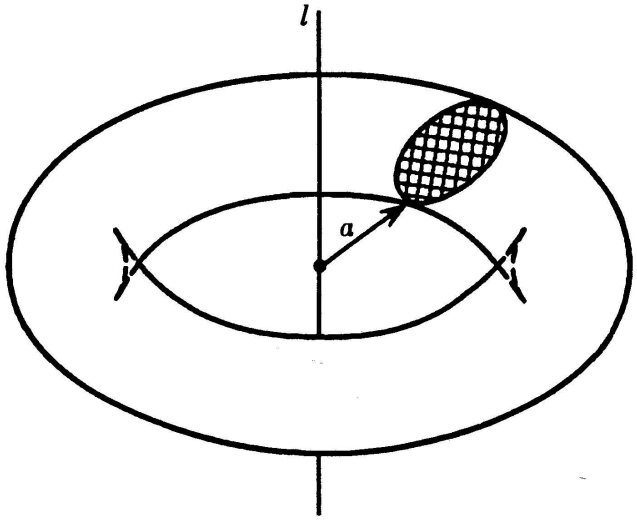

Рис. 2.18.

зующая конуса, то $AQ = AB$. Точка Q лежит на окружности с диаметром BE, поэтому $QN^2 = EN \cdot NB = AN \cdot NM$, т. е. точка Q лежит на окружности с диаметром AM и $\angle AQM = 90°$. Следовательно, $QM \parallel PC'$. В итоге мы приходим к рис. 2.16, нужно лишь в обозначениях этого рисунка заменить C на C'. Следовательно, $AC : AP = AP : AM = AM : AB$, а если $AC = 2AB$, то $AM = \sqrt[3]{2}AB$.

2.8. Платон (428-347 до н.э.)

Платон основал философскую школу, получившую название Академия от рощи близ Афин, в которой она находилась. Платон требовал от всех своих учеников, чтобы они основательно изучили геометрию, прежде чем он обучит их своей философии. Над входом в Академию было написано: «Да не войдёт сюда не знающий геометрии.»

Платон с увлечением занимался математикой, многие знаменитые математики того времени были его близкими друзьями. Аристотель, много лет проведший в школе Платона, достаточно хорошо знал математику, но не был ей увлечен так, как Платон.

Сам Платон не сделал важных математических открытий, но он ценил математику как превосходное средство тренировки ума, и убе-

ждённость Платона в ценности математики оказалась важной для её развития.

Платон тщательно разрабатывал идею доказательства. Он настаивал на точности определений и ясности предположений. Всё это в дальнейшем послужило Евклиду, принадлежавшему к школе Платона, основанием для систематического подхода к математике.

Правильные многогранники часто называют *платоновыми телами*, потому что о них идёт речь в диалоге Платона «Тимей». Но они не были открыты Платоном. Куб, тетраэдр и додекаэдр были известны пифагорейцам, а октаэдр и икосаэдр открыл Теэтет.

Платон различал арифметику (науку, изучающую свойства чисел) и логистику (искусство вычислений).

Евтокий, комментатор сочинений Архимеда, сообщает, что Платон предложил следующее решение задачи удвоения куба. Построим прямоугольный треугольник OAB, катетами которого являются данные отрезки a и b (рис. 2.19). Если на продолжениях катетов OB и OA нам удастся построить такие точки X и Y, что прямые AX и BY параллельны, а прямая XY им перпендикулярна, то задача удвоения куба будет решена. В самом деле, треугольники AOX, XOY и YOB подобны, поэтому $a : x = x : y = y : b$. Для построения точек X и Y можно воспользоваться инструментом, состоящим из жесткого прямого угла $X'Y'B'$, по стороне $X'Y'$ которого свободно движется перпендикулярная ей прямая $X'A'$. Расположим для этого прямой угол $X'Y'B'$ так, чтобы его сторона $Y'B'$ проходила через точку B, а вершина Y' лежала на прямой AO. Затем передвинем прямую $X'A$ так, чтобы она проходила через точку A. Нам нужно, чтобы точка X' оказалась при этом на прямой OB. Этого можно добиться, поворачивая наш инструмент.

Евтокий описал также устройство нужного для построения инструмента. Он состоял из жесткой П-образной рамы, в стойках которой были вырезаны пазы и по ним двигалась рейка (рис. 2.20). Рассматриваемое построение можно также выполнить с помощью двух прямых углов, двигая сторону одного угла по стороне другого угла (рис. 2.21).

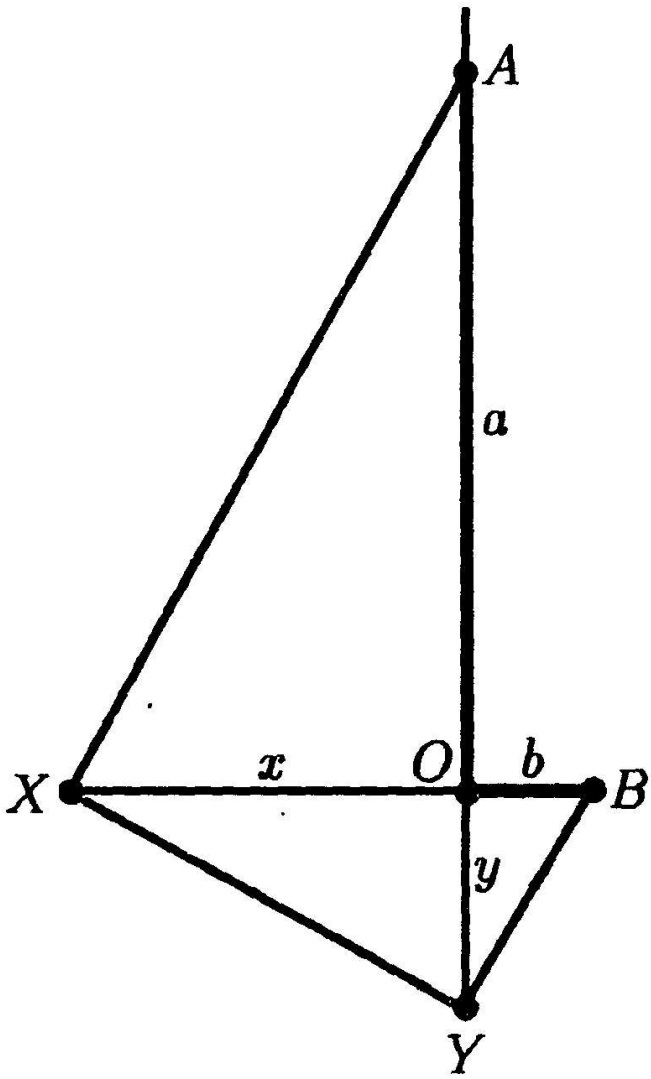

Рис. 2.19.

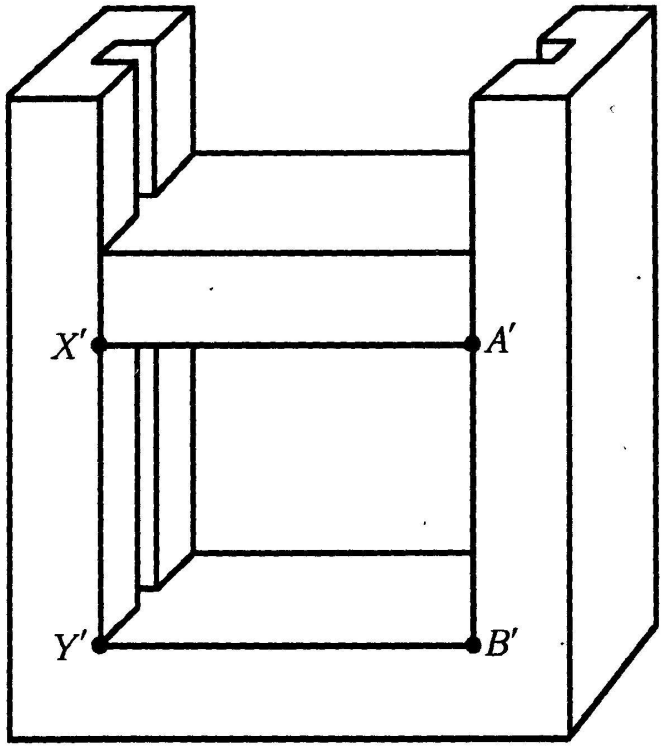

Рис. 2.20.

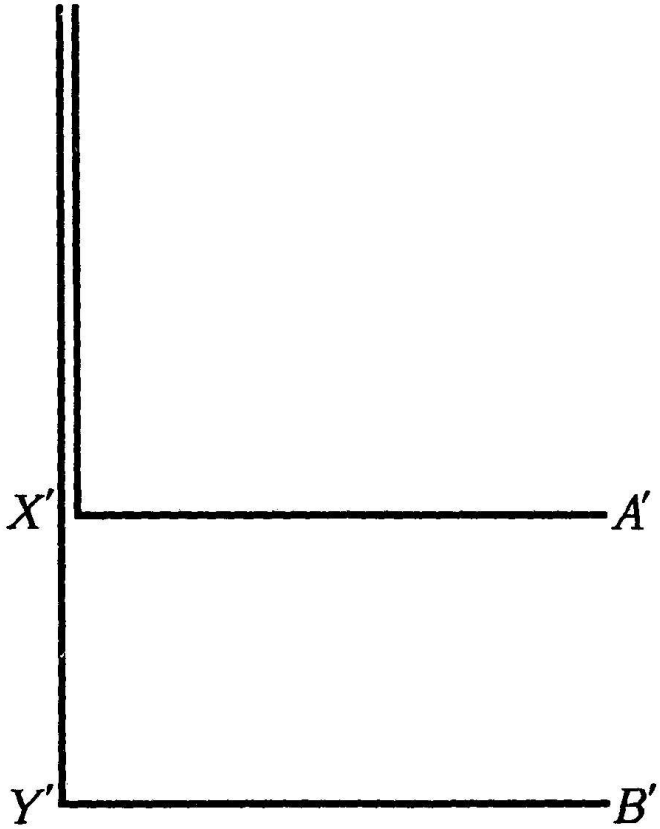

Рис. 2.21.

Принадлежность этого решения Платону весьма сомнительна. Об этом решении сообщает только Евтокий, а другие источники среди авторов решений задачи удвоения куба Платона не упоминают. Но это не главное. Дело в том, что Платон отвергал механические доказательства как разрушающие все лучшее в геометрии. Он предпочитал идеи в чистом виде. Всерьёз рассматривать такое решение Платон действительно не мог. Но не исключено, что это решение он предложил в шутку, насмехаясь над построениями с помощью инструментов, которыми надлежит пользоваться лишь ремесленникам (такую гипотезу высказал известный математик и историк математики Б. Л. ван дер Варден).

2.9. Теэтет Афинский (415-369 до н.э.)

Никаких сочинений Теэтета на сохранилось, но о его математических работах, относящихся к теории иррациональных чисел, учению о пропорциональности и правильным многогранникам, можно составить достаточно полное представление по сочинениям древнегреческих математиков и философов. Платон очень высоко ценил Теэтета и отвёл ему важную роль в двух диалогах («Теэтет» и «Софист»). В двух книгах «Начал» Евклида излагаются результаты Теэтета: в книге X, посвященной соизмеримым и несоизмеримым величинам, и в книге XIII, посвящённой правильным многограммикам.

Продолжая исследования Феодора Киренского, который доказал иррациональность квадратых корней чисел от 3 до 17, не являющихся полными квадратами, Теэтет доказал иррациональность всех квадратных корней из натуральных чисел, не являющихся полными квадратами. Он доказал также аналогичное утверждение для кубических корней. Кроме того, Теэтет получил классификацию квадратичных иррациональностей определённого вида.

Теэтет ввёл октаэдр и икосаэдр в дополнение к кубу, правильному тетраэдру и додекаэдру, которые были известны пифагорейцам. Раннее открытие куба и правильного тетраэдра неудивительно, а до-

декаэдр требует комментариев. В природе встречаются кристаллы пирита, близкие по форме к додекаэдру. Сохранился также додекаэдр, неизвестно для каких целей изготовленный этрусскими ремесленниками около 500 г. до н.э. Кроме того, правильный тетраэдр, куб и додекаэдр проще изготовить из правильных многоугольников: скрепив три треугольника, квадрата или пятиугольника, мы сразу получаем жёсткую конструкцию. А чтобы получить октаэдр и икосаэдр, нужно срепить соответственно четыре и пять треугольников, поэтому сначала получается нежёсткая конструкция; она становится жёсткой только потом.

2.10. Евдокс Книдский (408-355 до н.э.)

По свидетельству Архимеда Демокрит установил, что объём пирамиды равен 1/3 объёму призмы, имеющей с ней одинаковые основание и высоту, а объём конуса равен 1/3 объёма соответствующего цилиндра, но доказательств не дал. По-видимому, Демокрит в соответствии со своей философией пытался составить пирамиду и конус из конечного числа элементарных частей — атомов.

Строго обосновал результаты Демокрита Евдокс. Архимед считал, что Демокрит, угадавший ответ, существенно помог Евдоксу. Сам Архимед использовал методы механики, чтобы угадать ответ, который он впоследствии обосновывал строго.

Евдокс родился в Книде на юго-западе Малой Азии около 408 г. до н.э. В молодости он побывал в Великой Греции, где изучал математику под руководством Архита Тарентского.

Евдокс создал общее учение об отношениях (пропорциях) и метод исчерпывания — аналог предельного перехода, не обращающийся к актуальной бесконечности. (Название «метод исчерпывания» появилось в начале 17 века в связи с работами Григория Сен-Винцента и было перенесено на способ доказательства, применяемый древнегреческими математиками, хотя и весьма плохо отражало суть этого метода.)

Понятие величины у Евдокса охватывает длины отрезков, площади,

объёмы. Оно вводится с помощью аксиом, определяющих отношения равенства и неравенства. У Евклида эти аксиомы формулируются так:

1) Равные одному и тому же равны между собой.

2) И если к равным прибавить равные, то и целые будут равны.

3) И если от равных отнимаются равные, то и остатки будут равны.

4) И совмещающиеся друг с другом равны между собой.

5) И целое больше части.

Отношение можно рассматривать не для всех величин. Евдокс вводит знаменитую аксиому. Этой аксиомой впоследствии несколько раз пользовался Архимед (не забывая отдать должное Евдоксу), поэтому её часто называют *аксиомой Архимеда*. У Евклида эта аксиома сформулирована так: «Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они взятые кратно, могут превзойти друг друга.» Это означает, что величины a и b имеют отношение между собой, если найдутся такие натуральные числа m и n, что $ma > b$ и $nb > a$.

Величины a и b имеют такое же отношение, как величины c и d, если для любых натуральных m и n: 1) либо $ma > nb$ и $mc > nd$, 2) либо $ma = nb$ и $mc = nd$, 3) либо $ma < nb$ и $mc < nd$.

Две пары величин, имеющих одно и то же отношение, называются *пропорциональными*. Доказывается, что если две пары величин пропорциональны третьей паре, то они сами пропорциональны. (Если $a : b = e : f$ и $c : d = e : f$, то $a : b = c : d$.)

Евдокс говорит, что отношение $a : b$ больше отношения $c : d$, если найдутся такие натуральные числа m и n, что одновременно $ma > nb$ и $mc \leq nd$.

Учение о пропорциях фактически эквивалентно аккуратному определению действительных чисел. Дедекинд, разработавший строгую теорию действительных чисел на основе так называемых *дедекиндовых сечений*, основывался на идеях Евдокса.

Метод исчерпывания, разработанный Евдоксом, основан на предложении X, 1 из «Начал» Евклида: «Если даны две величины и из большей вычитается часть, бóльшая половины, а из остатка — снова часть, бóльшая половины, и это повторяется постоянно, то когда-нибудь оста-

ется величина, которая меньше, чем меньшая из данных величин.» Действительно, если из a вычесть $a_1 > \frac{a}{2}$, то получим $a - a_1 < \frac{a}{2}$, т.е. каждый раз получается величина, которая меньше половины исходной. Поэтому после нескольких таких операций получится величина, которая меньше, чем меньшая из данных величин. (Здесь применяется аксиома Евдокса–Архимеда.)

Вот как метод исчерпывания применялся для доказательства того, что площади кругов относятся как квадраты диаметров. Пусть S_1 и S_2 — площади кругов с диаметрами d_1 и d_2. Предположим, что $\frac{S_1}{S_2} \neq \frac{d_1^2}{d_2^2}$. Выберем Σ_2 так, что $\frac{S_1}{\Sigma_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$. Здесь Σ_2 должно быть меньше или больше S_2. Предположим сначала, что $\Sigma_2 < S_2$. Впишем во второй круг квадрат, затем правильный 8-угольник, затем правильный 16-угольник и т.д. Площадь квадрата больше половины площади круга. Площадь каждого из треугольников, построенных на его сторонах при построении 8-угольника, больше половины площади сегмента круга, в который этот треугольник вписан. Аналогично на каждом шаге из остатка (круг минус многоугольник) вычитается больше половины, поэтому на каком-то шаге площадь остатка окажется меньше $S_2 - \Sigma_2$. Пусть P_2 — площадь многоугольника на этом шаге. Тогда $S_2 - P_2 < S_2 - \Sigma_2$, т.е. $P_2 > \Sigma_2$. В первый круг тоже будем вписывать аналогично правильные многоугольники, и пусть P_1 — площадь правильного многоугольника, полученного на соответствующем шаге. Площади подобных многоугольников относятся как квадраты их соответственных элементов, поэтому $\frac{P_1}{P_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{S_1}{\Sigma_2}$. Следовательно, $\frac{S_1}{P_1} = \frac{\Sigma_2}{P_2}$. Но этого не может быть, потому что $S_1 > P_1$, а $\Sigma_2 < P_2$. Чтобы прийти к противоречию, предположив, что $\Sigma_2 > S_2$, достаточно поменять местами первый и второй круг.

Евдокс занимался и задачей удвоения куба, но об этом известно лишь то, что он решил её с помощью кривых линий.

Евдокс предложил систему движения планет по сферам. В центре покоится Земля. Для объяснения движения каждой планеты используется по четыре сферы, а для объяснения движения Солнца и Луны —

по три.

2.11. Динострат (390-320 до н.э.)

Динострат — брат Менехма, о котором скоро пойдёт речь.

Гиппий из Элиды (460-400 до н.э.) предложил использовать для деления угла в данном отношении кривую, которую впоследствии Динострат использовал для решения задачи квадратуры круга. Это решение сохранилось лишь в передаче Паппа, который жил на пять веков позже Динострата. Мы сначала перескажем текст Паппа, а затем прокомментируем его, следуя статье [17], потому что с точки зрения истории математики в этом решении слишком много загадочного.

Квадратриса Динострата получается следующим образом. Рассмотрим квадрат $ABCD$ (рис. 2.22). Пусть концы отрезка BC равномерно движутся по прямым BA и CD, а отрезок AB равномерно вращается вокруг точки A, причём в положение AD оба отрезка приходят одновременно. Пусть, далее, в некоторый момент отрезок BC занимает положение $B'C'$, а отрезок AB занимает положение AN; L — точка пересечения отрезков $B'C'$ и AN. Квадратриса Динострата — это множество всех точек L. Если квадратриса пересекает отрезок AD в точке K, то длина дуги BD равна AB^2/AK (это мы докажем чуть позже). Поэтому площадь окружности радиуса AB равна площади прямоугольника со сторонами $4AB^2/AK$ и $AB/2$; эти отрезки легко строятся с помощью циркуля и линейки, если известны отрезки AB и AK. Построив прямоугольник, можно построить равновеликий ему квадрат.

Папп пишет, что против этого решения Спор выдвинул два серьёзных возражения, с которыми сам он полностью согласен.

1) Чтобы согласовать движение отрезков BC и AB, нужно заранее знать отношение длины дуги четверти окружности к радиусу. Поэтому решить задачу квадратуры круга с помощью квадратрисы Динострата можно, только если её решение уже известно.

2) Точку K построить нельзя, потому что в соответствующий мо-

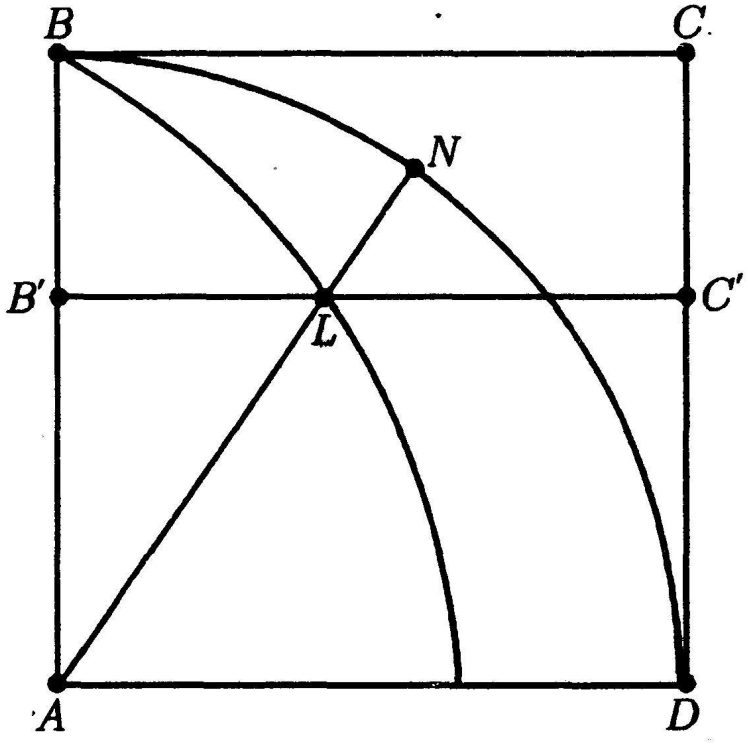

Рис. 2.22.

мент времени отрезок и радиус совпадают. Как пересечения отрезков $B'C'$ и AN можно строить лишь точки, близкие к точке K, но не саму точку K. Говоря современным языком, точку K можно построить лишь как предел точек квадратрисы.

Докажем теперь, что длина дуги BD действительно равна AB^2/AK, т. е. $\overset{\frown}{BD} : AB = AB : AK$, где $\overset{\frown}{BD}$ — длина дуги BD (в этом параграфе мы будем использовать такое нестандартное обозначение). Доказательство проведём методом от противного. Ясно, что $\overset{\frown}{BD} : AB = AB : AK_1$, где AK_1 — некоторый отрезок, и поэтому достаточно доказать, что длина отрезка AK_1 не может быть ни больше, ни меньше длины отрезка AK.

Предположим сначала, что $AK_1 > AK$. Тогда окружность радиуса AK_1 с центром A пересекает квадратрису в некоторой точке L, а сторону AB — в точке Z (рис. 2.23). Так как $\overset{\frown}{BD} : AB = AB : AK_1 = \overset{\frown}{BD} : ZK_1$, то $AB = \overset{\frown}{ZK_1}$. По определению квадратрисы $\overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{ND} = BA : LH$. Но $\overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{ND} = \overset{\frown}{ZK_1} : \overset{\frown}{LK_1}$ и $BA : LH = \overset{\frown}{ZK_1} : LH$,

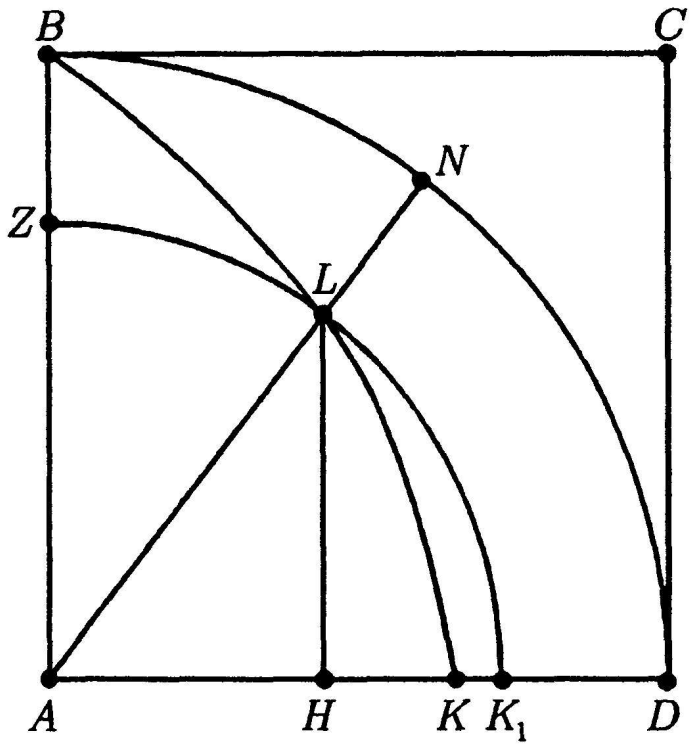

Рис. 2.23.

поэтому $L\overset{\frown}{K}_1 = LH$, что, как пишет Папп, «нелепо».

Предположим теперь, что $AK_1 < AK$. Тогда касательная в точке K_1 к окружности радиуса AK_1 с центром A пересекает квадратрису в некоторой точке L. Прямая AL пересекает окружности с радиусами AK_1 и AD в точках M и N соответственно (рис. 2.24). Так как $B\overset{\frown}{D} : AB = AB : AK_1 = B\overset{\frown}{D} : C\overset{\frown}{K}_1$, то $AB = C\overset{\frown}{K}_1$. По определению квадратрисы $B\overset{\frown}{D} : N\overset{\frown}{D} = BA : LK_1$. Но $B\overset{\frown}{D} : N\overset{\frown}{D} = Z\overset{\frown}{K}_1 : M\overset{\frown}{K}_1$ и $BA : LK_1 = Z\overset{\frown}{K}_1 : LK_1$, поэтому $M\overset{\frown}{K}_1 = LK_1$, что, как снова пишет Папп, «нелепо».

В этом решении много загадочного. Прежде всего, непонятно, какую именно задачу решал Динострат: задачу квадратуры круга, т. е. построения квадрата, равновеликого данному кругу, или же задачу спрямления окружности, т. е. построения отрезка, длина которого равна длине данной окружности. Со времен Архимеда эти задачи были эквивалентны: он доказал, что если радиус окружности равен R, а длина окружности равна L, то площадь круга равна площади прямо-

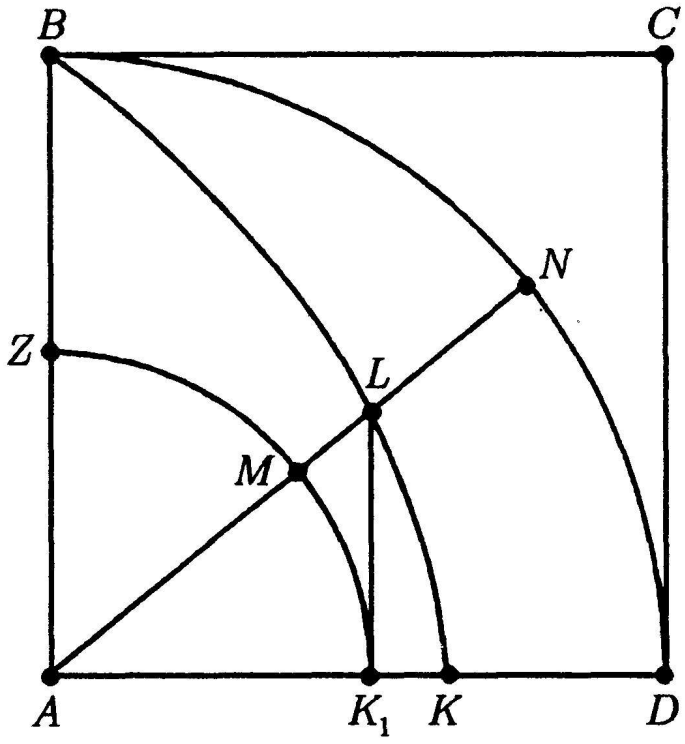

Рис. 2.24.

угольника со сторонами R и $L/2$. Но ведь Диностpат жил задолго до Архимеда, а то доказательство, которое приводит Папп, даёт именно спрямление окружности, а не квадратуру круга! Как же это понимать? Возможно, у Диностpата было доказательство, дающее именно квадратуру круга, а Папп просто привёл другое доказательство, но это совершенно невероятно. Скорее всего, теорема, доказанная Архимедом, была известна (без доказательства) ещё во времена Диностpата. К сожалению, книга Архимеда «Измерение круга» дошла до нас в сильно искажённом виде. Возможно, что у неё было предисловие, в котором Архимед излагал предысторию своей теоремы, но это предисловие не сохранилось; книга начинается сразу формулировкой теоремы: «Всякий круг равен прямоугольному треугольнику, причём радиус круга равен одной из прилегающих к прямому углу сторон, а периметр — основанию треугольника».

В приведённом доказательстве свойства квадратрисы Папп использует теорему о том, что отношение длин окружностей равно отношению их радиусов. Это весьма странно. В «Началах» Евклида, который жил после Диностpата, есть теорема о том, что площади кругов

относятся как квадраты радиусов, а вот нужной нам теоремы нет, причём это не случайно. Для сравнения площадей фигур есть естественный способ: если одна фигура лежит внутри другой, то должность внутренней фигуры меньше площади внешней. А как сравнивать длины кривых? Евклид не смог предложить никакого разумного способа, строгость которого его бы устраивала. Возможный подход к сравнению длин кривых у Евклида слегка намечен. В его «Началах» есть теорема о том, что одна сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. Прокл писал, что эпикурейские математики считали смешным доказывать такое положение, так как его прекрасно знает осёл, идущий к сену по прямой линии. Архимед поступил ещё решительнее эпикурейцев. Он счёл необходимым принять без доказательства, что если две выпуклые кривые имеют общие концы и одна из них лежит внутри другой (рис. 2.25), то длина внутренней кривой меньше длины внешней. Более того, аналогичное утверждение он принял без доказательства не только для кривых, но и для поверхностей, и лишь эта смелость позволила ему доказать знаменитую теорему о том, что отношение площадей поверхностей шара и описанного около него цилиндра равна 2/3. (Архимед очень гордился этой теоремой и теоремой об объёме шара и завещал высечь на его надгробии цилиндр, описанный вокруг шара; по этому знаку Цицерон нашел могилу Архимеда «среди терниев и чертополоха».) Принимать без доказательства Архимед мог, казалось бы, лишь те утверждения, которые были очевидны для тел и фигур, с которыми он умел обращаться. Но вовсе не очевидно, например, что если один тетраэдр лежит внутри другого, то площадь поверхности внутреннего тетраэдра меньше площади поверхности внешнего.

В тексте Паппа есть ещё два загадочных места, а именно неравенства, которые он считает очевидными и молчаливо обходит. При разборе случая $AK < AK_1$ Папп считает очевидным, что $LH < \overset{\frown}{LK_1}$ (см. рис. 2.23), а при разборе случая $AK > AK_1$ он считает очевидным, что $\overset{\frown}{MK} < LK_1$ (см. рис. 2.24). Для удобства изобразим все

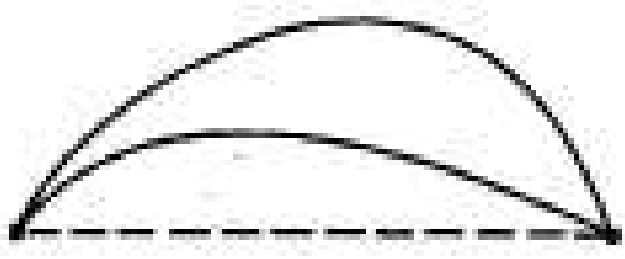

Рис. 2.25.

нужные отрезки и дуги на одном рисунке. Неравенства $PQ < \overset{\frown}{PQ}_1 < P_1Q_1$ (рис. 2.26) для окружности радиуса 1 можно записать в виде $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$. Первое неравенство еще можно счесть очевидным: $PQ < PQ_1 < \overset{\frown}{PQ}_1$. Но как быть со вторым неравенством? Обычно его доказывают следующим образом: если радиус окружности равен 1 и S — площадь сектора POQ_1, то неравенство $2S < 2S_{OP_1Q_1}$ можно переписать в виде $\alpha < \operatorname{tg}\alpha$ (а неравенство $2S_{OPQ} < 2S$ можно переписать в виде $\sin\alpha < \alpha$). Но при этом нельзя обойтись без соотношения $S = R \cdot L/2$, где S — площадь сектора, R — радиус окружности, L — длина дуги сектора, а до Архимеда доказательства этого соотношения не было. По-видимому, формула для вычисления площади сектора Диностату была известна, но без доказательства. Эту формулу древнегреческие математики могли перенять от египетских или вавилонских математиков (по крайней мере, площадь полукруга в Вавилоне вычисляли именно по такой формуле).

* * *

Приведенное выше описание квадратрисы не устраивало древнегреческих математиков по многим причинам. Они вообще не любили вводить движение в математику, а в данном случае речь шла сразу о движении двух отрезков, причём эти движения нужно было согласовывать. Поэтому были предложены два описания квадратрисы с помощью пересечения поверхностей (они сохранились в сочинениях Паппа). Задание кривой как пересечения поверхностей считалось наиболее за-

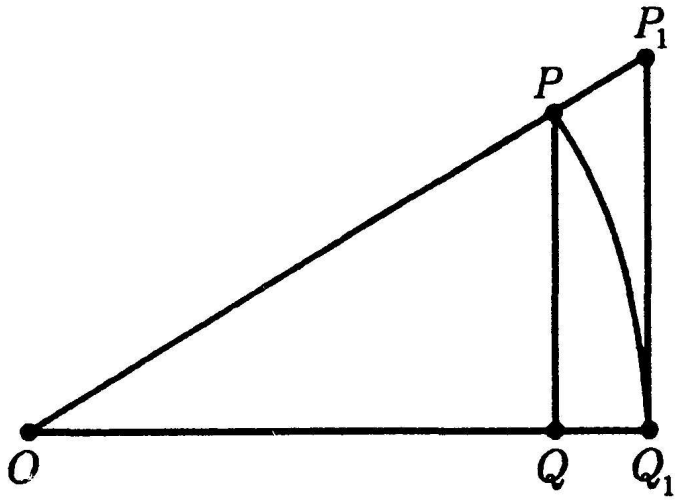

Рис. 2.26.

конным. Греческие математики безоговорочно верили в то, что пересечение поверхностей даёт «хорошую» кривую, а также в то, что кривые обязательно пересекаются в тех случаях, когда это, так сказать, «видно». Архид Тарентский без каких-либо сомнений рассматривал пересечение цилиндра, конуса и тора (точнее говоря, он рассматривал сначала кривую, которую вычерчивает на цилиндре вращающийся полукруг, а затем брал точку пересечения этой кривой и конуса). Евклид не счёл нужным в свою систему аксиом вводить аксиомы, связанные с пересечением окружностей, а уже в самом первом предложении «Начал» для построения равностороннего треугольника он использовал то, что окружность радиуса AB с центром A пересекается с окружностью радиуса BA с центром B.

Первый способ задания квадратрисы использует винтовую линию. Винтовая линия получается при движении точки по поверхности цилиндра, слагающемся из двух движений: движения с постоянной скоростью, направленной параллельно оси цилиндра, и вращения по окружности основания цилиндра с постоянной угловой скоростью (рис. 2.27). Рассмотрим четверть круга и лежащую над ней часть винтовой линии (на рис. 2.28 она изображена пунктиром). Опустим из точки L, лежащей на радиусе AN, перпендикуляр LH на радиус AC. Пусть $LH : \overset{\frown}{NC} = p$; если $p = AB : \overset{\frown}{BC}$, то точка L лежит на квадратрисе.

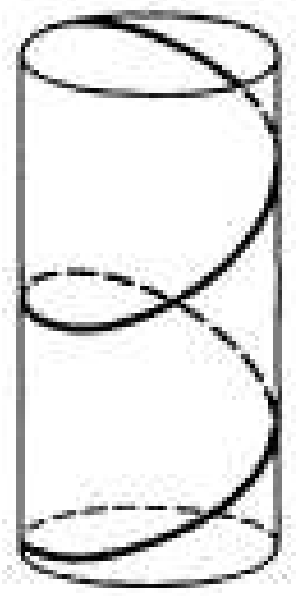

Рис. 2.27.

Если Q — точка винтовой линии, проецирующаяся в точку N, то по свойству винтовой линии $ON : \overset{\frown}{NC} = q$ — постоянная величина. Пусть P — такая точка перпендикуляра l к плоскости ABC, восставленного из точки A, что $PQ \parallel AN$; R — точка отрезка PQ, проецирующаяся в точку L. Тогда $LH : RL = (LH : \overset{\frown}{NC}) : (RL : \overset{\frown}{NC}) = p : q$, т. е. точка R лежит в плоскости Π, проходящей через прямую AC и образующей с плоскостью ABC угол α, где $\operatorname{tg}\alpha = p/q$. Кривая, образованная точками R, является пересечением плоскости Π и поверхности, образованной отрезками PQ (точка P движется по прямой l, а точка Q движется по винтовой линии), а квадратриса является ортогональной проекцией этой кривой на плоскость ABC.

Второй способ задания квадратрисы как пересечения поверхностей использует спираль Архимеда, т. е. кривую, которую заметает точка M, равномерно движущаяся по радиусу AN, который в свою очередь равномерно вращается вокруг точки A. Рассмотрим часть спирали, полученную при повороте радиуса AN на $90°$ от положения AC до положения AB (рис. 2.29). Опустим из точки L, лежащей на квадратрисе, перпендикуляр LH на отрезок AC. По свойству квадра-

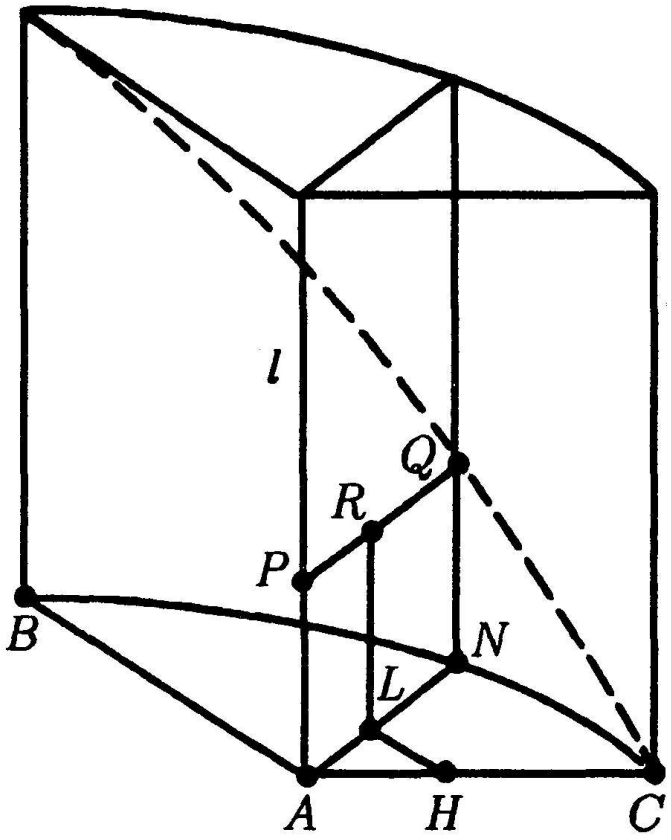

Рис. 2.28.

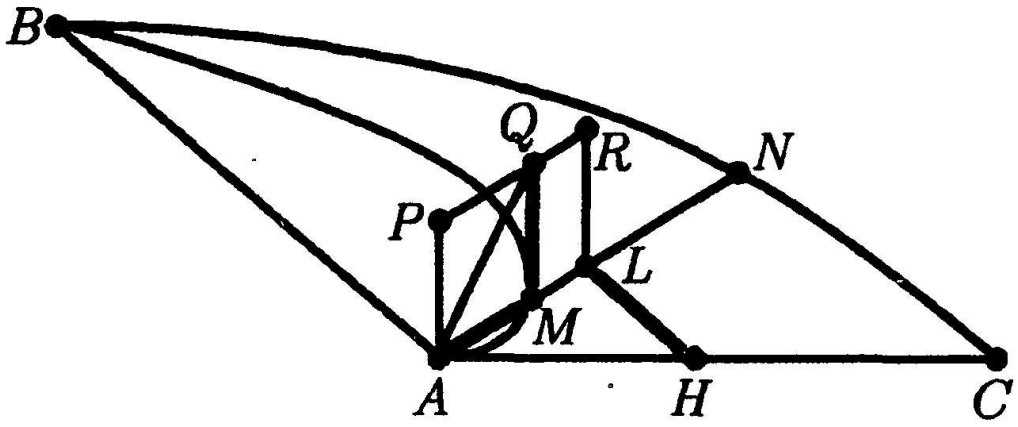

Рис. 2.29.

трисы $LH : \overset{\frown}{NC} = AB : \overset{\frown}{BC}$, а по свойству спирали Архимеда $AB : \overset{\frown}{BC} = AM : \overset{\frown}{NC}$, поэтому $LH = AM$. Восставим из точек A, M и L перпендикуляры AP, MQ и LR к плоскости ABC длиной $LH = AM$. Точка Q лежит как на цилиндре над спиралью, так и на конусе, осью которого является луч AP, а угол между осью и образующей равен 45°. Кривая, образованная точками Q, является пересечением этих двух поверхностей. Рассмотрим теперь поверхность, образованную лучами PQ. Так как $RL = LH$, то точка R лежит на пересечении этой поверхности и плоскости, проходящей через прямую AC и образующей с плоскостью ABC угол 45°. Квадратриса является ортогональной проекцией кривой, образованной точками R, на плоскость ABC.

2.12. Аристотель (384-322 до н.э.)

В 17 лет Аристотель начал обучаться в Академии Платона, которой в то время вместо Платона, уехавшего на Сицилию, временно руководил Евдокс Книдский. Затем Аристотель сам стал учителем и оставался в Академии 20 лет. В 335 г до н.э. он основал свою философскую школу, которая получила название Лицей.

Аристотель впервые отчетливо сформулировал основные принципы аксиоматического построения науки, развивая учения Пифагора и

Платона. Он отмечал, что при доказательстве того или иного утверждения мы опираемся на ранее установленные факты. Поэтому те положения, с которых мы начинаем построение науки, не могут быть логически доказаны — их следует принять в качестве аксиом. Аристотель детально разработал понятия аксиомы и постулата.

Аристотель считал, что законы движения тел земных и небесных различны. В пределах Земли естественное движение тела — по прямой, а для небесных тел естественное движение — по окружности.

Аристотель часто цитирует аксиому, что если из равных вычесть равные, то остатки равны. Но он нигде не приводит примеров геометрических постулатов. Это означает, что постулаты Евклида софрмулировал сам Евклид.

Воплощением учения Аристотеля об аксиомах, постулатах, определениях и доказательствах явился знаменитый труд Евклида «Начала». В нём сформулировано сравнительно небольшое количество аксиом и постулатов, из которых выведены почти все известные в то время теоремы. Аристотель (а следуя ему и Евклид) различал аксиомы (истины, общие для все наук) и постулаты (истины, свойственные определённой науке). Впоследствии это различие почти утратилось, и сейчас то, что Евклид называл постулатами, обычно тоже называют аксиомами.

Аристотель неоднократно упоминает гипотезу о том, что сумма углов треугольника не равна двум прямым углам. Он даже пишет («О небе» 281 b 5-7), что если принять такую гипотезу, то диагональ квадрата соизмерима с его стороной. В другом месте («Метафизика» 1052 a 6-7) он пишет, что сумма углов треугольника не может быть иногда равной двум прямым, а иногда не равной. Это означает, что ещё до Евклида древнегреческие математики занимались обсуждением вопроса, что получится, если принять постулат о том, что сумма углов треугольника не равна двум прямым углам.

В сочинении «Метеорологика» (книга III, глава 5) Аристотель при обсуждении свойств радуги доказывает теорему об окружности Аполлония. Так что либо это место — позднейшая вставка, либо теорема об окружности Аполлония была известна задолго до Аполлония. И мнения

по этому поводу расходятся. Евтокий (IV в), знаменитый комментатор трудов Архимеда и Аполлония, считал, что эта теорема была доказана Аполлонием. Известный английский историк математики Хиз (Heath) считал, что эта теорема могла быть известна во времена Архимеда, и потому могла быть включена в текст «Метеорогики» им самим.

В сочинении «О небе» (ii 4 287 a 27) утверждается, что среди всех фигур данного периметра наибольшую площадь имеет круг. Так что изопериметрической задачей занимались задолго до Зенодора.

Аристотель во многом прояснил такие важные для математики понятия как *непрерывность* и *бесконечность*. Аристотель признавал только потенциальную бесконечность. Аристотель пишет, что математикам нужно лишь, чтобы конечную прямую (т.е. отрезок) можно было продолжать, сколько требуется. Евклид пользуется только этим свойством (например, в формулировке пятого постулата). Аристотель отрицал даже потенциальное существование суммы выличин, превосходящей данную величину. Это противоречило аксиоме Евдокса, и впоследствии Архимеду приходилось оправдываться в использовании этой аксиомы по примеру древних геометров.

Аристотель неоднократно писал об открытой ещё пифагорейцами несоизмеримости диагонали квадрата и его стороны, но он не упоминает о хорошо известном Платому дальнейшем развитии теории квадратичных иррациональностей Феодором и Теэтетом.

2.13. Менехм (380-320 до н.э.)

Менехм, ученик Евдокса, брат Динстрата, прославился как астроном и математик.

О Менехме рассказывают, что когда Александр Македонский попросил его показать ему более короткий путь, чтобы изучить геометрию, Менехм ответил: «О царь, для путешествующих по этой стране есть царские дороги и дороги для простых граждан, но в геометрии для всех одна дорога.» То же самое рассказывают о Евклиде и царе Птолемее, но, вероятно, эта история произошла именно с Менехмом.

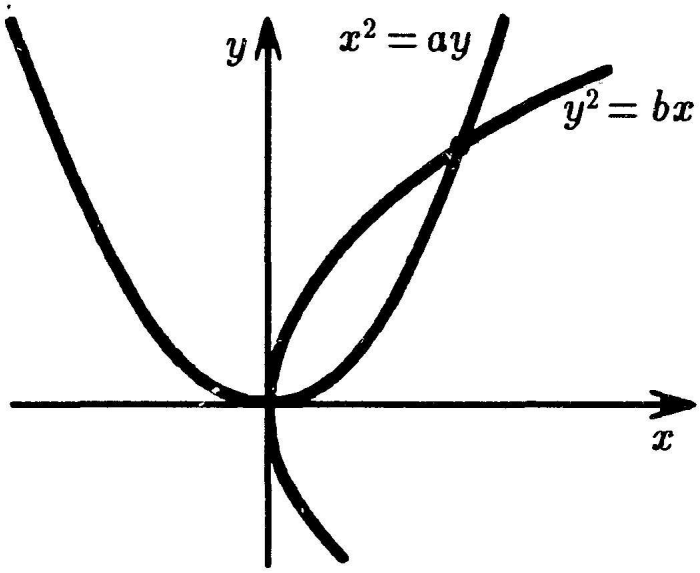

Рис. 2.30.

Важнейшее достижение Менехма — открытие конических сечений. Они понадобились ему для решения задачи удвоения куба На современном алгебраическом языке это решение изложить очень легко. Если даны отрезки a и b и мы хотим найти такие отрезки x и y, что $a : x = x : y = y : b$, то их можно получить, решив любую из двух систем уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = ay, \\ y^2 = by \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x^2 = ay, \\ xy = ab. \end{cases}$$

С геометрической точки зрения решение первой системы уравнений сводится к построению точки пересечения двух парабол (рис. 2.30), а решение второй системы — к построению точки пересечения параболы и гиперболы (рис. 2.31). Обе параболы и гипербола проходят через одну точку.

Менехм предложил оба эти решения.

Параболу и гиперболу Менехм, скорее всего, получал как сечения конуса плоскостью, перпендикулярной образующей конуса. В то время рассматривали только конусы вращения и называли их остроугольными, прямоугольными и тупоугольными в соответствии с тем, каким было осевое сечение. Парабола получалась как сечение прямоугольного

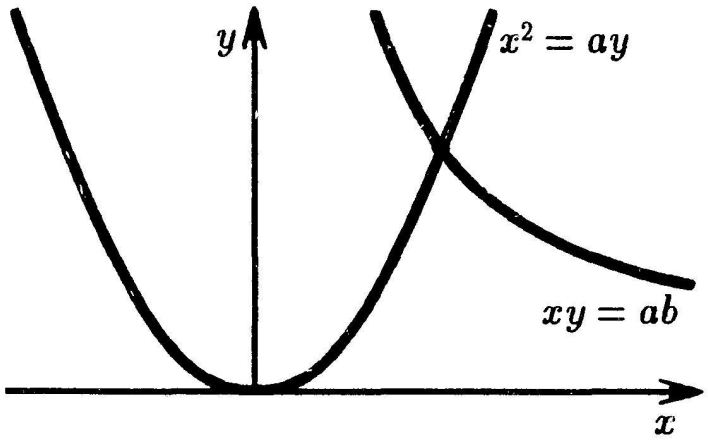

Рис. 2.31.

конуса, а гипербола — тупоугольного. Это было отражено в древнейших названиях параболы и гиперболы.

В Древней Греции не было систематического использования системы координат, но для конических сечений были известны их уравнения сначала в прямоугольных, а затем и в косоугольных координатах. Древнегреческие математики называли эти уравнения *симптомами* конических сечений. Предложенные Менехмом решения задачи удвоения куба показывают, что он должен был знать симптомы параболы и равнобочной гиперболы.

Симптом параболы, являющейся сечением прямоугольного конуса, перпендикулярным образующей, Менехм мог получить следующим образом. Рассмотрим осевое сечение конуса плоскостью, перпендикулярной плоскости, в которой лежит парабола. Пусть P — точка параболы, N — проекция этой точки на плоскость осевого сечения (рис. 2.32). Сечение конуса, парпендикулярное его оси, является окружностью, поэтому $PN^2 = BN \cdot NC = \sqrt{2}AN \cdot AG = 2AN \cdot AL$. Таким образом, $PN^2 = 2AL \cdot AN$. Это и есть симптом параболы: если ось абсцисс — это ось параболы, а начало координат — точка A, то уравнение параболы записывается в виде $y^2 = 2ax$, где $a = AL$.

Ситуация с гиперболой гораздо сложнее. Менехму нужна была именно равнобочная гипербола. Чтобы получить её как сечение конуса плоскостью, перпендикулярной образующей, конус нужно выбрать спе-

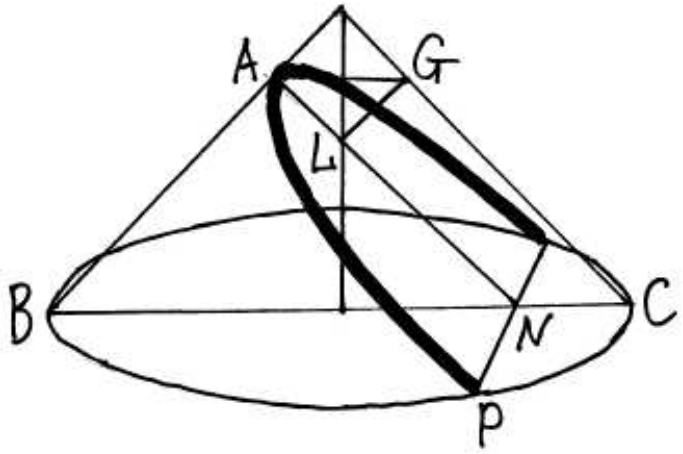

Рис. 2.32.

циальным образом, и это сложная задача. Поэтому нельзя исключить, что Менехм получал равнобочную гиперболу как сечение того же самого прямоугольного конуса, но теперь уже плоскостью, параллельной оси.

2.14. Евклид (325-265 до н.э.)

О жизни Евклида почти ничего не известно. Сохранились лишь отрывочные упоминания о нём у его комментаторов, но и эти краткие дееписания производят впечатление и заставляют задуматься. Наиболее известен рассказ Прокла о том, что когда Птолемей I, правитель Египта, спросил у Евклида, нет ли более короткого пути к геометрии, чем его «Начала», Евклид твёрдо ответил, что в геометрии нет царских дорог. А короткий рассказ Стобея с полной определённостью показывает взгляды Евклида на практическое значение математики. Один из тех, кто только начал учиться геометрии у Евклида, спросил его, усвоив лишь первое предложение: «А что я получу, выучив всё это?» Евклид позвал своего раба и сказал: «Дай ему три обола[2], ему, бедняжке, ведь нужно извлечь из учения выгоду».

Датировка жизни Евклида основана на рассказе Прокла: правление Птолемея I, с которым беседовал Евклид в зрелые годы, приходится на

[2]Обол — древнегреческая монета; дневной заработок ремесленника составлял как раз примерно три обола.

306 — 283 гг. до н. э.; это вполне согласуется со словами Прокла о том, что Евклид был моложе, чем ученики Платона, но старше, чем Эратосфен и Архимед. Прокл говорит также, что Евклид был платоником; во всяком случае, по-видимому, его учителями геометрии были афинские платоники. Папп сообщает, что Аполлоний очень долгое время провёл с учениками Евклида в Александрии; значит, Евклид основал в Александрии школу.

Вот, по сути дела, и все сколько-нибудь достоверные сведения о жизни Евклида. Но и явно недостоверные вымыслы тоже интересны: они свидетельствуют о распространенности трудов Евклида и о его славе. Арабские источники, например, сообщают, что Евклид жил в Дамаске, и даже производят его имя от арабских слов «Укли» (ключ) и «Дис» (измерение, геометрия), т. е. «ключ к геометрии».

Когда в Европе начали возникать университеты, во многих из них студенты изучали «Начала» Евклида (эта книга изначально была предназначена для взрослых людей, не для школьников; перенос структуры «Начал» в школьные учебники является явным недоразумением). Изучение «Начал» было весьма поверхностным; они считались очень трудной и запутанной книгой. В XVI в. соискатели степени магистра искусств должны были торжественно поклясться, что они прослушали лекции по первым шести книгам Евклида. Теорема о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника (книга I, предложение 5) казалась студентам очень трудной «вследствие большого количества встречающихся в ней линий и углов». Из-за непривычки к математическим рассуждениям студентам приходилось заучивать доказательства Евклида наизусть. Первую книгу «Начал» усваивали очень немногие. Например, уже доказательство теоремы Пифагора (предложение I, 47) могло быть диссертацией магистра математики.

До Евклида тоже писали книги такого рода. Первым написал свои «Начала» Гиппократ Хиосских. Более тщательно составил «Начала» Леонт, ученик Неоклида. Хорошие «Начала» составил Тевдий из Магнесии. Но все эти «Начала» утратили свое значение после появления «Начал» Евклида и до нашего времени не сохранились, потому что их

больше не переписывали.

«Начала» Евклида использовались в качестве учебника геометрии вплоть до 19 века. Все современные школьные учебники геометрии отличаются от книги Евклида лишь несущественными дополнениями и существенными сокращениями.

Евклид собрал многое из открытого Евдоксом и улучшил многое из открытого Теэтетом. Он также дал строгие доказательства того, что до него доказывалось менее строго. Сравнение доказательств Евклида с теми доказательствами, которые встречаются у Аристотеля, показывает, что многие доказательства Евклида оригинальные, причём уже для самых первых предложений.

Евклид описывал геометрию как систему предложений (теорем), которые последовательно выводятся из нескольких перечисленных им основных понятий и истин. Такое построение геометрии называют *синтетическим*. Все написанные впоследствии учебники геометрии очень многим обязаны книге Евклида. Его схему изложения использовали не только в книгах по математике, но и по механике (Ньютон) и даже по философии (Спиноза).

Из всех известных во времена Евклида математических теорий в «Начала» не вошло не так уж много: учение о конических сечениях; сферическая геометрия; исследования, связанные с тремя классическими задачами на построение; квадрируемые луночки Гиппократа.

Евклид не приводит ни одного численного примера. Он ничего не говорит о способах вычислений, которые должны были существовать в его время.

Помимо «Начал» Евклид написал еще 10 книг по математике и её приложениям (астрономия, оптика, теория музыки), многие из которых сохранились до нашего времени. Но влияние всех остальных книг Евклида было несравненно меньше.

По-гречески книга Евклида называлась $\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\alpha$ (от этого слова происходит русское «стихия»), а в латинском переводе она называлась «Elements».

«Начала» Евклида состоят из 13 книг, последняя из которых посвя-

щена построению правильных многогранников. Впоследствии другими авторами были написаны дополнительно книги 14 и 15, посвящённые правильным многогранникам. (Книгу 14 написал александриец Гипсикл около 200 г. н. э., а книга 15 была написана, вероятно, в VI в. н. э.)

2.14.1. Книга I

Евклид начинает с определений.

1) Точка есть то, что не имеет частей.

2) Линия же — длина без ширины.

3) Концы же линии — точки.

4) Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней.

5) Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.

6) Концы же поверхности — линии.

7) Плоская поверхность есть та, которая равно расположена по отношению к прямым на ней.

Далее следуют определения угла, круга, треугольника, четырёхугольника. Последнее определение такое.

23) Параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той ни с другой стороны не встречаются.

После определений следуют постулаты.

Допустим:

1) Что от всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию.

2) И что ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.

3) И что из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг.

4) И что все прямые углы равны между собой.

5) И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти

две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.

За постулатами, которые относятся к определённым геометрическим понятиям, идут аксиомы (общие понятия), которые относятся ко всем наукам: «Равные одному и тому же равны и между собой», «Целое больше части» и т.п.

В третьем постулате Евклида говорится, что можно построить окружность с данным центром и данным радиусом, проведённым из этого центра. Возможность построить окружность с данным центром и радиусом, заданным в другом месте плоскости, доказывается в предложении I, 2. Это согласуется с требованием не делать излишних гипотез.

Пятый постулат своей тяжеловесной формулировкой и меньшей очевидностью резко отличается от остальных постулатов. Это побудило многих математиков полагать, что пятый постулат лишний, т.е. он на самом деле является теоремой, которую можно вывести из остальных постулатов и аксиом Евклида. И лишь открытие неевклидовой геометрии Гауссом, Лобачевским и Бойяи подтвердило, что Евклид был прав: без пятого постулата нельзя обойтись в построении его геометрии.

Система постулатов и аксиом Евклида неполна, поэтому логическая структура «Начал» Евклида, на современный взгляд, странная. С одной стороны, Евклид формулирует определения, постулаты и аксиомы, из которых он затем выводит теоремы. С другой стороны, некоторые утверждения он считает очевидными и использует их без каких-либо оговорок. У Евклида нет аксиом движения, нет аксиом непрерывности, но ему приходится ими пользоваться. Причина, по-видимому, в том, что формулировка и тех и других аксиом в то время была бы чрезвычайно трудна. Движений Евклид старался по возможности избегать, но с непрерывностью ему пришлось столкнуться уже в первом предложении о существовании равностороннего треугольника с данной стороной AB. Его рассуждения следующие. Построим окружность с центром A и радиусом AB и окружность с центром B и радиу-

сом BA. (Возможность таких построений оговорена постулатом 3.) Эти окружности обязательно пересекутся в некоторой точке C. (Вот пример утверждения, очевидного с точки зрения Евклида.) Проведём прямые AC и CB. (Возможность проведения прямой через две точки оговорена постулатом 1.) Тогда $AC = AB$ и $CB = AB$, поэтому $AC = CB$. (Это следует из аксиомы 1: равные одному и тому же равны и между собой.) Трудно сказать, по каким причинам утверждение о том, что рассматриваемые окружности пересекаются в некоторой точке, казалось Евклиду более очевидным, чем те утверждения, которые он выделил в качестве постулатов и аксиом. По-видимому, это было связано с тем, что понятия, связанные с непрерывностью, в то время ещё не были разработаны. Ещё один пример утверждение, которое для Евклида очевидно, — это единственность прямой, проходящей через две точки (у Евклида есть постулат о существовании такой прямой, но ничего не говорится о том, что такая прямая единственна).

«Начала» Евклида отвечали всем требованиям строгости рассуждений, которые были выработаны древнегреческими математиками и философами. Для греков построение было единственным достоверным способом доказательства существования чего-либо. Возможно, именно поэтому доказательство существования правильного треугольника с заданной стороной представлялось Евклиду и его современникам безупречным. Аксиоматический метод в то время ещё только начинал разрабатываться и не достиг того уровня, на который поставил его Гильберт. Многие рассуждения, которые не были непосредственным логическим выводом из аксиом, считались греками достоверными.

В первой книге «Начал» обуждаются различные геометрические построения. Начинается она с построения равностороннего треугольника, затем следуют построение биссектрисы угла и построение перпендикуляра к прямой. Далее в первой книге доказываются признаки равенства треугольников.

Евклид, по-видимому, был недоволен формулировкой пятого постулата. Он избегал им пользоваться до тех пор, пока это было возможно — в первых 28 теоремах он не используется. Первое использование пя-

того постулата — в теореме 29 (о равенстве накрест лежащих углов, образованных при пересечении секущей двух параллельных прямых). При таком построении геометрии Евклид мог опираться на исследования предшествующих геометров, тщательно изучавших как следствия из гипотезы о том, что сумма углов треугольника равна двум прямым углам, так и следствия из гипотезы о том, что сумма углов треугольника не равна двум прямым.

Прежде чем воспользоваться серединой отрезка (I, 16), Евклид доказывает путём построения (I, 10), что эта точка действительно существует. Так же он поступает и во всех других подобных случаях.

При построении треугольника с заданными сторонами (I, 22) Евклид не доказывает, что треугольник существует (хотя и оговаривает, что каждая сторона должна быть меньше двух других сторон).

Предложения 33-48 относятся к площадям параллелограммов и треугольников. Здесь вводится понятие равновеликих фигур.

Предложения 42-45 относятся к задаче о построении квадрата, равновеликого данному многоугольнику. Окончательно эта задача будет решена только в книге II (предложение 14). В книге I Евклид сначала строит параллелограмм с данным углом, равновеликий данному треугольнику (предложение 42). Затем он доказывает лемму, на которой основано решение этой задачи: параллелограммы, заштрихованные на рисунке 2.33, равновелики. Эта лемма позволяет по данному параллелограмму построить равновеликий ему параллелограмм с данной стороной и такими же углами. На этом и основано решение задачи: из двух параллелограммов с одинаковыми углами, у каждого из которых есть сторона данной длины, можно составить один параллелограмм. Именно так Евклид доказывает предложение 44, которое заключается в построении параллелограмма с данными углами, равновеликого данному многоугольнику.

Евклид систематически излагает результаты, полученные его предшественниками, не упоминая их имен. Например, теорема Пифагора — это предложение I, 47 «Начал». Евклид не упоминает ни имени Пифагора, ни имени автора того доказательства, которое он приводит. До-

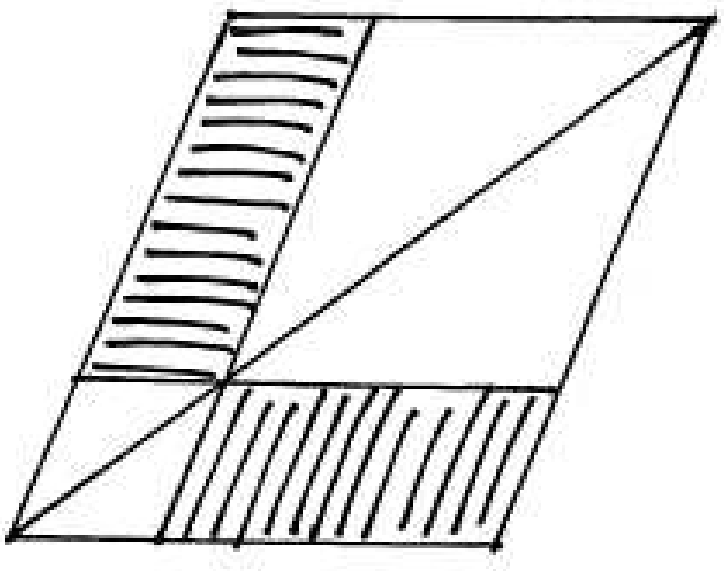

Рис. 2.33.

казательство теоремы Пифагора у Евклида следующее. Опустим из вершины A перпендикуляр AL на сторону DE квадрата (рис. 2.34). Треугольники ABD и FBC равны, поэтому площадь параллелограмма с диагональю BL равна удвоенной площади треугольника ABD, т. е. удвоенной площади треугольника FBC, а она, в свою очередь, равна площади квадрата $ABFH$. Аналогично доказывается, что площадь параллелограмма с диагональю CL равна площади квадрата $ACKG$.

Это доказательство во многом похоже на доказательство предложения VIII, 17, но оно избегает применения пропорций и опирается только на книгу I. Это доказательство, по-видимому, придумал сам Евклид.

2.14.2. Книга II

Основу книги II составляет так называемая *геометрическая алгебра*, разработанная ещё пифагорейцами. Геометрическая алгебра поразительно напоминает обычную школьную алгебру, но все алгебраические преобразования, влючая решение квадратных уравнений, выполняются геометрически. Возникает даже впечатление, будто греки нарочно перевели на геометрический язык алгебраические операции

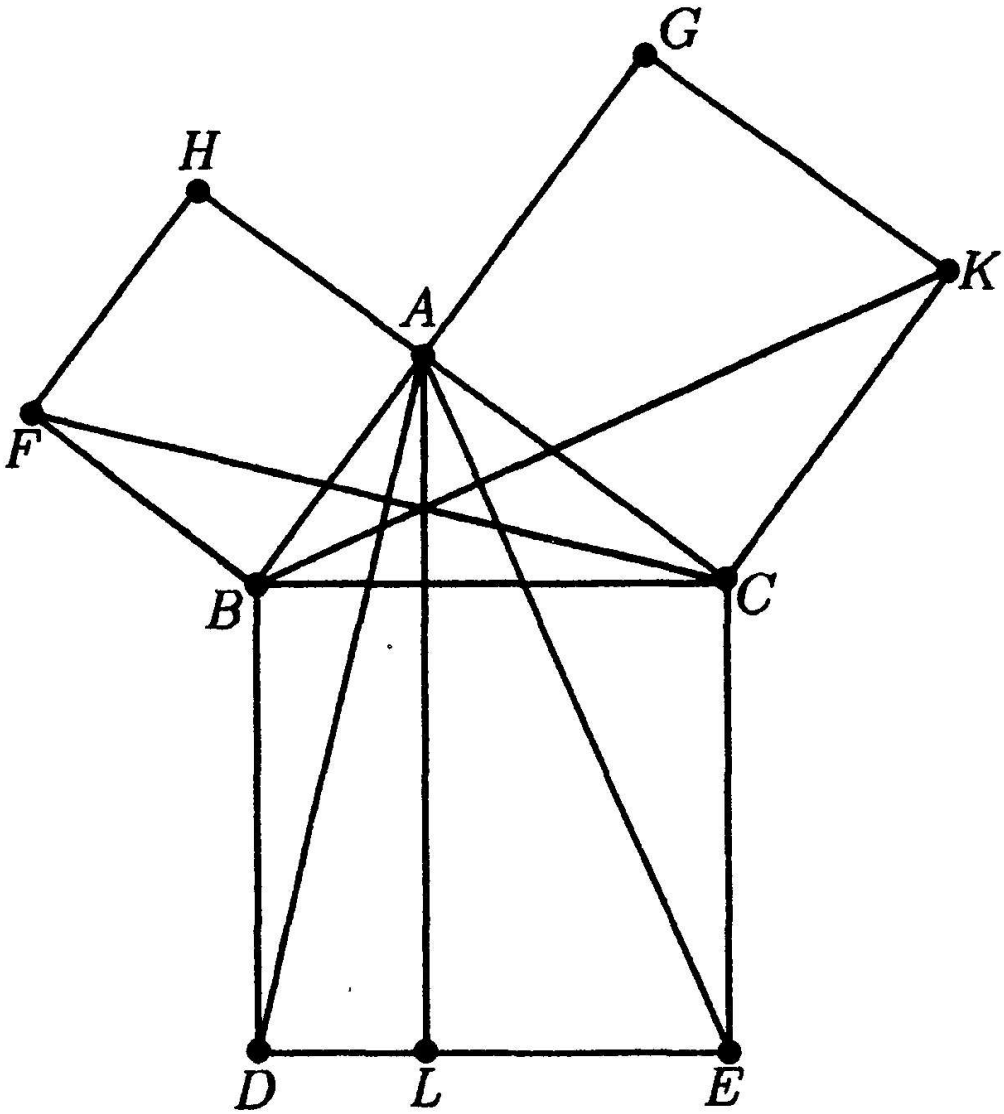

Рис. 2.34.

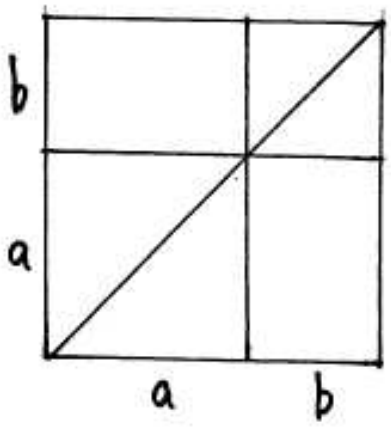

Рис. 2.35.

(именно поэтому и возникло впоследствии такое название: «геометрическая алгебра»). Возможно, пифагорейцы в ранние времена использовали какие-то алгебраические преобразования с числами. Но после открытия несоизмеримости стороны квадрата и его диагонали такие преобразования стали невозможными. Для древнегреческих математиков число было либо натуральным, либо положительным рациональным, поэтому диагональ квадрата со стороной 1 они не могли представлять себе как число, они могли представлять её только как отрезок. А произведение двух отрезков они представляли как прямоугольник.

В этой книге рассматриваются не параллелограммы общего вида, а прямоугольники и квадраты. Важное место во многих конструкциях занимает гномон.

В предложении II, 4 Евклид доказывает геометрически формулу квадрата суммы: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ (Евклид формулирует это как равенство площади одного квадрата сумме площадей двух других квадратов и удвоенной площади прямоугольника). Идея этого доказательства представлена на рис. 2.35.

Древнегреческие математики не были знакомы с понятием отрицательного числа, поэтому формула квадрата разности доказывается отдельно в предложении II, 7. Площади можно было только складывать, но не вычитать, поэтому у Евклида формула квадрата разности (на языке площадей квадратов и прямоугольников) выглядит так: $a^2 + b^2 = 2ab + (a-b)^2$. Идея доказательства этой формулы предста-

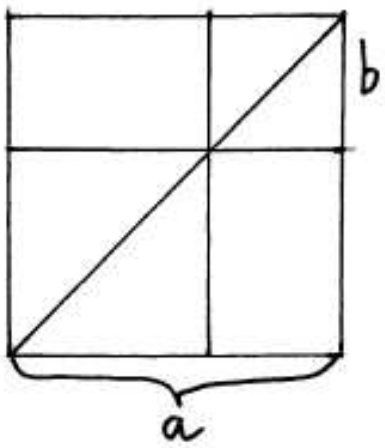

Рис. 2.36.

влена на рис. 2.36.

С алгебраической точки зрения предложения II, 5 и II, 6 представляют собой одно и то же тождество: $(a-b)(a+b)+b^2=a^2$. У Евклида они формулируются на языке площадей. Если воспользоваться рисунком 2.37, то эти предложения можно сформулировать так: сумма площади заштрихованного прямоугольника и заштрихованного квадрата равна площади большого квадрата. В книге «О заданных величинах» Евклид применяет предложения II, 5 и II, 6, чтобы доказать, что если дано произведение uv и сумма $u+v$ (или разность $u-v$), то известны и сами отрезки u и v. Если даны uv и $u+v$, то Евклид применяет предложение II, 5 и находит $b=\frac{u-v}{2}$, а если даны uv и $u-v$, то Евклид применяет предложение II, 6 и находит $a=\frac{u+v}{2}$.

Предложения II, 5 и II, 6 тесно связаны с предложениями VI, 28 и VI, 29, в которых к данному отрезку требуется приложить прямоугольник[3] данной площади с недостатком или с избытком. Что такое приложение с недостатком и с избытком, поясняет рис. 2.38: берётся прямоугольник, одной из сторон которого является данный отрезок, и от этого прямоугольника либо отрезается квадрат, либо к нему прикладывается квадрат. На алгебраическом языке это означает, что нужно решить уравнение $2ax-x^2=c^2$ или $2bx+x^2=c^2$, где c — сторона данного квадрата. (Предполагается, что площадь искомого

[3]В действительности, у Евклида формулировка несколько более общая: рассматриваются не прямоугольники, а параллелограммы.

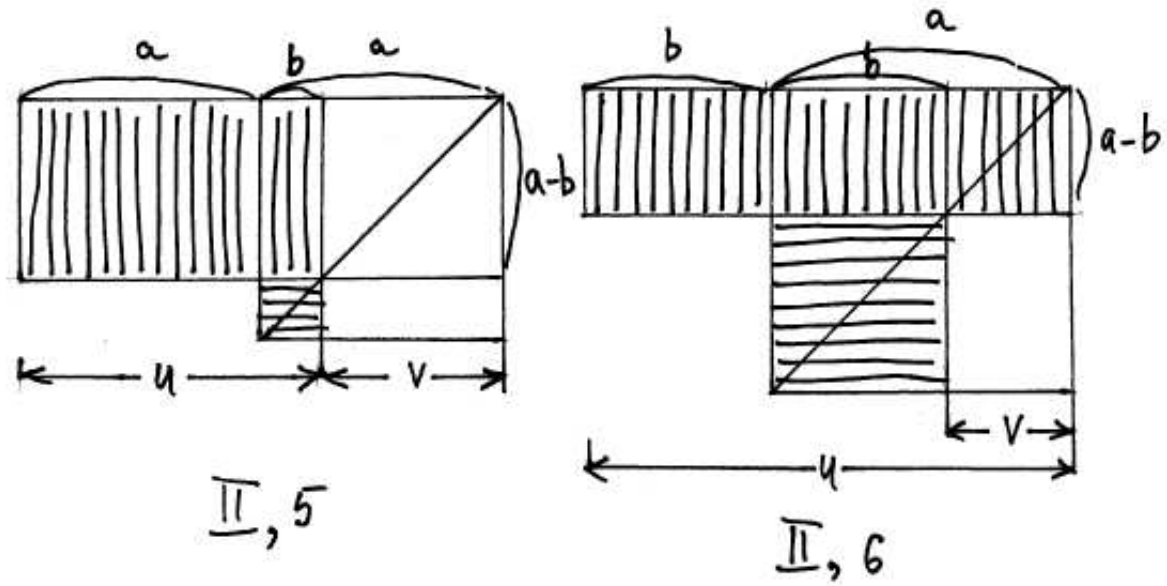

Рис. 2.37.

прямоугольника задана как квадрат со стороной c; таким образом, $c^2 = (a-b)(a+b)$.) Согласно предложениям II, 5 и II, 6 получаем: $c^2 + b^2 = a^2$. Для решения уравнения $2ax - x^2 = c^2$ находим $b = a - x$ как катет прямоугольного треугольника, у которого известны катет c и гипотенуза a; для решения уравнения $2bx + x^2 = c^2$ находим $a = b + x$ как гипотенузу прямоугольного треугольника, у которого известны катеты c и b.

Приложение с недостатком называлось *эллиптическим приложением площадей*, а приложение с избытком — *гиперболическим приложением площадей*. И было ещё *параболическое приложение площадей*, когда к данному отрезку требовалось приложить прямоугольник данной площади.

В предложении II, 11 Евклид строит золотое сечение: «Заданный отрезок разделить таким образом, чтобы прямоугольник, построенный на всём отрезке и на одной из частей, равнялся квадрату, построенному на другой части». Это построение тесно связано с решением квадратного уравнения $x^2 = p(p - x)$. Евклид не решает это уравнение. Он заранее знает корень этого уравнения, и он просто описывает, как этот корень построить, а затем с помощью предложения II, 6 проверяет, что построен действительно корень. Дела-

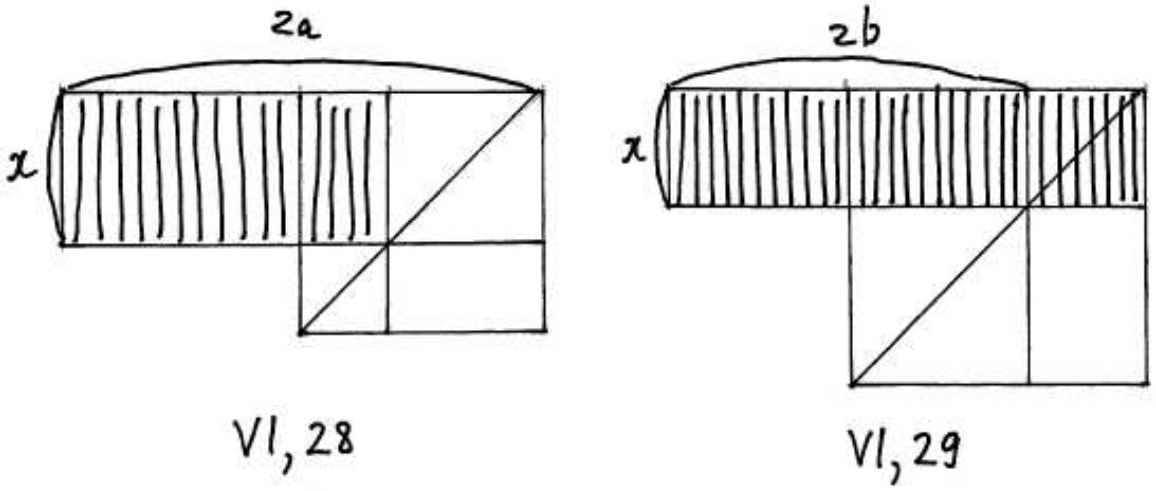

Рис. 2.38.

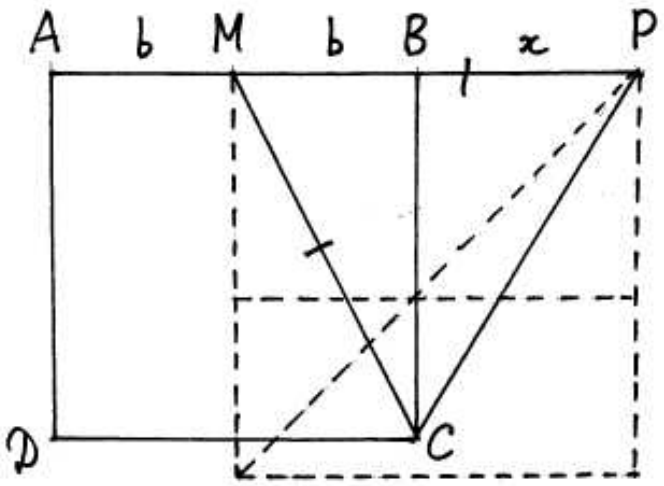

Рис. 2.39.

ется это так. Рассмотрим квадрат $ABCD$ со стороной a и построим середину M стороны AB. На луче MB построим отрезок MP, равный отрезку MC (рис. 2.39). Тогда BP — искомый отрезок x. Действительно, воспользуемся предложением II, 6, и при этом, чтобы согласовать наши обозначения с обозначениями рис. 2.37, положим $b = p/2$. В результате получим $x(2b + x) + b^2 = (b + y)^2$. По построению $(b + y)^2 = MP^2 = MC^2 = b^2 + (2b)^2$ (здесь мы воспользовались теоремой Пифагора), поэтому $x(2b+x) = (2b)^2$, т.е. $x(p+x) = p^2$. Это уравнение получается из исходного уравнения $x^2 = p(p - x)$, если к обеим его частям добавить px.

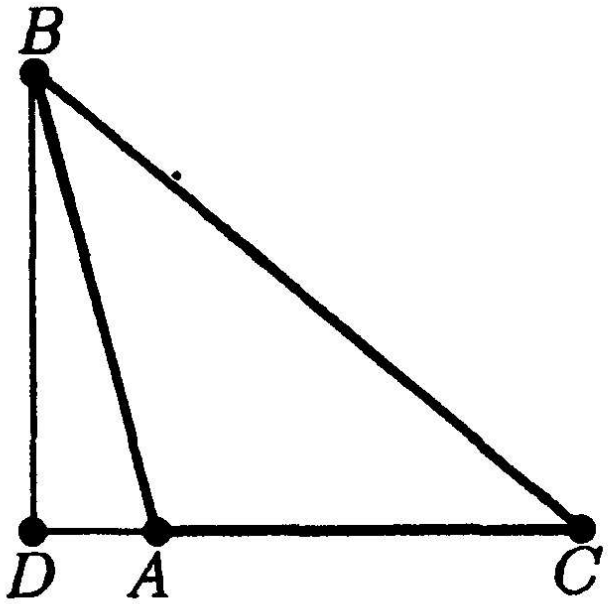

Рис. 2.40.

Из теоремы Пифагора Евклид выводит утверждение, очень близкое к теореме косинусов. Он отдельно рассматривает случаи тупого и острого угла треугольника (предложения II, 12 и II, 13). Например, для тупого угла рассуждения Евклида следующие. Опустим перпендикуляр BD на продолжение стороны AC (рис. 2.40). Из тождества $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ следует, что $DC^2 = DA^2+AC^2+2DA\cdot AC$. Добавим к обеим частям полученного равенства DB^2 и воспользуемся тем, что по теореме Пифагора $DC^2 + DB^2 = BC^2$ и $DA^2 + DB^2 = AB^2$. В результате получим

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC.$$

От теоремы косинусов это отличается лишь тем, что DA нужно заменить на $-AB\cos A$. Но во времена Евклида синусов и косинусов ещё не было.

В предложении II, 14 Евклид завершает решение задачи о приложении площадей, начатое в книге I. Для данного многоугольника он строит равновеликий ему квадрат. В книге I уже был построен прямоугольник, равновеликий данному многоугольнику, поэтому остаётся построить квадрат, равновеликий данному прямоугольнику. По-

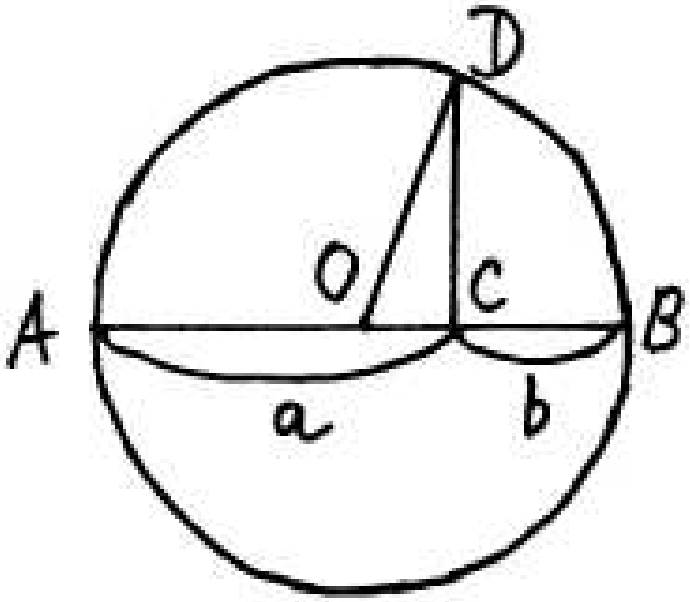

Рис. 2.41.

строение стороны квадрата, равновеликого прямоугольнику со сторонами a и b, представлено на рис. 2.41: сторона искомого квадрата — это отрезок CD. Доказательство основано на теореме Пифагора: $CD^2 = OD^2 - OC^2 = (OD + OC)(OD - OC) = ab$.

2.14.3. Книга III

Книга III посвящена кругам, в ней обсуждаются свойства вписанных углов и касательных. Вот как, например, Евклид строит касательную из данной точки A к данной окружности. Пусть E — центр данной окружности, D — точка пересечения данной окружности и отрезка EA. Построим окружность радиуса EA с центром E и найдём точку I, в которой эту окружность пересекает перпендикуляр к прямой AE, восставленный из точки D (рис. 2.42). Пусть B — точка пересечения отрезка IE с исходной окружностью. Тогда AB — искомая касательная. Это следует из того, что треугольники ABE и IDE равны.

В книге III доказываются многие теоремы о свойствах окружностей, входящие ныне в школьную программу. Например, теорема о вписанном угле (предложение III, 20), теорема о двух пересекающихся хордах (предложение III, 35: «Если в круге две прямые пересекают

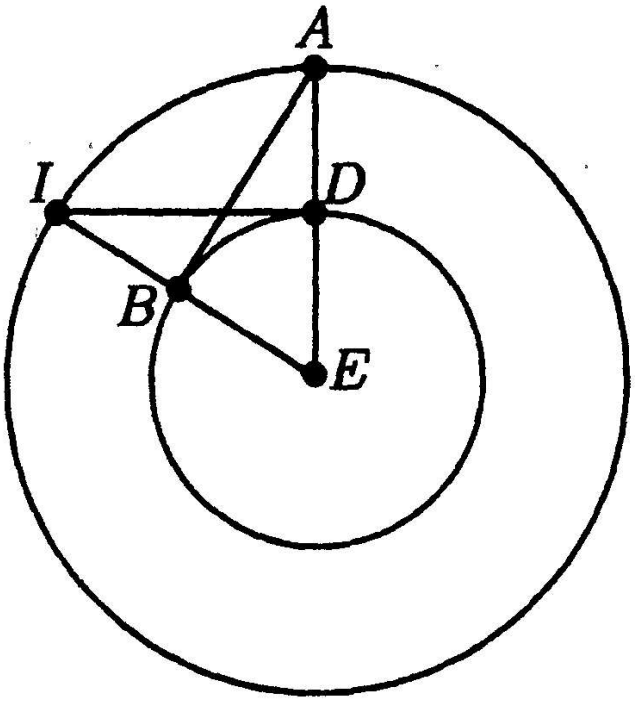

Рис. 2.42.

друг друга, то прямоугольник, заключенный между отрезками одной, равен прямоугольнику, заключенному между отрезками другой»), теорема о квадрате касательной (предложение III, 36).

2.14.4. Книга IV

В книге IV снова рассматриваются круги, но уже вместе с многоугольниками, вписанными или описанными.

В книге IV Евклид описывает построение правильного пятиугольника. Это построение довольно сложное. Оно выглядит как перевод на геометрический язык некоторой алгебраической формулы с квадратными корнями. Завершается книга IV построением правильного 15-угольника (на основе построения правильных пятиугольника и треугольника).

Древнегреческий комментатор утверждает, что всё в этой книге принадлежит пифагорейцам.

2.14.5. Книга V

Теория пропорциональности отрезков была разработана Евдоксом Книдским. Она подробно изложена в V книге «Начал» Евклида. Эта теория довольно сложная. Дело в том, что у древнегреческих математиков не было понятия действительного числа; они рассматривали только натуральные числа и уже в более позднее время изредка использовали положительные рациональные числа. Поэтому они не могли отождествить длину отрезка с числом. В теории пропорциональности Евдокса фактически доказываются свойства действительных чисел, и именно поэтому она такая сложная.

Древнегреческий комментатор пишет, что все согласны с тем, что последовательность изложения в книге V целиком принадлежит Евклиду.

Во времена Евклида теория пропорций Евдокса была ещё новинкой, и она не могла найти себе место в начале сочинения Евклида. До V книги Евклиду приходилось избегать теории пропорций. По-видимому, именно по этой причине Евклид придумал то доказательство теоремы Пифагора, которое помещено в книге I. Без пропорций доказываются теоремы о степени точки по отношению к окружности в книге III и с их помощью строится правильный пятиугольник.

Определение 4 характеризует величины, к которым может применяться теория пропорций: «Говорят, что величины *имеют отношение* между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга.» Это определение фактически эквивалентно аксиоме Архимеда, на которой основан метод исчерпывания.

Важнейшую роль играет определение равенства отношений (определение 5): «Говорят, что *величины находятся в том же отношении*: первая ко второй и третья к четвёртой, если равнократные первой и третьей одновременно больше, или одновременно равны, или одновременно меньше равнократных второй и четвёртой каждая каждой при какой бы то ни было кратности, если взять их в соответственном порядке.»

2.14.6. Книга VI

В книге VI общая теория пропорций, изложенная в книге V, применяется к планиметрии. Книга начинается с определений; в частности, даются определения подобных фигур и *деления отрезка в крайнем и среднем отношении* (так называлось во времена Евклида золотое сечение).

Евклид не определяет произведение двух отношений. Но в предложении VI, 23 фактически содержится практическое определение этого важного понятия. Это предложение таково: «Равноугольные параллелограммы имеют друг к другу составное отношение их сторон.» Другими словами, отношение площадей двух параллелограммов с общим углом равно произведению отношений их сторон.

Предложение VI, 25 заключается в том, чтобы построить многоугольник, подобный данному и равновеликий данному. Эта задача восходит к пифагорейцам.

В предложении VI, 27 на языке площадей параллелограммов формулируется и решается задача о нахождении максимума функции $x(a - x)$.

Предложения VI, 28 и VI, 29, относяшиеся к приложению площадей, мы уже обсудили на с. 73. Это — геометрический эквивалент решения квадратного уравнения, когда это уравнение имеет вещественный положительный корень.

Странно выглядит предложение VI, 33 о том, что углы пропорциональны дугам, которые они вырезают на окружности. Углы не удовлетворяют характеристическому свойству величин, к которым может применяться теория пропорций (см. с. 79). Поэтому к углам не могла применяться терия пропорций. По-видимому, это предложение — позднейшая неумелая вставка, что подтверждается и весьма неуклюжим доказательством.

2.14.7. Книги VII-IX

Эти книги посвящены арифметике. Теория рациональных и целых чисел излагается в них уже после общей теории пропорций, но не основываясь на ней. Доказательства здесь, по-видимому, те же самые, которыми пользовались до Евдокса. Интересно, что транзитивность пропорциональности пар натуральных чисел Евклид не доказывает, хотя транзитивность пропорциональности пар величин он строго доказывает (предложение V, 11). Коммутативность умножения целых чисел доказывается в предложении VII, 16, а коммутативность произведения отношений доказывается в предложениях V, 22-23.

В предложениях VII, 1-3 находится общая мера двух или трёх неравных чисел. Предложение 1 — это тест для проверки взаимной простоты двух чисел. В предложениях VII, 4-19 повторяется теория пропорций, но теперь уже не в общем, а в частном случае. Предложение VII, 34 — это *алгоритм Евклида* для двух чисел, а предложение VII, 39 — для любого набора чисел.

Книга VIII посвящена геометрическим прогрессиям.

Предложение IX, 14 эквивалентно теореме о единственности разложения числа на простые множители. Предложение IX, 20 — доказательство бесконечности множества простых чисел; это доказательство то же самое, что и сейчас обычно даётся (предполагается, что a, b, c, ...— это все простые числа и их конечное число, рассматривается наименьшее число, которое на них делится, и к нему прибавляется 1; полученное число не делится ни на одно из простых чисел). Предложения IX, 21-34 трактуют о наиболее простых свойствах делимости на 2. Они восходят, по-видимому, к тому времени, когда ещё не была развита общая теория простых чисел. Предложение IX, 35 — сумма геометрической прогрессии (конечной). Завершает книгу IX предложение 36 о совершенных числах: если сумма $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$ — простое число, то оно, умноженное на 2^n даёт *совершенное число*, сумма делителей которого равна самому числу. Совершенные числа впервые встречаются у Евклида.

На какое-то время греков завело в тупик то, что произведение двух длин они считали площадью, т.е. произведение двух объектов одного рода было объектом совсем другого рода. В частности, величины и произведения величин нельзя было складывать. Из этого тупика разными путями вышли Герон и Диофант. И Архимед, по-видимому, тоже.

2.14.8. Книга X

Книга X посвящена соизмеримым и несоизмеримым величинам. В ней приводится классификация квадратичных иррациональностей определённого вида. Эта классификация очень глубокая, но в дальнейшем она не развивалась и не использовалась, поэтому на ней мы не будем останавливаться. Отметим только, что во многих отношениях это самая совершенная и продвинутая книга «Начал». Значительная часть результатов книги X, в том числе квадратичных иррациональностей, принадлежит Теэтету.

На предложении X, 1 основано применение метода исчерпывания: для двух заданных величин, если от большей отнимается больше половины и от остатка больше половины, и это делается постоянно, то остаётся некоторая величина, которая будет меньше заданной величины.

2.14.9. Книга XI

Стереометрия начинается у Евклида с книги XI. В этой книге он доказывает разные теоремы о плоскостях, параллелепипедах, трёхгранных углах. Например, он доказывает, что в трёхгранном угле любой плоский угол меньше суммы двух других плоских углов (предложение XI, 20), а сумма всех плоских углов меньше четырёх прямых углов (предложение XI, 21).

Предложение XI, 20 Евклид доказывает следующим образом. Достаточно доказать, что наибольший плоский угол меньше суммы двух других плоских углов. Поэтому будем считать, что в трёхгранном угле

$ABCD$ с вершиной A угол BAC наибольший. Тогда внутри угла BAC можно выбрать точку E так, что $\angle BAE = \angle BAD$ и $AE = AD$. В таком случае треугольники BAE и BAD равны, а значит, $BE = BD$. Поэтому из неравенства $BD + DC > BC$ и равенства $BC = BE + EC$ следует, что $DC > EC$. В треугольниках DAC и EAC стороны DA и EA равны, а сторона AC у них общая. Поэтому из неравенства $DC > EC$ следует, что $\angle DAC > \angle EAC$. Это означает, что

$$\angle BAD + \angle DAC > \angle BAE + \angle EAC = \angle BAC.$$

Предложение XI, 21 Евклид выводит из предложения XI, 20. Вместо трёхгранного угла $ABCD$ с вершиной A он рассматривает тетраэдр $ABCD$ и применяет неравенство, доказанное в предложении XI, 20, к трёхгранным углам с вершинами B, C и D. В результате он получает, что сумма углов треугольника BCD меньше суммы тех углов треугольников BAC, CAD и DAB, которые прилегают к его сторонам. Последняя сумма равна $3\pi - \Sigma$, где Σ — сумма углов треугольников BAC, CAD, DAB при вершине A. Таким образом, $\pi < 3\pi - \Sigma$, т. е. $\Sigma < 2\pi$.

2.14.10. Книга XII

Книга XII посвящена методу исчерпывания: последовательно доказывается, что площади кругов относятся как квадраты их диаметров; объёмы пирамид с равными высотами относятся как площади оснований; объём конуса равен трети объёма конуса с тем же основанием и той же высотой; объёмы конусов (цилиндров) с равными высотами относятся как площади оснований; объёмы подобных конусов (цилиндров) относятся как кубы диаметров их оснований; объёмы сфер относятся как кубы их диаметров.

2.14.11. Книга XIII

«Начала» Евклида увенчиваются книгой XIII, посвящённой теории правильных многогранников. Многие исследователи «Начал» высказывали мнение, что Евклид весь свой трактат написал лишь для того,

чтобы систематически изложить теорию правильных многогранников. Это мнение основано на том, что Евклид был последователем Платона, а Платон уделял правильным многогранникам большое внимание. Основная цель Евклида в этой книге — построение правильных многогранников, вписанных в данную сферу.

При построении икосаэдра Евклид использует следующие два вспомогательных утверждения.

1. *Если отрезок AB составлен из стороны AC правильного 10-угольника и стороны BC правильного 6-угольника, вписанных в окружность одного радиуса, то*

$$AB : BC = BC : AC.$$

2. *Если правильные 5-угольник, 6-угольник и 10-угольник вписаны в одну и ту же окружность, то квадрат стороны 5-угольника равен сумме квадратов сторон 6-угольника и 10-угольника.*

Для доказательства первого утверждения Евклид рассматривает правильный 10-угольник со стороной AC и на продолжении стороны AC откладывает отрезок CB, равный стороне правильного 6-угольника, вписанного в ту же самую окружность (рис. 2.43). После этого он показывает, что треугольники ABO и AOC подобны. Следовательно, $AB : AO = AO : AC$. Учитывая, что $AO = CO = CB$, получаем требуемое.

Второе утверждение Евклид доказывает следующим образом. Сравнивая углы, он показывает, что треугольники IBN и ABI подобны (рис. 2.44) и треугольники BAK и KAN тоже подобны. Поэтому $IB : AB = BN : BI$ и $BA : KA = AK : AN$, т. е. $IB^2 = AB \cdot BN$ и $AK^2 = AB \cdot AN$. Учитывая, что $AN + BN = AB$, получаем требуемое равенство

$$IB^2 + AK^2 = AB^2.$$

Икосаэдр (правильный многогранник с 12 вершинами, гранями которого служат 20 правильных треугольников) Евклид получает по следующей схеме. Возьмём отрезок $O_1O_2 = R$ и построим в пространстве

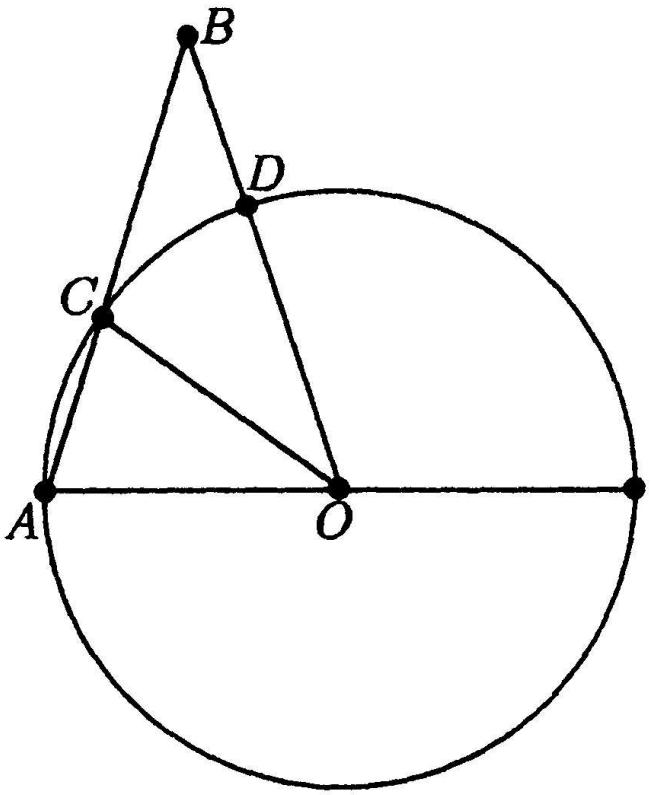

Рис. 2.43.

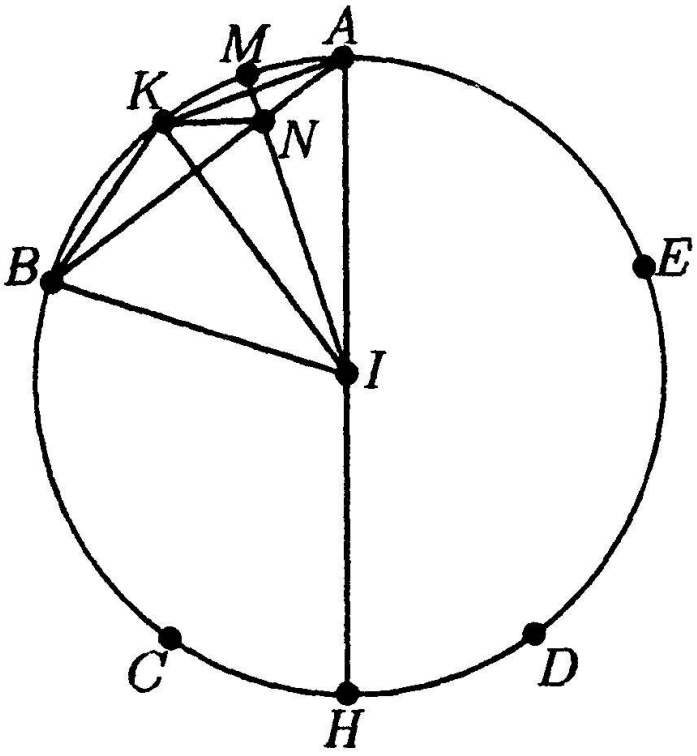

Рис. 2.44.

круги радиуса R с центрами O_1 и O_2, лежащие в плоскостях, ортогональных прямой O_1O_2. Впишем в эти круги правильные 5-угольники так, чтобы проекции вершин каждого 5-угольника на плоскость другого 5-угольника попадали в середины дуг, стягиваемых сторонами 5-угольника. Отложим на продолжениях отрезка O_1O_2 за его концы отрезки O_1A_1 и O_2A_2, равные стороне правильного 10-угольника, вписанного в окружность радиуса R. Точки A_1 и A_2 вместе с вершинами двух рассматриваемых 5-угольников служат вершинами искомого икосаэдра. В самом деле, из утверждения 1 следует, что вершины рассматриваемых 5-угольников лежат на сфере с диаметром A_1A_2, а из утверждения 2 следует, что длины всех ребер полученного многогранника равны стороне правильного 5-угольника, вписанного в окружность радиуса R (нужно отдельно рассмотреть расстояние между точкой A_i и вершиной 5-угольника и расстояние между двумя вершинами разных 5-угольников).

Додекаэдр (правильный многогранник с 20 вершинами, гранями которого служат 12 правильных пятиугольников) Евклид строит с помощью куба. Мы изложим его конструкцию на более современном языке, используя не только геометрию, но и алгебру. Пусть x — такой отрезок, что $x : 1 = 1 : (x + 1)$, т. е. $x^2 + x = 1$. Рассмотрим куб с ребром $2(x + 1)$ и разделим средние линии его граней на отрезки длиной $x, 2, x$. Затем из точек деления проведём внешние нормали к граням куба и отложим на них отрезки длиной 1. Покажем, что пятиугольник $ABCDE$ (рис. 2.45) правильный. Прежде всего нужно убедиться, что вершины этого пятиугольника лежат в одной плоскости. Для этого можно рассмотреть проекцию на плоскость, перпендикулярную ребру CE, и воспользоваться тем, что полученные при такой проекции прямоугольные треугольники с катетами $(1, x)$ и $(1 + x, 1)$ подобны. Равенство сторон рассматриваемого пятиугольника следует из того, что

$$BC^2 = CD^2 = (1 + x)^2 + x^2 + 1 = 4 = AB^2.$$

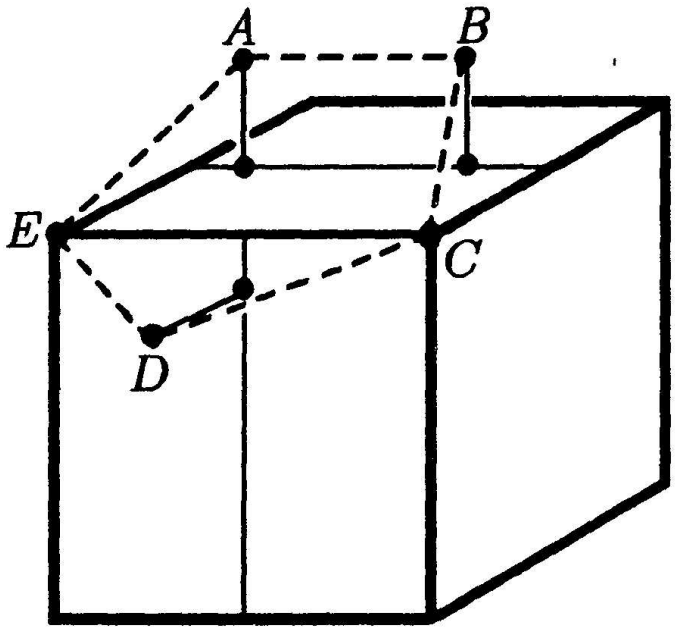

Рис. 2.45.

Для доказательства равенства углов воспользуемся тем, что

$$AC^2 = BE^2 = (1+x)^2 + (2+x)^2 + 1 = 4(1+x)^2 = EC^2.$$

Таким образом, треугольники EAB, ABC и CDE являются равными равнобедренными треугольниками, а треугольники ACE и BEC равнобедренные. Поэтому в рассматриваемом пятиугольнике углы при вершинах A, B и D равны. Кроме того, равны углы при вершинах B и C, так как $\angle ABC = \angle DCE$ и $\angle EBC = \angle ECB$. Аналогично доказывается равенство углов при вершинах A и E.

Точки A, B и D лежат на описанной сфере куба, поскольку они удалены от центра куба на расстояние, квадрат которого равен

$$(2+x)^2 + 1 = 3(1+x)^2.$$

Теперь нужно выбрать в каждой грани куба среднюю линию так, чтобы выбранные средние линии не имели общих точек (после того как в одной из граней куба выбрана одна из двух средних линий, это делается ровно одним способом). Проделав для каждой из этих средних линий описанную выше конструкцию, получим додекаэдр.

2.14.12. Другие сочинения Евклида

Из других сочинений Евклида наибольшее значение имеет книга «Data» («О заданных величинах»), уже упоминавшаяся на с. 73. Она состоит из предложений такого типа: если даны или определены некоторые величины, то какие-то другие величины тоже будут определены.

В арабском переводе сохранилось небольшое сочинение «О делении фигур». В нём обсуждается вопрос о делении многоугольников на две равновеликие части (или на две части с заданным отношением площадей) прямой данного направления или проходящей через данную точку. В частности, решается вавилонская задача о делении трапеции прямой, параллелоной основаниям, на две равновеликие части.

2.15. Аристарх Самосский (310-230 до н.э)

Аристарха Самосского, первым высказавшего гипотезу о том, что Земля вращается вокруг Солнца, историк математики сэр Томас Хиз назвал Коперником античности. Гипотеза Аристарха, как и гипотеза Коперника, не была поддержана их современниками, нашедшими много доводов против этой гипотезы. Один из доводов был такой: если бы Земля не была неподвижной, то должны были бы меняться видимые расстояния между звёздами. На это Аристарх справедливо возразил, что орбита Земли чрезвычайно мала по сравнению с расстоянием от Земли до звёзд.

Аристарх вычислил расстояния от Земли до Солнца и Луны и отношение диаметра Солнца к диаметру Земли. При этом ему пришлось разработать основы тригонометрии. В частности, Аристарх первым получил оценки сверху и снизу для, говоря современным языком, синусов углов 3° и 1°. Аристарх использовал неравенства для острых углов α и β, которые в современных обозначениях можно записать так:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta},$$

если $\alpha > \beta$.

2.16. Архимед (287-212 до н.э.)

2.16.1. Биография

Архимед был не только учёным-теоретиком. Он сыграл выдающуюся роль в организации обороны от римлян своего родного города, Сиракуз. Поэтому сведений о его жизни сохранилось несравненно больше, чем о жизни Евклида или Паппа.

Архимед родился в 287 г. до н. э. в семье астронома Фидия. Первые произведения, посвященные механике и математике, он написал в возрасте 40 лет. Толчком к развитию гениальных математических способностей Архимеда в столь позднем возрасте послужила поездка Архимеда в Александрию, где он познакомился с Кононом и Эратосфеном. После смерти Конона Архимед поддерживал связь с его учеником Досифеем. Многие дошедшие до нас трактаты Архимеда начинаются словами: «Архимед приветствует Досифея».

Основные сведения об Архимеде, которые приводят историки, относятся к последнему этапу его жизни — обороне Сиракуз. Из остальных историй наиболее известен следующий рассказ римского архитектора Витрувия.

«Что же до Архимеда, то из всех его многочисленных и замечательных открытий приводимое мною является, несомненно, доказательством прямо-таки безграничной изобретательности. А именно, когда Гиерон, достигший царской власти в Сиракузах, после удачного завершения своих предприятий, решил по обету бессмертным богам поместить в одном из храмов золотой венец, он заказал его за определённую плату и отвесил нужное количество золота подрядчику. В назначенный по договору срок тот доставил царю тонко исполненную работу, в точности, видимо, соответствующую весу отпущенного на неё золота.

После же того как сделан был донос, что часть золота была утаена и при изготовлении венца в него было примешано такое же количество серебра, Гиерон, негодуя на нанесённое ему оскорбление и не находя способа доказать эту покражу, обратился к Архимеду с просьбой взять на себя разрешение этого вопроса. Случилось так, что в то время как

Архимед над этим думал, он пошёл в баню и, садясь в ванну, заметил, что чем глубже он погружается в неё своим телом, тем больше через край вытекает воды. И как только это указало ему способ разрешения его вопроса, он, не медля, вне себя от радости, выскочил из ванны и голый бросился к себе домой, громко крича, что нашёл то, что искал; ибо на бегу он то и дело восклицал по-гречески: $\varepsilon\upsilon\rho\eta\kappa\alpha$, $\varepsilon\upsilon\rho\eta\kappa\alpha$.

Тогда, исходя из этого открытия, он, говорят, сделал два слитка одинакового веса с венцом — один из золота, другой из серебра. Сделав это, он взял объёмистый сосуд, наполнил его до самых краев водой и опустил в него серебряный слиток, при погружении которого вода вытекла в количестве, равном величине слитка. Вынув затем слиток, он долил воды, отмерив её секстарием, так, чтобы она опять сравнялась с краями, как и раньше. Так он определил, что серебро по весу соответствует известному количеству воды.

Проделав этот опыт, он подобным же образом опустил в наполненный водой сосуд золотой слиток и, вынув его, нашёл посредством прежнего измерения, что воды убавилось не столько же, а меньше, насколько меньше был объём золотого слитка сравнительно с равным ему по весу серебряным. После же этого, вновь наполнив сосуд и опустив в то же количество воды самый венец, он нашел, что воды вытекло больше, чем при погружении золотого слитка такого же веса; и таким образом, исходя из того, что венец вытеснил больше воды, чем слиток, он показал примесь в золоте серебра и обнаружил покражу подрядчика.»

Наиболее раннее описание обороны Сиракуз содержится в «Истории» Полибия, написанной всего через полвека после разрушения Сиракуз. Вот что он писал.

«Приготовивши шалаши, метательные орудия и все прочее, нужное для осады, римляне надеялись при многочисленности рабочих рук покончить с приготовлениями в течение пяти дней и не дать неприятелю подготовиться. Но при этом они не приняли в расчёт искусства Архимеда, не догадались, что иногда дарование одного человека способно сделать больше, чем огромное множество рук...

...Архимед соорудил машины, приспособив их к метанию снарядов на любое расстояние. Так, если неприятель подплывал издали, то Архимед поражал его из дальнобойных камнеметальниц тяжелыми снарядами или стрелами и повергал в трудное и беспомощное положение. Когда же снаряды начинали летать поверх неприятеля, то Архимед употреблял в дело меньшие машины, каждый раз сообразуясь с расстоянием, и наводил на римлян такой ужас, что они никак не решались идти на приступ или приблизиться к городу на судах...

Некоторые машины отражали нападение неприятеля, защищенного и прикрытого плетнём от стрел, выпускаемых через отверстие в стене; в таком случае бросаемые камни соответствующей тяжести прогоняли нападающих римлян с передних частей корабля. Кроме того, с машины спускалась прикреплённая к цепи железная лапа; управлявший жерлом машины захватывал в каком-нибудь месте этой лапой нос корабля и потом опускал вниз находящийся внутри города конец машины. Когда нос судна был таким образом поднят и судно поставлено отвесно на корму, то плечо рычага закреплялось неподвижно, а лапа вместе с цепью отделялись от машины освобождающего приспособления. Вследствие этого некоторые суда ложились на бок, другие совсем опрокидывались, большинство же от падения носом с значительной высоты в море погружались и наполнялись водой, внося большой беспорядок и ужас среди экипажа...

...Римляне оставались под стенами города в течение восьми месяцев, и не было такой уловки или отважного дела, перед которым они остановились бы, но на приступ идти они уже ни разу не осмеливались.

Такова чудесная сила одного человека, одного дарования, умело направленного на какое-либо дело. Вот и теперь: располагая столь значительными силами сухопутными и морскими, римляне могли бы быстро овладеть городом, если бы кто-либо изъял из среды сиракузян одного старца. Но так как этот один был среди сиракузян, то римляне не дерзали нападать на город или по крайней мере употреблять те способы нападение, отразить которые Архимед был в силах.»

После длительной осады римляне всё же взяли Сиракузы. Во время

грабежа города Архимед погиб. Наиболее подробно обстоятельства его смерти описал Плутарх в жизнеописании Марцелла, римского полководца, осаждавшего Сиракузы.

«Всего более жалел Марцелл о смерти Архимеда. Последний находился дома, рассматривая какую-то геометрическую фигуру; так как он погрузился в это исследование всем своим умом и всеми чувствами, то не заметил шума, производимого бегавшими туда и сюда римлянами, и не знал, что город уже был в их власти. Вдруг перед ним явился солдат с приказом следовать за ним к Марцеллу. Архимед отказался идти, пока не найдёт доказательства своей задачи. Раздраженный римлянин вытаскивает меч и убивает его. Другие говорят, что какой-то солдат пошел на него с мечом чтобы убить, а Архимед настоятельно стал просить его подождать немного, пока он закончит задачу, но солдат, которому было мало дела до его доказательства, пронзил его мечом. Третьи говорят, что Архимед сам пошёл к Марцеллу, неся в ящике математические инструменты — солнечные квадранты, небесные глобусы и угломеры для измерения видимой величины Солнца, но попавшиеся ему по дороге солдаты подумали, что он несёт в ящике золото, и убили его, чтобы овладеть этим золотом. Во всяком случае, все историки признают, что Марцелл был очень опечален смертью Архимеда, сторонился убийцы, как святотатца, и, приказавши отыскать родственников Архимеда, милостиво с ними обошёлся.»

Как пишет Цицерон, Марцелл взял себе после взятия Сиракуз единственную добычу — сферу, изготовленную Архимедом. Эта сфера представляла движения Солнца, Луны и пяти планет. Сфера Архимеда изумляла всех, кто её видел. В эпоху Диоклетиана её даже использовали как аргумент в теологических спорах:

«Я вас спрашиваю, ведь мог же сицилиец Архимед воспроизвести образ и подобие мира в выпуклой округлости меди, где он так разместил и поставил Солнце и Луну, что они как-будто совершали каждодневно неравные движения и воспроизводили небесные вращения; он мог не только показать восход и заход Солнца, рост и убывание Луны, но сделать так, чтобы при вращении этой сферической поверхности

можно было видеть различные течения планет; так неужели же Бог не мог воспроизвести и сотворить натуральные вещи, подобие которых мог сделать человек своим искусством и хитростью.»

Изумительную характеристику Архимеда оставил нам Плутарх. Но при её чтении следует иметь в виду, что Плутарх жил спустя несколько столетий после Архимеда и он описывает не столько реального Архимеда, сколько свой собственный идеал учёного и человека.

«Архимед имел возвышенную душу и глубокий ум, и, обладая громадными богатствами геометрических теорий, он не хотел оставить ни одного сочинения относительно построения тех машин, которые доставили ему славу знания, не только доступного человеку, но почти божественного... Во всей геометрии нельзя найти более трудных и глубокомысленных задач, которые были бы решены так просто и ясно, как те, которыми занимался Архимед. Одни приписывают эту ясность его высоким дарованиям, другие же — тому напряжённому труду, при помощи которого ему удавалось дать своим открытиям такое выражение, что они становятся доступными без труда. Если читатель сам не находит доказательства, то при изучении архимедовых сочинений у него создаётся впечатление, что он и сам смог бы без труда найти решение — таким лёгким и быстрым путем Архимед приводит к тому, что он хотел доказать. Поэтому не кажется невероятным, что он, как рассказывают, будучи околдован геометрией, забывал о пище и пренебрегал заботами о своём теле. Часто его насильно заставляли принимать ванну и натираться мазями, а он чертил на золе геометрические фигуры и на своём намазанном маслом теле проводил пальцем линии, — настолько он был охвачен этим занятием и действительно одухотворён музами. И хотя у него было много прекрасных открытий, он, говорят, просил своих родственников и друзей начертить на его могиле только цилиндр и содержащийся в нём шар и указать соотношение между объёмами этих тел. Таков был Архимед, который благодаря своим глубоким познаниям в механике смог, насколько это от него зависело, сохранить от поражения и себя самого и свой город.»

Архимед очень гордился тем, что вычислил площадь поверхности шара, и даже завещал поставить на своём надгробном памятнике шар и цилиндр. Цицерон по этому признаку нашёл в Сиракузах всеми забытую могилу Архимеда, со всех сторон заросшую терновником.

Самое раннее сочинение Архимеда — «Квадратура параболы» послано Досифею. В нём Архимед пишет, что узнал о смерти математика и астронома Конона. Известен рассказ, что когда египетский царь Птолемей III Эвергет уходил в поход на Антиохию, его жена Береника принесла в дар богам свои волосы, чтобы помочь благополучному возвращению мужа. Эти волосы из храма пропали. Конон объявил, что обнаружил на небе новую группу звёзд, которые и есть вознесённые на небеса волосы. Так появилось название созвездия «Волосы Берени-ки». Дата похода Птолемея III известна — это 246 г. до н.э. Таким образом, первое сочинение Архимеда написано позже 246 г. до н.э., а родился он в 287 г., т.е. ко времени написания этой работы ему было больше 40 лет.

Лейбниц писал: «Внимательно читая сочинения Архимеда, перестаёшь удивляться всем новейшим открытиям геометров.»

Теперь мы обсудим математические сочинения Архимеда, оставляя в стороне очень важные для истории физики сочинения по механике и гидростатике.

2.16.2. «Метод»

Сочинение Архимеда «О механических теоремах. Метод, сообщённый Эратосфену» долгое время считалось утерянным. Лишь в 1906 году его обнаружил в Константинополе датский филолог Гейберг, подготовивший много изданий текстов древнегреческих математиков. Хронологически это не первое сочинение Архимеда, но именно в нём он рассказывает, как получил несколько своих важных результатов, которые затем строго доказал уже другими методами. Архимед не считал, что этот метод даёт строгое доказательство: «Рассмотрение при помощи этого метода ещё не является доказательством; однако получить при помощи этого метода некоторое предварительное предста-

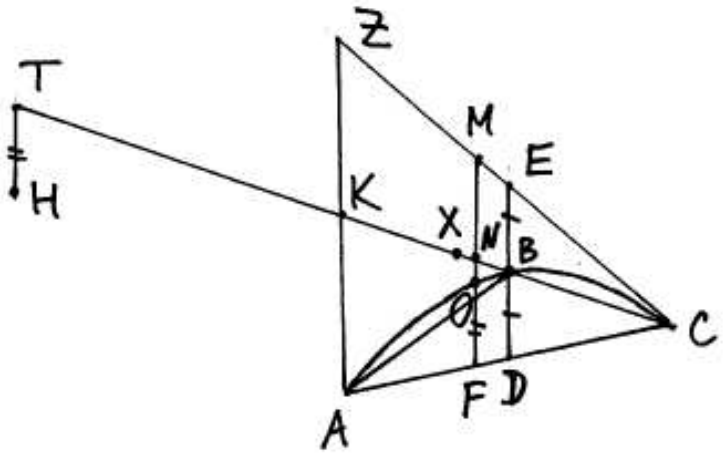

Рис. 2.46.

вление об исследуемом, а затем найти и само доказательство, гораздо удобнее, чем производит изыскания, ничего не зная. Поэтому и относительно теорем о конусе и пирамиде, для которых Евдокс первый нашёл доказательство, а именно, что всякий конус составляет третью часть цилиндра, а пирамида — третью часть призмы с тем же самым основанием и равной высотой, немалую долю заслуги я уделяю и Демокриту, который первый высказал это положение относительно упомянутых фигур, хотя и без доказательства.»

Архимед рассказывает о нескольких теоремах, которые он открыл с помощью механического метода. Начинает он с той теоремы, которую открыл первой. В этой теореме вычисляется площадь сегмента параболы. Мы разберём эту теорему и ещё теоремы об объёме шара и о центре тяжести параболического сегмента.

Площадь параболического сегмента

Рассмотрим сегмент параболы, ограниченный прямой AC и параболой ABC (рис. 2.46). Через точку C проведём касательную к параболе, а через середину D отрезка AC проведём прямую, параллельную оси параболы. Эта прямая пересекает касательную в точке E, а параболу — в точке B. Архимед утверждает, что площадь сегмента параболы равна $\frac{4}{3}$ площади треугольника ABC.

Проведём через точку A прямую, параллельную оси параболы. Она

пересекает прямые BC и EC в точках K и Z. На продолжении отрезка CK за точку K отложим отрезок KT, равный отрезку CK.

Представим, что отрезок CT — рычаг, который может вращаться вокруг точки K. Проведём через произвольную точку O параболы прямую, параллельную оси параболы. Эта прямая пересекает отрезки AC и ZC в точках F и M. Архимед доказывает, что отрезок TH, равный отрезку OF, уравновешивает отрезок FM. Для этого он замечает, что

$$FM : FO = AC : AF = KC : KN = KT : KN.$$

Равенство $FM : FO = AC : AF$ — это свойство параболы, известное во времена Архимеда. Его несложно проверить в координатах, а чтобы понять, как свойства такого рода доказывали древнегреческие математики, следует обратиться к параграфу об Аполлонии.

До этого места рассуждения были строгими. Затем Архимед говорит, что сегмент параболы составлен из отрезков, подобных OF, а треугольник AZC составлен из отрезков, подобных FM, поэтому сегмент параболы, подвешенный в точке T, уравновесит треугольник AZC. Это — ключевой момент во всех рассуждениях. И любой математик 17 или 18 века счёл бы такое доказательство вполне строгими. Но для Архимеда это лишь убедительный способ найти правильный ответ, который затем нужно строго обосновать.

Дальше уже всё просто. Частным случаем равенства $FM : FO = AC : AF$ является равенство $ED = 2BD$, т.е. $BD = BE$. Поэтому отрезок CK — медиана треугольника AZC, а значит, центр масс X треугольника AZC лежит на отрезке KC и делит его в отношении 1:2. Плечо KT рычага втрое больше плеча KX, поэтому вес треугольника AZC втрое больше веса сегмента параболы. А площадь треугольника ABC в 4 раза меньше площади треугольника AZC.

Объём шара

Архимед доказывает, что объём цилиндра, описанного вокруг шара, в $1\frac{1}{2}$ раза больше объёма шара. Для этого он рассматривает цилиндр,

радиус основания которого вдвое больше радиуса шара, и конус, основанием которого служит основание нового цилиндра (на рис. 2.47 изображено осевое сечение этого конуса). Легко проверить, что

$$CD^2 + CE^2 = CA^2 + CE^2 = AE^2 = AC \cdot AB,$$

поэтому

$$(CD^2 + CE^2) : CF^2 = (AC \cdot AB) : AB^2 = AC : AB.$$

Это означает, что сумма площадей кругов с радиусами CD и CE относится к площади круга с радиусом CF как AC относится к AB. Поэтому если мы рассмотрим равноплечный рычаг TB с точкой опоры A, то круги с радиусами CD и CE, перемещённые в точку T, уравновесят круг с радиусом CF. Большой цилиндр состоит из таких кругов. Из этого можно сделать вывод, что шар и конус, подвешенные в точке T, уравновесят большой цилиндр (расположенный в исходном положении). Центр тяжести большого цилиндра находится в точке O — середине отрезка AB. Поэтому объём большого цилиндра в два раза больше суммы объёмов шара и конуса. Учитывая, что объём конуса равен $\frac{1}{3}$ объёма большого цилиндра, получаем требуемое.

Центр тяжести сегмента параболоида вращения

Архимед показывает, что центр тяжести K сегмента параболоида вращения, отсечённого плоскостью, перпендикулярной оси вращения, лежит на оси вращения и делит отрезок OB в отношении 2:1 (рис. 2.48). Для этого он вписывает в сегмент конус и пользуется тем, что $AC^2 : AD^2 = OB : OA$ (это свойство параболы было известно Архимеду). Рассмотрим равноплечный рычаг TB с точкой опоры O и подвесим круг радиуса AD в точке T. Этот круг уравновесит круг радиуса AC, находящийся на своём месте. Таким образом, конус, подвешенный в точке T, уравновесит параболический сегмент. Этот параболический сегмент весит в $\frac{3}{2}$ раза больше, чем конус, поэтому плечи OT и OK относятся как 3:2.

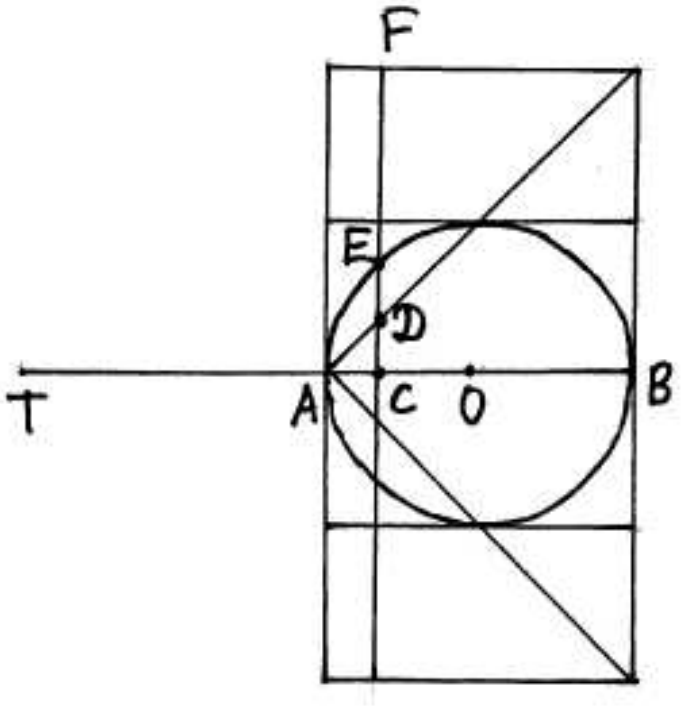

Рис. 2.47.

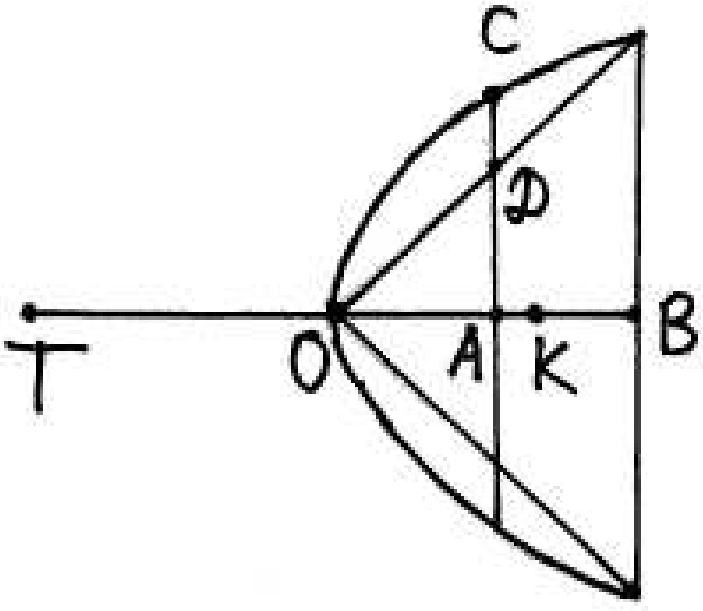

Рис. 2.48.

2.16.3. О шаре и цилиндре

Сочинение Архимеда «О шаре и цилиндре», состоящее из двух больших писем Досифею, занимает в математическом наследии Архимеда центральное место как по своему объёму, так и по разработанным там методам.

На своем надгробии Архимед завещал изобразить цилиндр и шар, вписанный в этот цилиндр. (По этому надгробию Цицерон впоследствии смог отыскать могилу Архимеда.) То, что Архимед высоко ценил теоремы, доказанные им в сочинении «О шаре и цилиндре», видно и из самого его письма Досифею:

«Конечно, эти свойства были и раньше по самой природе присущи упомянутым фигурам, но всё же они оставались неизвестными тем, кто до нас занимался геометрией, и никому из них не пришло на ум, что все эти фигуры являются соизмеримыми друг с другом; поэтому я не поколебался бы сравнить эти теоремы с теми, которые были открыты другими геометрами, и в частности с наиболее выдающимися теоремами, которые были установлены для тел Евдоксом, а именно, что всякая пирамида составляет третью часть призмы, имеющей с пирамидой одно и то же основание и одинаковую высоту, и что всякий конус составляет третью часть цилиндра, имеющего с конусом одно и то же основание и одинаковую высоту; действительно, хотя эти свойства по самой природе всегда были присущи указанным телам, но всё же оказалось, что они остались неизвестными многим жившим до Евдокса знаменитым геометрам и ни одному из них не пришли на ум. Теперь же их могут усмотреть все, имеющие к тому силы. Было бы очень хорошо, если бы они были обнародованы еще при жизни Конона; он был, как мы считаем, наиболее способным продумать их и дать о них подходящий отзыв. Полагая, что было бы очень хорошо передать их сведущим в математике людям, мы посылаем тебе запись их доказательств; теперь их могут рассмотреть все занимающиеся математикой.»

Для вычисления площади поверхности и объёма шара Архимеду при-

шлось создавать новые методы, которые впоследствии привели к интегральному исчислению. Поэтому его доказательства, включающие и подготовительные теоремы для этих методов, весьма длинные.

Первое письмо

В первом письме Архимед доказывает следующие теоремы:

1) поверхность всякого шара в четыре раза больше его большого круга;

2) поверхность всякого шарового сегмента равна кругу, радиус которого равен [отрезку] прямой, проведённой из вершины сегмента к окружности круга, составляющего основание сегмента;

3) для всякого шара цилиндр, имеющий основанием большой круг этого шара, а высотой — прямую, равную диаметру шара, и сам [т. е. его объём] будет в полтора раза больше этого шара, и поверхность его тоже в полтора раза больше поверхности этого шара.

Для доказательства этих теорем недостаточно аксиом Евклида, и Архимед вводит дополнительные аксиомы и допущения. В этих аксиомах определяются, в частности, выпуклые кривые и выпуклые поверхности. Допущения (постулаты) Архимеда представляют большой интерес, поэтому перечислим их все.

1) Из всех линий, имеющих одни и те же концы, прямая будет наименьшей.

2) Если две кривые с общими концами, расположенные в одной плоскости, выпуклы в одну сторону и одна из них целиком охватывается другой, то первая будет меньше второй.

3) Из всех поверхностей, ограничиваемых одной и той же плоской кривой, наименьшей будет плоскость.

4) Аналог постулата 2 для поверхностей.

5) Если разность двух неравных линий, поверхностей или объёмов сложить саму с собой достаточное число раз, то она может превзойти любую заданную величину того же рода. Это — знаменитая *аксиома Архимеда*. Она тесно связана с аксиомой, которую применял Евдокс, и Архимед упоминает Евдокса как своего предшественника. Но неко-

торая разница есть. Напомним, что у Евклида аксиома Евдокса выступает в следующем виде: «Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они взятые кратно, могут превзойти друг друга.» Таким образом, у Евдокса меньшая величина, складываемая с собой, может превзойти бóльшую, а у Архимеда меньшая величина заменяется на разность большей и меньшей. По-видимому, это видоизменение направлено против атомистики Демокрита, у которого разность двух площадей могла представлять линию, а разность объёмов — площадь.

Архимед даёт определение площади боковой поверхности цилиндра и конуса, рассматривая вписанные и описанные призмы и пирамиды. Затем он в обоих случаях находит круг, площадь которого равна площади боковой поверхности. В случае цилиндра (соответственно, конуса) радиус этого круга равен среднему геометрическому образующей конуса и диаметра (соответственно, радиуса) основания. Доказательство проводится методом исчерпывания.

Затем Архимед переходит к определению площади поверхности и объёма шара. Он вписывает в окружность правильный многоульник, число сторон которого делится на 4, и врашает его вокруг прямой, соединяющей две противоположные вершины. В результате в шар оказывается вписанной фигура, состоящая из двух конусов и нескольких усечённых конусов. Архимед рассматривает также аналогичную фигуру, описанную вокруг шара. Он вычисляет сумму площадей боковых поверхностей вписанных (соответственно, описанных) конусов и затем находит площадь поверхности шара. Чтобы найти объём, Архимед сначала доказывает, что сумма объёмов вписанных конусов меньше учетверённого объёма конуса с высотой r и основанием r (r — радиус сферы), а сумма объёмов описанных — больше, а затем пользуется тем, что объёмы вписанных конусов относятся к объёмам описанных как кубы их сторон.

Аналогично Архимед находит площадь поверхности и объём шарового сегмента. При этом он на геометрическом языке фактически вычисляет интеграл $\int_0^\alpha \sin\theta\, d\theta = 1 - \cos\alpha$.

Второе письмо

Во втором письме Архимед решает задачи, связанные с объёмом шара и шарового сегмента.

Для заданного конуса или цилиндра найти шар, равный по объёму этому конусу или цилиндру. Эта задача сводится к кубическому уравнению $x^3 = b^2c$, хорошо изученному древнегреческими математиками при решении задачи удвоения куба.

Разделить данный шар так, чтобы отношение объёмов его сегментов было заданным. Эта *задача Архимеда* приводит к кубическому уравнению $x^2(a - x) = b^2c$. Решением этой задачи занимались многие арабские математики. Та часть труда Архимеда, в которой разбиралось решение этого уравнения не сохранилась. Однако Евтокий нашёл рукопись, написанную на обычном для Архимеда дорийском диалекте, и потому приписал её Архимеду. В этой рукописи решение уравнения $x^2(a - x) = b^2c$ находится как пересечение параболы $x^2 = \frac{c^2}{a}y$ и равнобочной гиперболы $(a - x)y = ab$. Уравнение $x^2(a-x) = b^2c$ имеет решение, если максимум выражения $x^2(a-x)$ не превосходит b^2c. В рукописи доказывается, что максимум этого выражения достигается при $x = \frac{2}{3}a$. Доказательство основано на том, что если $bc^2 = \frac{4}{27}a^3$, то парабола и гипербола касаются в точке, для которой $x = \frac{2}{3}a$.

Завершается второе письмо Архимеда Досифею доказательством следующей теоремы: *Среди всех сферических сегментов, ограниченных равными поверхностями, наибольший объём имеет полушарие.*

2.16.4. Измерение круга

В этом сочинении Архимед сначала методом исчерпывания доказывает, что площадь круга равна площади треугольника, основанием которого является длина окружности, а высотой — радиус круга. Затем, вычисляя периметр вписанного 96-угольника, он показывает, что (говоря современным языком) число π меньше $3\frac{1}{7}$, а вычисляя периметр

описанного 96-угольника, показывает, что оно больше $3\frac{10}{71}$. При этих вычислениях Архимед считает известным, что

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

2.16.5. О коноидах и сфероидах

Прямоугольными коноидами Архимед называл параболоиды вращения, а тупоугольными коноидами — полости двуполостных гиперболоидов вращения. Сфероидами он называл эллипсоиды вращения. Архимед вычисляет объём сфероида и объём сегмента коноида, отсечённого произвольной плоскостью.

Сначала Архимед доказывает, что объём сегмента параболоида вращения, отсечённого плоскостью, перпендикулярной оси вращения, в полтора раза больше объёма конуса с тем же основанием и той же высотой. Для этого он разрезает сегмент на n слоёв одинаковой толщины (рис. 2.49). Эти слои позволяют построить набор цилиндров, содержащих сегмент, и набор цилиндров, содержащихся в сегменте. Объём первого набора равен $A + 2A + 3A + \cdots + nA$, а второго $A+2A+3A+\cdots+(n-1)A$ (здесь A — объём наименьшего цилиндра). Архимед применяет доказанные им в начале сочинения неравенства

$$2(A + 2A + 3A + \cdots + nA) > n^2A > 2(A + 2A + 3A + \cdots + (n-1)A).$$

После этого остаётся лишь заметить, что разность между объёмом первого набора и второго равна объёму наибольшего цилинда (и он стремится к нулю при $n \to \infty$), а объём конуса, с которым сравнивается сегмент, равен $\frac{1}{3}n^2A$.

Переход от сечения, перпендикулярного оси, к произвольному сечению уже чисто геометрический, хотя и далеко не тривильный. Архимед доказывает, что все сечение параболоида вращения параллельными плоскостями являются эллипсами, подобными друг другу. После этого уже можно повторить предыдущие рассуждения без особого труда.

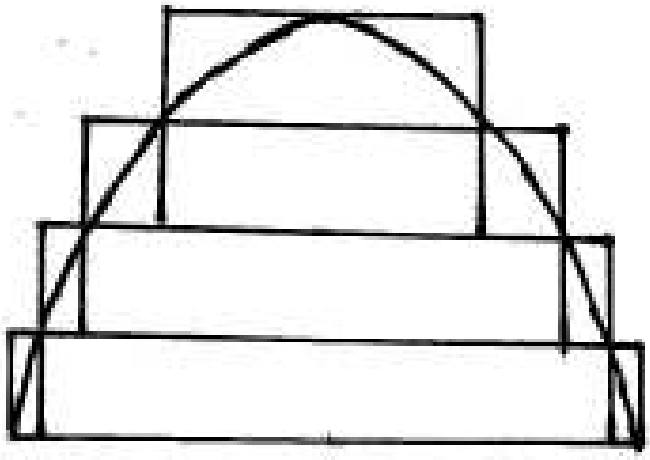

Рис. 2.49.

Для гиперболоидов и эллипсоидов вращения рассуждения Архимеда аналогичные, но вычисления теперь более сложные. Для параболоидов вращения понадобились оценки суммы $\sum_{k=1}^{n} k$. Теперь же помимо этих оценок нужны ещё оценки суммы $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Действительно, уравнения элиипса и гиперболы можно записать в виде $x^2 = b^2 \mp a^2y^2$. Нас интересуют сечения прямыми $y = y_0 + kh$, и объёмы цилиндров с одинаковыми высотами пропорциональны квадратам абсцис. Чтобы получить оценки для сумм объёмов этих цилиндров, нужно получить оценки для сумм $\sum_{k=1}^{n} k$ и $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Для второй суммы Архимед использует доказанные им оценки

$$3\sum_{k=1}^{n-1} k^2 < n^3 < 3\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

2.16.6. О спиралях

Архимед даёт кинематическое определение спирали. Пусть луч равномерно вращается вокруг точки O, а по этому лучу равномерно движется точка X; тогда точка X движется по кривой, которую впоследствии назвали *спиралью Архимеда*.

К углам не могла применяться теория отношений (пропорций), потому что она применялась только к величинам, которые могли быть сколь угодно велики, а у греков угол не мог быть больше двух прямых.

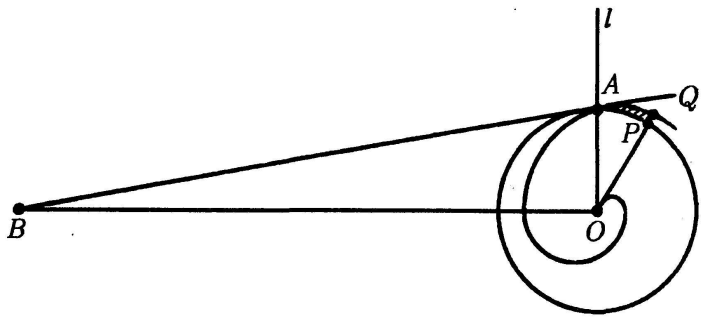

Рис. 2.50.

Архимед даёт кинематическое определение спирали, поскольку он не может говорить о пропорциональности радиус-векторов и углов. Но из этого определения он извлекает всё, что ему нужно, как если бы он использовал эту пропорциональность. Например, Архимед доказывает следующее: «Если к спирали, описанной в течение одного какого-нибудь оборота, провести из начала спирали несколько прямых, образующих друг с другом равные углы, то эти прямые будут превышать друг друга на равные величины.»

Архимед решает две задачи: построение касательной к спирали и вычисление площади между двумя последовательными витками спирали или внутри первого витка.

Касательную к спирали Архимед применил для решения задачи квадратуры круга. Рассмотрим один виток спирали, т. е. часть спирали, которую проходит точка X при повороте луча на 360°. Пусть l — начальное положение луча (оно же совпадает с конечным положением); A — точка X в конечном положении; B — точка пересечения касательной к спирали в точке A и перпендикуляра к лучу l, восставленного из точки O. Теорема, доказанная Архимедом, заключается в том, что длина отрезка OB равна длине окружности с радиусом OA (рис. 2.50).

Доказать это утверждение можно следующим образом. Пусть P — точка окружности S радиуса OA с центром O, близкая к точке A; Q — точка пересечения луча OP и спирали. По свойству спирали $\overset{\frown}{AP} : PQ = L : R$, где L — длина окружности S, R — радиус

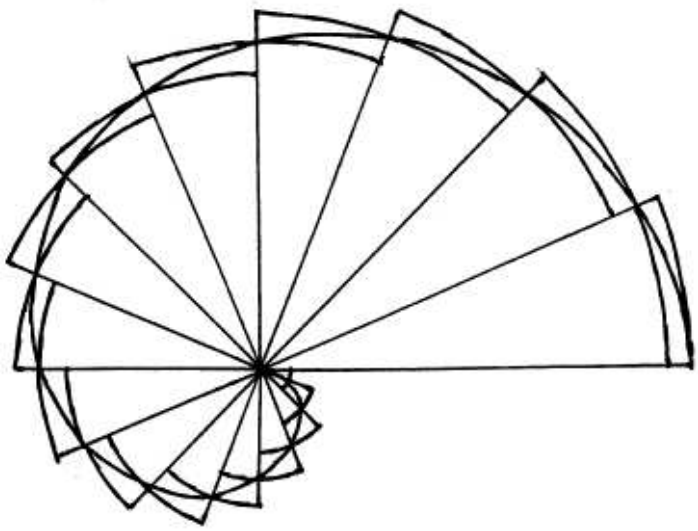

Рис. 2.51.

этой окружности. Значит, если точка P стремится к A, то отношение $AP : PQ$ стремится к $L : R = 2\pi$. При этом направления сторон AP и PQ треугольника APQ стремятся к направлениям отрезков BO и AO соответственно. Следовательно, направление отрезка AQ стремится к направлению гипотенузы прямоугольного треугольника, катеты которого параллельны прямым BO и AO и их отношение равно 2π. Поэтому $BO : AO = 2\pi$, так как направление касательной в точке A есть предельное направление отрезка AQ.

Сам Архимед даёт, конечно же, более строгое доказательство. Оно проводится методом от противного с использованием некоторых неравенств.

Для вычисления площади фигуры, ограниченной витком спирали, Архимед рассматривает секторы круга, дающие оценку сверху и оценку снизу (рис. 2.51). И всё снова, как и в сочинении о коноидах и сфероидах, сводится к оценке суммы $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$. Но теперь Архимед даёт точную формулу для этой суммы и выводит из неё нужные оценки.

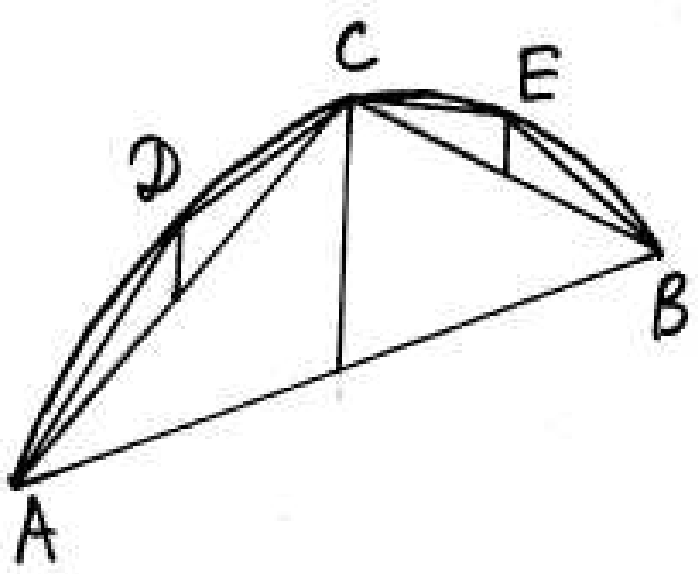

Рис. 2.52.

2.16.7. Квадратура параболы

В этом сочинении Архимед приводит два вывода доказанной им теоремы о площади произвольного сегмента параболы. Эта теорема сформулирована и доказана на с. 95. Первое доказательство такое же, как приведённое выше, только теперь Архимед делает его строгим, используя метод исчерпывания. Второе доказательство геометрическое. Архимед проводит через середину отрезка AB прямую, параллельную оси параболы; эта прямая пересекает параболу в точке C (рис. 2.52). Аналогично строятся точки D и E. Архимед доказывает, что площадь каждого из треугольников ADC и BEC равна $\frac{1}{8}$ площади треугольника ABC. Такие же треугольники можно строить и дальше. Поэтому квадратура параболы, говоря современным языком, сводится к нахождению суммы бесконечной геометрической прогрессии $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{4}{3}$. Архимед фактически это и делает, не говоря, конечно, о сумме бесконечного ряда.

2.16.8. Книга лемм

В наследии Архимеда «Книга лемм», сохранившаяся только в арабском переводе, занимает далеко не центральное место. Но в отношении гео-

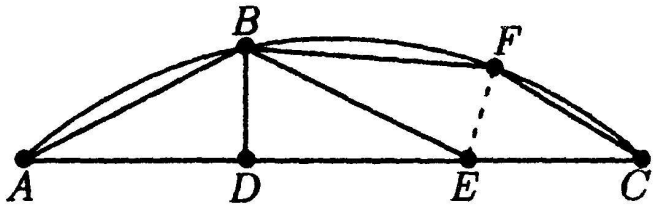

Рис. 2.53.

метрических задач — это одна из наиболее интересных книг за всю историю математики. В этой книге содержится 15 лемм. Мы приведём некоторые из них, указывая их номера.

III. *Хорда AC отсекает от круга сегмент. На ограничивающей этот сегмент дуге окружности взяты точки B и F так, что $AB = BF$. Из точки B опущен перпендикуляр BD на хорду AC и на AC взята точка E так, что $AD = DE$ (рис. 2.53). Тогда $CE = CF$.*

Доказательство. Четырёхугольник $CBFA$ вписанный, поэтому

$$\angle BAC + \angle BFC = 180^\circ.$$

А так как

$$\angle BFA + \angle BEC = 180^\circ \quad \text{и} \quad \angle BEA = \angle BAC,$$

то $\angle BFC = \angle BEC$. Но треугольник EBF равнобедренный, поэтому треугольник ECF тоже равнобедренный.

IV. *На отрезке AC взята точка D и на отрезках AC, AD и CD как на диаметрах построены полуокружности (рис. 2.54). Заштрихованную фигуру Архимед назвал «арбелон»*[4] *Восставим из точки D перпендикуляр BD. Тогда площадь арбелона равна площади круга с диаметром BD.*

Доказательство. Пусть $AB = a$ и $CD = b$. Тогда площадь арбелона равна

$$\frac{1}{2}\left[\pi(a+b)^2 - \pi a^2 - \pi b^2\right] = \pi ab.$$

[4] $\alpha\rho\beta\eta\lambda o\nu$ — скребок, скорняжный нож.

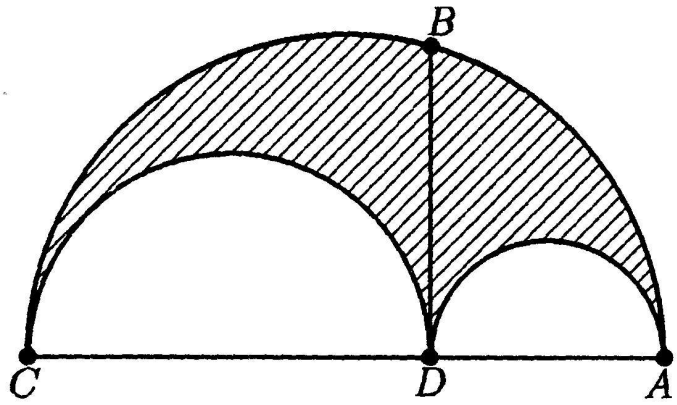

Рис. 2.54.

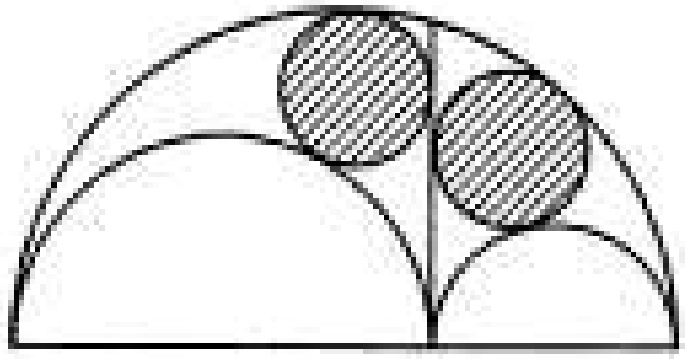

Рис. 2.55.

Кроме того, $BD^2 = ab$. (Архимед все эти рассуждения проводит на языке геометрии.)

V. *Круги, вписанные в левую и правую части арбелона, равны (рис. 2.55).*

Доказательство. Нам потребуется более подробный чертёж (рис. 2.56). Точки касания F и G служат центрами подобия окружностей. Поэтому, например, точки F, H и B лежат на одной прямой и точки H, G и A лежат на одной прямой. Пусть I — точка пересечения прямой AH и большой полуокружности. Тогда точки B, I, D лежат на одной прямой. Это следует из теоремы о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке: в самом деле, в треугольнике ADB отрезки BF и DC являются высотами, поэтому AI тоже высота.

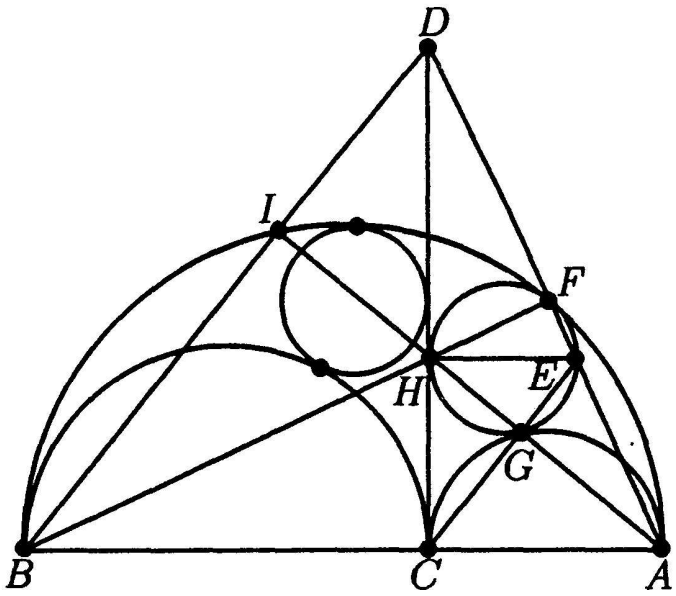

Рис. 2.56.

Итак, $\angle BIA = \angle CGA = 90°$, поэтому $BD \parallel CE$. Следовательно,

$$AC : HE = AD : DE = AB : BC,$$

т. е.

$$HE = \frac{AC \cdot BC}{AB}.$$

Для диаметра второй окружности получаем точно такое же выражение.

2.16.9. Теорема о ломаной, вписанной в круг

Теорема Архимеда о ломаной, вписанной в круг, сохранилась, в частности, в передаче арабского математика аль-Бируни (973—1050 гг. н. э.).

Пусть D — середина дуги AC, B — некоторая точка этой дуги (рис. 2.57). Тогда основание E перпендикуляра, опущенного из точки D на ломаную ABC, делит длину этой ломаной пополам.

В арабских переводах сочинений Архимеда сохранилось несколько доказательств этой теоремы. Одно из доказательств следующее. Отложим от точки D дугу DH, равную дуге BD, а от точки E отложим

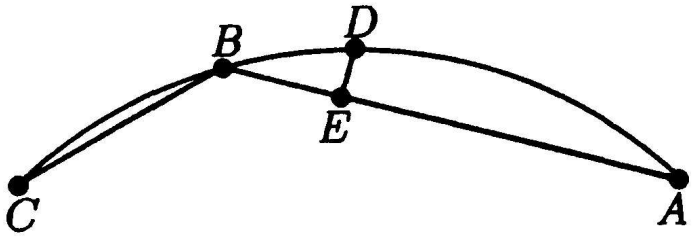

Рис. 2.57.

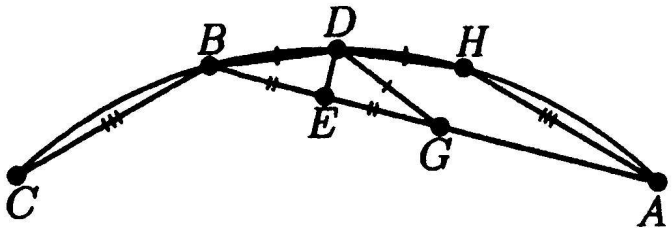

Рис. 2.58.

отрезок EG, равный отрезку BE (рис. 2.58). Тогда

$$\angle HDA + \angle DAB = \angle DBA = \angle DGB,$$

$$\angle GAD + \angle GDA = \angle DGB,$$

поэтому $\angle GDA = \angle HDA$. Но в таком случае из равенства $DH = DG$ следует равенство $AH = AG$ т. е. $BC = AG$.

2.16.10. Формула Герона

По недоразумению формулу, которую Архимед доказал за несколько веков до Герона, называют *формулой Герона*. Дело в том, что эта формула стала известна европейским математикам из сочинений Герона. Лишь в конце прошлого века из нескольких арабских рукописей выяснилось, что эта формула была известна уже Архимеду. Доказательство Архимеда опирается на предыдущую «теорему о ломаной, вписанной в круг». (Герон приводит совсем другое доказательство.)

При доказательстве теоремы о ломаной, вписанной в круг, было показано, что треугольники AMD и CBD равны (рис. 2.59), поэтому площадь треугольника ADC равна площади пятиугольника $AMDBC$,

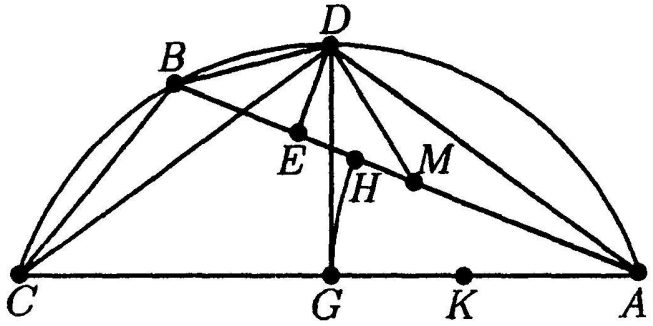

Рис. 2.59.

а площадь этого пятиугольника равна сумме площадей треугольников ABC и BDM. Таким образом, площадь треугольника ABC равна разности площадей треугольников ADC и BDM, т. е. она равна

$$DG \cdot GA - DE \cdot EB.$$

Равнобедренные треугольники ADC и BDM подобны, так как углы DBA и DCA опираются на одну и ту же дугу. Поэтому

$$\frac{DG^2 - DE^2}{DG \cdot GA - DE \cdot EB} = \frac{DG \cdot GA - DE \cdot EB}{GA^2 - EB^2}.$$

Действительно, это равенство имеет вид

$$\frac{x^2 - y^2}{x(kx) - y(ky)} = \frac{x(kx) - y(ky)}{(kx)^2 - (ky)^2}.$$

Для вычисления разности $DG^2 - DE^2$ можно воспользоваться тем, что

$$DG^2 + AG^2 = AD^2 = DE^2 + EA^2$$

и

$$EA^2 = AH^2 + 2AH \cdot EH + EH^2 = AG^2 + 2AH \cdot EH + EH^2.$$

В результате получим

$$DG^2 - DE^2 = EH(EH + 2AH).$$

Несложно показать, что $EH = p - b$ и $EH + 2AH = p$ (здесь p — полупериметр, $b = AC$).

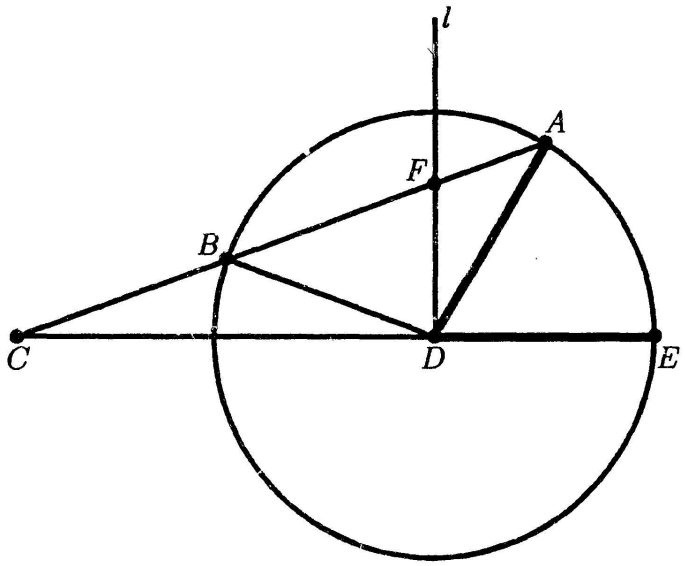

Рис. 2.60.

Для вычисления разности $GA^2 - EB^2$ Архимед строит на отрезке AG вспомогательную точку K так, что $BE = GK$. Тогда

$$GA^2 - GK^2 = KA^2 + 2KA \cdot GK = KA(KA + 2GK).$$

Несложно показать, что $KA = p - c$ и $KA + 2GK = p - a$.

2.16.11. Трисекция угла

Архимед предложил одно из решений задачи трисекции угла способом «вставок». В его решении нужно вставить отрезок данной длины между прямой и окружностью. Рассмотрим угол ADE; можно считать, что D — центр окружности, а точки A и E лежат на окружности. Проведём через точку A прямую так, чтобы окружность и прямая DE высекали на ней отрезок BC, длина которого равна радиусу окружности (рис. 2.60). Тогда $\angle BDC = \angle ADE/3$. В самом деле, $\angle ADE = \angle ACD + \angle CAD$, а так как треугольники CBD и ADB равнобедренные, то $\angle BCD = \angle BDC$ и $\angle ABD = \angle BAD$, поэтому $\angle ACD + \angle CAD = \angle BDC + 2\angle BDC = 3\angle BDC$.

Для трисекции угла способом Архимеда удобно использовать линейку с двумя делениями, расстояние между которыми равно радиусу окружности. Можно слегка изменить способ Архимеда и использовать

для трисекции угла линейку с двумя делениями, расстояние между которыми равно не радиусу, а диаметру окружности. Рассмотрим для этого прямоугольный треугольник CDF, гипотенуза CF которого лежит на прямой CA (см. рис. 2.60). Точка B является серединой гипотенузы CF, поэтому $CF = 2CB = 2DE$. Значит, для трисекции угла ADE нужно восставить из точки D перпендикуляр l к прямой DE и вставить между прямыми DC и l отрезок CF длиной $2DE$ так, чтобы прямая CF проходила через точку A.

2.16.12. Построение правильного семиугольника

Архимедово построение правильного семиугольника сохранилось только на арабском языке, в передаче аль-Бируни. Архимед строит треугольник со сторонами x, y и z, заштрихованный на рис. 2.61. На этом рисунке легко выделить три подобных треугольника, у каждого из которых один угол равен α, а другой 2α. Из подобия этих треугольников получаем $z : x = x : (y + z)$ и $z : (x + y) = y : z$, т.е. $z(y + z) = x^2$ и $y(x + y) = z^2$. Считая заданной величину $y + z = a$, получаем систему уравнений $a(a - y) = x^2$ и $(x + y)y = (a - y)^2$. Эти уравнения задают два конических сечения, и мы находим искомое решение как пересечение двух конических сечений. (Циркулем и линейкой построить правильный семиугольник нельзя.)

2.16.13. Исчисление песка

В сочинении «Исчисление песка» Архимед разработал способ обозначения больших чисел и показал, что этим способом можно записать число песчинок, заполняющих всё мировое пространство (которое, по мнению Архимеда, было очень большим, но ограниченным). Это сочинение интересно также сообщениями Архимеда об астрономических представлениях того времени.

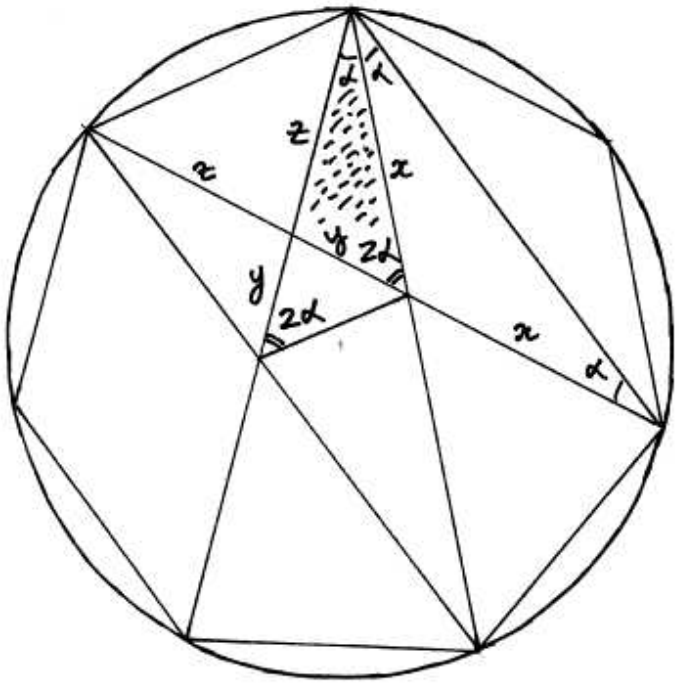

Рис. 2.61.

2.16.14. Полуправильные многогранники

Сочинение Архимеда о полуправильных многогранниках не сохранилось. О нём сообщает Папп в пятой книге своего «Математического собрания».

2.17. Никомед (280-210 до н.э.)

Весьма распространенным способом решения задач на построение в Древней Греции был способ «вставок» (neusis). Он заключался в том, что через данную точку O проводилась прямая, на которой две данные прямые l_1 и l_2 (или, например, прямая и окружность) высекали отрезок данной длины (рис. 2.62), т. е. между данными прямыми вставлялся отрезок данной длины, продолжение которого проходило через данную точку. Задачу построения такого отрезка нельзя решить с помощью циркуля и линейки, но для её решения можно, вообще говоря, использовать линейку с двумя делениями, расстояние между которыми равно длине данного отрезка. Так некоторые древнегреческие математики и делали, но, судя по всему, к построениям с помощью линейки с двумя

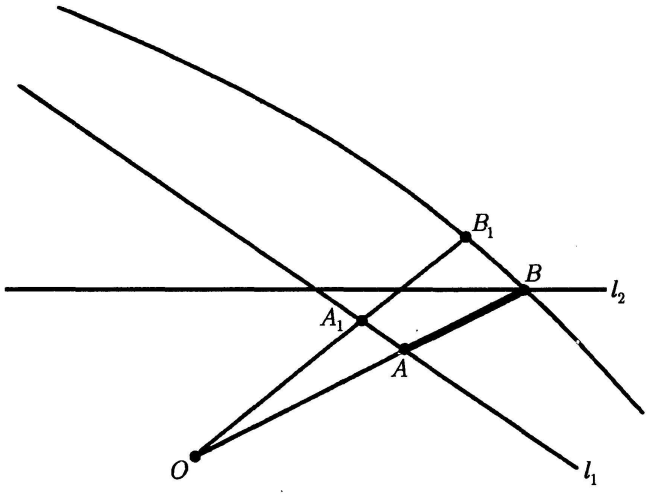

Рис. 2.62.

делениями в Древней Греции относились неодобрительно.

Для построений, использующих «вставки», Никомед предложил специальную кривую — конхоиду. Эта кривая строится следующим образом. Будем вращать вокруг точки O прямую. Пусть A_1 — точка пересечения этой прямой с прямой l_1, а B_1 — такая её точка, что отрезок A_1B_1 имеет данную длину (см. рис. 2.62). Кривую, которую заметает при этом точка B_1, и называют *конхоидой*. Точка B пересечения конхоиды и прямой l_2 задаёт искомую прямую OB.

Никомед изготовил также инструмент для вычерчивания конхоид. Этот инструмент состоял из неподвижной Т-образной рамы с прямолинейной прорезью и шипом A и из подвижной рейки с прорезью и шипом B (рис. 2.63). Шип A жёстко закреплён на раме, а шип B — на рейке. Диаметр шипов равен ширине прорезей. Заострённый конец рейки при движении, направляемом шипами и прорезями, описывает конхоиду (точнее говоря, часть конхоиды). Способ «вставок» даёт возможность производить построения, которые нельзя выполнить с помощью циркуля и линейки. Он, например, легко позволяет разделить любой угол на три равные части (см. с. 26); при этом можно даже ограничиться случаем, когда прямые l_1 и l_2, между которыми нужно вставить данный отрезок, перпендикулярны. Задачу удвоения куба с помощью способа «вставок» решить тоже можно, но это решение суще-

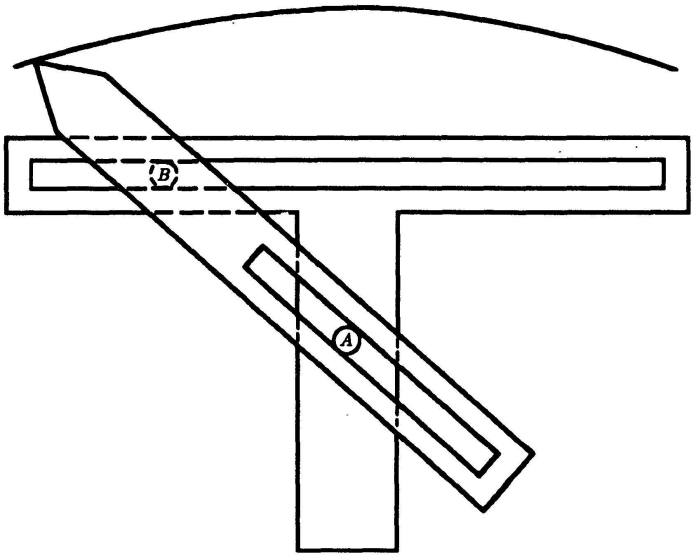

Рис. 2.63.

ственно сложнее трисекции угла, и прямые l_1 и l_2 уже нельзя считать перпендикулярными (точнее говоря, чтобы решить задачу удвоения куба посредством вставления некоторого отрезка между перпендикулярными прямыми, придется дополнительно произвести сложные построения с помощью циркуля и линейки). Весьма простое построение для решения задачи удвоения куба нашёл Никомед, но его доказательство того, что это построение действительно даёт нужный отрезок, слишком длинное и сложное, а главное, из доказательства совсем не видно, как это решение можно было найти. Поэтому мы начнём с того, что постараемся понять, каким образом способ «вставок» можно применить к решению задачи удвоения куба.

Пусть даны прямые l_1 и l_2, точка F и отрезок длиной r. Попробуем выяснить, как должны быть расположены эти прямые и точка и каким должно быть число r, чтобы длина x отрезка CK оказалась равной $\sqrt[3]{a^2b}$, где a и b — данные отрезки (рис. 2.64). Опустим из точки F перпендикуляр FE на прямую l_2 и проведём через точку F прямую FG, параллельную прямой l_1 (G — точка прямой l_2). Чтобы задать расположение прямых l_1 и l_2 и точки F, достаточно задать числа $s = FC$, $u = EC$ и $w = GE$. Числа s, u, w и r нужно подобрать так, чтобы получилось $x = \sqrt[3]{a^2b}$ и отрезки с длинами s, u, w и r легко

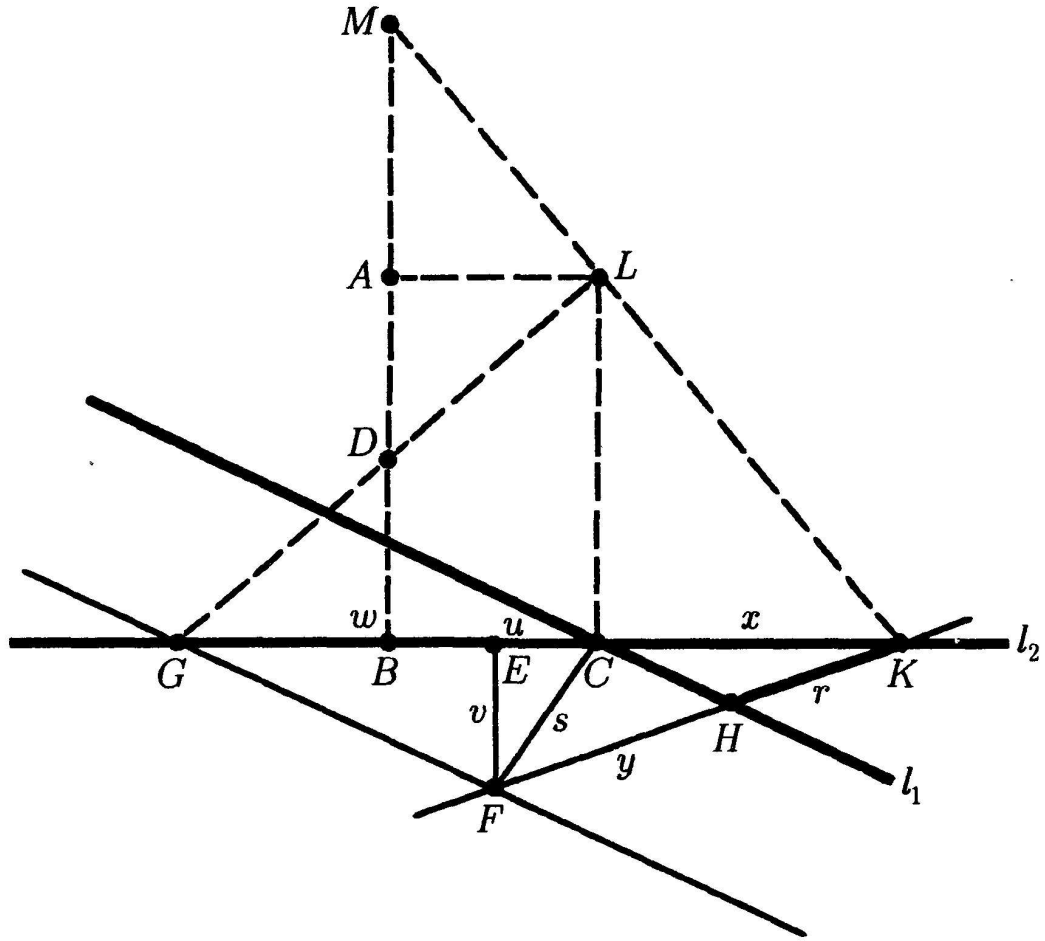

Рис. 2.64.

строились бы с помощью отрезков a и b.

Ясно, что $y = r(u+w)/x = r(u+w)x^2/x^3 = cx^2$, где $c = r(u+w)/x^3 = r(u+w)/a^2b$. А так как

$$(x+u)^2 + (s^2-u^2) = KE^2 + EF^2 = FK^2 = (r+y)^2 = (r+cx^2)^2,$$

то

$$x^2 + 2xu + s^2 = r^2 + 2rcx^2 + c^2x^3x = r^2 + 2rcx^2 + c^2a^2bx.$$

Вполне естественно приравнять коэффициенты при x^2, x и x^0. В результате получаем $2rc = 1$, $2u = c^2a^2b$ и $r = s$. Следовательно, $2u = c^2a^2b = a^2b/4r^2$, т. е. $8ur^2 = ba^2$. Кроме того,

$$u + w = \frac{xy}{r} = \frac{cx^3}{2r^2c} = \frac{a^2b}{2r^2} = 4u,$$

т. е. $w = 3u$. Итак, числа u и r должны удовлетворять соотношению $8ur^2 = ba^2$, а числа s и w задаются равенствами $s = r$ и $w = 3u$. Пожалуй, наиболее естественно положить $u = b/2$ и $r = a/2$. Так Никомед и сделал, хотя мы и не можем с уверенностью сказать, что ход его поисков был таким же, как у нас. Но едва ли Никомед смог бы найти это решение, если бы искал его наобум.

Построение Никомеда изображено пунктиром на рис. 2.64. Построим прямоугольник $ABCL$ со сторонами $AB = a$ и $BC = b$. Пусть D и E — середины сторон AB и BC, G — точка пересечения прямых DL и BC. Построим точку F так, что $FE \perp BC$ и $CF = AD$, а затем через точку C проведём прямую l_1, параллельную прямой GF. Если теперь провести через точку F прямую так, что $HK = CF = AD$, то $CK = \sqrt[3]{AB^2 \cdot BC}$ и, как легко проверить, $AM = \sqrt[3]{AB \cdot BC^2}$, где M — точка пересечения прямых AB и KL.

Мы не будем воспроизводить доказательство Никомеда, а воспользуемся снова обозначениями рис. 2.64. Подставляя наши значения чисел u, w, s и r в равенства $xy = r(u+w)$ и $x^2+2xu+s^2 = y^2+2ry+r^2$, получаем $xy = ab$ и $x(x+b) = y(y+a)$. Следовательно,

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{b} = \frac{a+y}{x+b} \quad \text{и} \quad \frac{x}{y} = \frac{y+a}{x+b} = \frac{a}{x} = \frac{y}{b}.$$

Никомед в качестве искомых отрезков указал отрезки CK и MA; он, по-видимому, не заметил, что $MA = FH$. Своим решением Никомед очень гордился и считал, что оно гораздо лучше построения Эратосфена, которое он высмеивал как непрактичное и негеометрическое.

Легко проверить, что конхоида задаётся уравнением четвертой степени. В самом деле, из рис. 2.65 видно, что $\sqrt{x^2+y^2} : y = r : (y-a)$, т. е. $(x^2+y^2)(y-a)^2 - r^2y^2 = 0$.

Папп Александрийский показал, что «вставление» отрезка между прямыми можно свести к нахождению точки пересечения окружности и гиперболы.

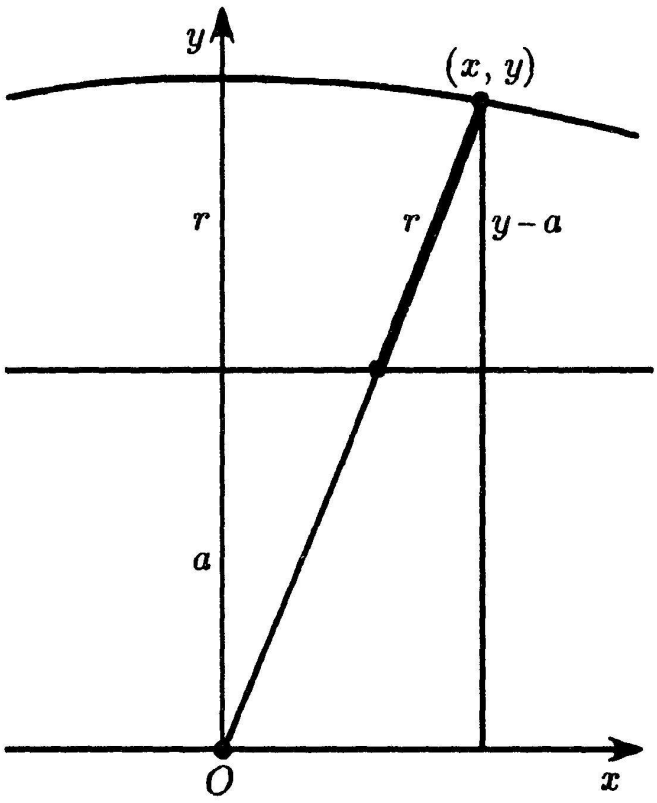

Рис. 2.65.

2.18. Эратосфен Киренский (276-194 до н. э.)

Круг интересов Эратосфена, современника Архимеда, был очень широк. Он более точно, чем его предшественники, измерил длину земного меридиана. Широко известен его способ нахождения простых чисел — *решето Эратосфена*. (Этот способ заключается в следующем. Сначала к простым числам мы относим 2 и вычёркиваем все числа, делящиеся на 2. Затем берём наименьшее из оставшихся чисел; его мы тоже относим к простым и вычёркиваем все числа, делящиеся на него, и т.д.) Но ни в одной из многочисленных областей своих интересов он не достиг первенства, за что и получил два прозвания: Бета (вторая буква греческого алфавита должна была намекать на то, что Эратосфен во всём второй) и Пятиборец.

Измерение земного меридина Эратосфен произвёл следующим образом. Расстояние от Александрии до Сиены, расположенной почти точно к югу от Александрии, он принял равным 5000 стадиям. Во время

летнего солнцестояния в Сиене Солнце стоит в зените, т.е. вертикально установленный гномон не отбрасывает тени, а в Александрии Солнце отклоняется от зенита на $1/50$ долю четырёх прямых углов. Из этого Эратосфен вывёл, что окружность Земли равна $50 \times 5000 = 250\,000$ стадий.

Эратосфену также принадлежит одно из решений задачи удвоения куба. Это решение использует инструмент, состоящий из трёх равных прямоугольников $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ и $A_3B_3C_3D_3$, противоположные стороны которых могут перемещаться по двум параллельным прямым, и на этих прямоугольниках нарисованы их диагонали A_1C_1, A_2C_2 и A_3C_3 (рис. 2.66). Пусть расстояние между прямыми равно данному отрезку a, а на стороне B_3C_3 взята точка M так, что отрезок C_3M равен данному отрезку b. Диагонали A_2C_2 и A_3C_3 пересекают стороны B_1C_1 и B_2C_2 в точках K и L соответственно. Прямоугольники можно сдвинуть так, чтобы точки A_1, K, L и M оказались на одной прямой. Фиксируем для этого прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ и будем двигать прямоугольник $A_2B_2C_2D_2$ так, чтобы точка K прошла путь от точки B_1 до точки C_1. Для каждого положения прямоугольника $A_2B_2C_2D_2$ найдется такое положение прямоугольника $A_3B_3C_3D_3$, что точка L лежит на прямой A_1K. Пусть прямая, на которой лежат точки A_1, K и L, пересекает сторону B_3C_3 в точке M'. Ясно, что если точка K пробегает весь отрезок B_1C_1, то точка M' пробегает весь отрезок B_3C_3, а значит, в некоторый момент она совпадает с точкой M. Когда прямоугольники приведены в нужное положение, трапеции $A_1KC_1D_1$, KLC_2C_1 и LMC_3C_2 подобны, поэтому $a : x = x : y = y : b$, где $x = KC_1$ и $y = LC_2$.

Если вы возьмёте три прямоугольника, нарисуете на них диагонали и попробуете осуществить построение Эратосфена, то увидите, что его метод не очень удобен — хлопотно проверять, что точки A_1, K, L и M лежат на одной прямой. Но Эратосфен своим решением очень гордился. Он даже сочинил эпиграмму:

Если из малого куба двойной замышляешь устроить,
Друг, или данный объём к форме другой привести,

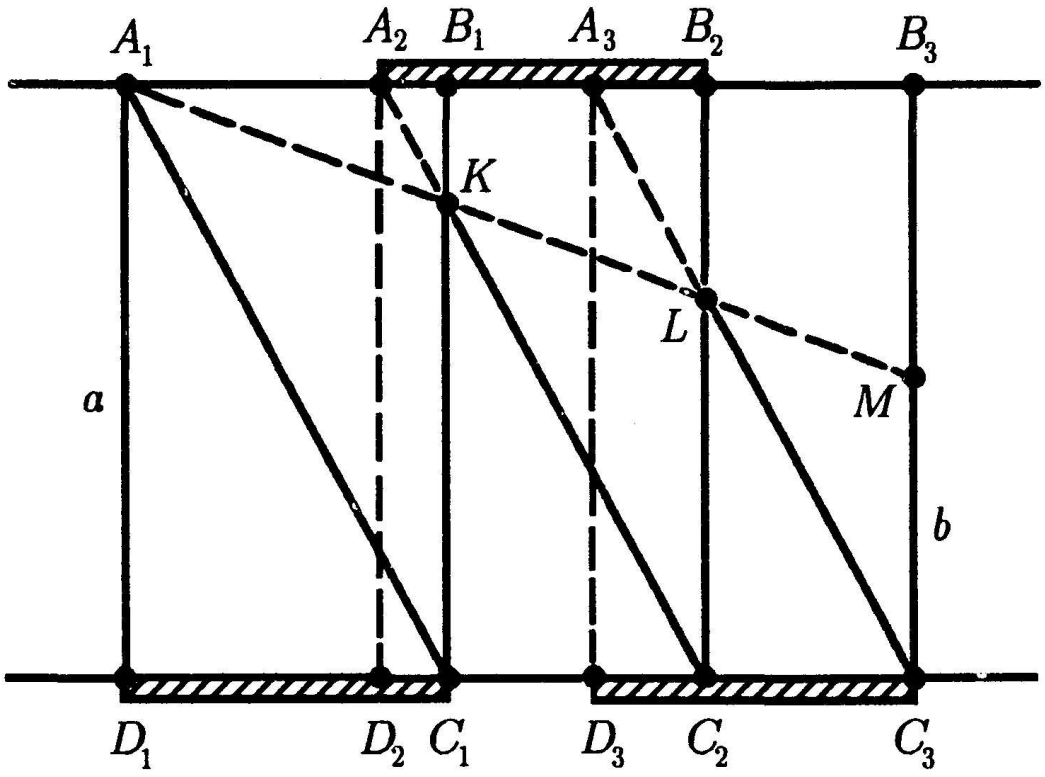

Рис. 2.66.

Чтоб хорошо удалось тебе это, вздумал ли погреб
Ты измерять, или ров, или широкую пасть
Глуби колодца, возьми на смежных концами пластинках
Средние линии две, сжатые между таблиц.
Не прибегай для этого ты к тяжёлым цилиндрам Архита,
Конуса ты не секи, корня Менехма триад;
Также не надо держать с богоравным Евдоксом совета,
Выгнутых линий его формы не надо чертить.
С этими ж ты табличками тысячи средних построишь,
Двигайся смело вперед, с меньших из данных начав.

. . .

Пусть же свершится всё это, и каждый смотрящий пусть скажет:

«Это Кирены сын выдумал Эратосфен».

2.19. Аполлоний Пергский (262-190 до н.э.)

Ещё юношей Аполлоний приехал в Александрию и учился там у учеников Евклида. Он был не только великим математиком, но и великим астрономом. Наиболее знаменитое сочинение Аполлония посвящено коническим сечениям. Конические сечения открыл Менехм; им были посвящены не сохранившиеся до нашего времени сочинения Аристея и Евклида. Архимед в своих сочинениях свободно использует многие свойства конических сечений, по-видимому, опираясь на трактат Евклида.

До Аполлония эллипсы, параболы и гиперболы получались как сечения плоскостью, перпендикулярной к одной из образующих, остроугольного, прямоугольного и тупоугольного конусов. Аполлоний же детально разработал теорию сечений конуса произвольными плоскостями. Кроме того, он первым стал рассматривать две ветви гиперболы как одну кривую. Это позволило единообразно сформулировать некоторые свойства элипса и гиперболы.

Интресно, что в обширном трактате Аполлония не встречаются директрисы. (У Паппа директрисы уже есть: он доказывает, что если даны точка и прямая, то множество точек, для которых отношение расстояния до данной точки к расстоянию до данной прямой имеет заданное значение, является коническим сечением.)

2.19.1. Книга I

Первая книга содержит способ получения конических сечений и их симптомы (т.е. уравнения в прямоугольных и косоугольных координатах). Здесь же Аполлоний вводит «противолежащие конические сечения», т.е. вторые ветви гипербол.

Аполлоний начинает с определения кругового конуса общего вида (не прямого, а наклонного). Конус задаётся окружностью (ограничивающей основание конуса) и точкой, не лежащей в плоскости основания: через точку проводятся прямые, соединяющие её с точками окружности. Таким образом, конус у Аполлония бесконечен в обе сто-

роны.

Затем Аполлоний определяет диаметр кривой как прямую, делящую пополам каждую из всех хорд, имеющих заданное направление. Сами эти параллельные хорды он называет *ординатами*.[5] Сопряжённые диаметры — это два диаметра, каждый из которых делит пополам хорды, параллельные другому. Ось — это диаметр, делящий пополам перпендикулярные ему хорды.

Осью (наклонного) конуса Аполлоний называет прямую, соединяющую его вершину с центром его основания. Он доказывает, что все сечения плоскостями, параллельными плоскости основания, являются окружностями, и что есть ещё одно семейство параллельных сечений, являющихся окружностями. Затем Аполлоний изучает произвольные сечения конуса. И в этом уже очень существенное обобщение по сравнению с его предшественниками, рассматривавшими лишь такие сечения конуса, для которых конус и секущая плоскость имели общую плоскость симметрии. Аполлоний очень просто получает симптом конического сечения в этом общем случае. Пусть плоскость пересекает основание конуса с вершиной S по некоторому отрезку. Проведём диаметр PQ основания, перпендикулярный этому отрезку, и через этот диаметр и вершину конуса проведём плоскость (рис. 2.67). Эта плоскость пересекает коническое сечение в точках A и B. Через произвольную точку X конического сечения проведём плоскость, параллельную плоскости основания. Она пересечёт конус по некоторой окружности. Плоскость SPQ пересекает эту окружность по диаметру CD, параллельному PQ. Секущая плоскость пересекает новую окружность по отрезку XX', перпендикулярному CD, поэтому середина E отрезка XX' лежит на CD. При этом $XE^2 = CE \cdot ED$. Проведём через вершину конуса прямую, параллельную AB. Она пересекает прямую PQ в некоторой точке F. Из подобия треугольников получаем: $\frac{EC}{EB} = \frac{FP}{FS}$

[5]Конечно, слово «ордината» не греческое, а латинское. Имеется в виду не термин самого Аполлония, а последующий перевод этого термина на латинский язык. Но вошедший во все языки термин «ордината» берёт начало именно отсюда.

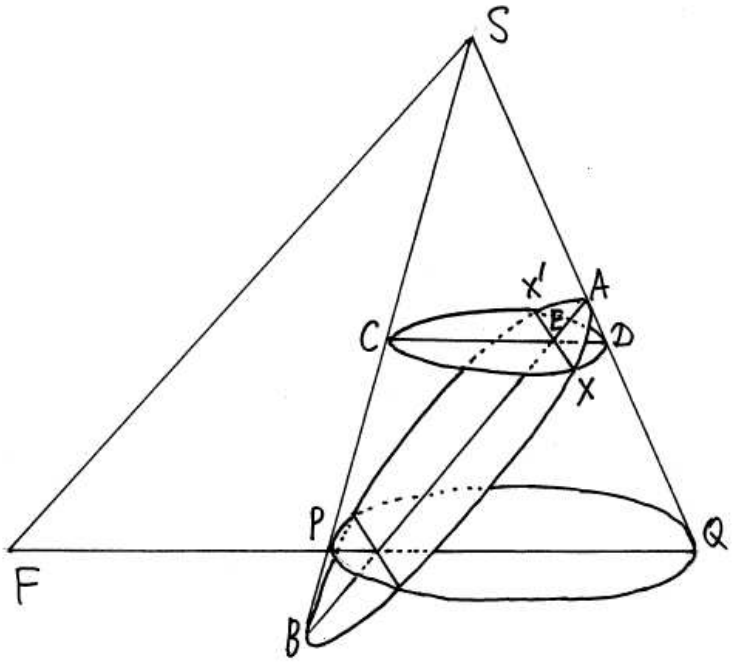

Рис. 2.67.

и $\frac{ED}{EA} = \frac{FQ}{FS}$, следовательно,

$$\frac{XE^2}{EA \cdot EB} = \frac{EC \cdot ED}{EA \cdot EB} = \frac{FP \cdot FQ}{FS^2} = \alpha.$$

Это и есть искомый симптом: если обозначить длину отрезка EX через y, а длины отрезков AE и BE через x и x_1 (рис. 2.68), то симптом записывается в виде $y^2 = \alpha x x_1$. Симтомы такого же вида получали и до Аполлония, но в частном случае, когда хорда XX' перпендикулярна диаметру AB, делящему её пополам. Другими словами, до Аполлония симптом получали только в прямоугольной системе координат, а Аполлоний получил симптом и в косоугольной системе координат.

Отрезки AE и BE называли *абсциссами* от латинского abscissus — отрезанный. Терминология и общая схема системы координат здесь видны отчётливо. Но это не была система координат в современном понимании. Прежде всего, она применялась только к вполне конкретной задаче и не могла быть отделена от конических сечений. Древнегреческие геометры не пытались даже записать уравнение прямой[6] в

[6]У Апполония было утверждение, которое можно рассматривать как запись уравнения прямой в некоторой системе координат, но оно было получено как частный случай общей задачи, не имеющей отношения к системе координат.

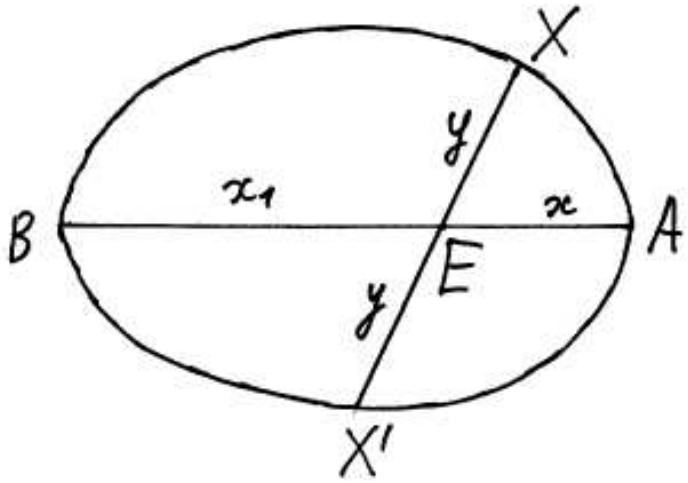

Рис. 2.68.

координатах, а уж про представление кривых степени выше двух не могло быть и речи.

Аполлоний приводит симптом эллипса к новому виду, воспользовавшись тем, что $x + x_1 = a$, где $a = AB$ — постоянный отрезок. Таким образом, $y^2 = \alpha x(a - x) = x(p - \alpha x)$. Аналогично для гиперболы получаем $y^2 = x(p + \alpha x)$, а для параболы $y^2 = px$. Для эллипса прямоугольник $x \times (p - \alpha x)$ отличается от прямоугольника $p \times x$ недостатком $x \times \alpha x$, для гиперболы прямоугольник $x \times (p + \alpha x)$ отличается от прямоугольника $p \times x$ избытком $x \times \alpha x$. Названия парабола, эллипс и гипербола произошли от греческих слов «приложение», «недостаток» и «избыток».

В этой книге Аполлоний вводит также центр конического сечения и сопряжённые диаметры.

2.19.2. Книга II

Вторая книга рассматривает диаметры, главные оси, асимптоты и необходимое для так называемых *диоризмов* — т.е. выяснения, когда какое-либо построение возможно или нет. Аполлоний показывает, что относительно асимптот гипербола задаётся уравнением $xy = \text{const}$.

2.19.3. Книга III

В предисловии к «Коническим сечениям» Аполлоний говорит, что предложения книги III могут быть использованы для окончательного решения задачи о геометрических местах к трём или четырём прямым, для которой у Евклида нет полного решения. Речь идёт о следующей задаче: определить геометрическое место точек, расстояния x, y, z и t от которых до четырёх данных прямых удовлетворяют соотношению $xy = \alpha zt$ (если две последние прямые совпадают, то получается геометрическое место к трём прямым). Впоследствии эта задача послужила Ферма и Декарту стимулом для введения системы координат на плоскости. Аполлоний не приводит решения этой задачи, но предложений книги III действительно для этого вполне достаточно.

В третьей книге Аполлоний разрабатывает теорию полюсов и поляр.

2.19.4. Книга IV

В четвёртой книге изучается, во скольких точках конические сечения могут пересекать друг друга или окружность. Здесь новое по сравнению с предшественниками — рассмотрение двух ветвей гиперболы.

2.19.5. Книга V

В пятой книге рассматривается задача о том, как из данной точки провести наибольший или наименьший отрезок к коническому сечению. Аполлоний находит все нормали к конике, проходящие через данную точку, и выясняет, при каком положении точки задача имеет два, три или четыре решения. Аполлоний берёт точку на главной оси коники, проводит через эту точку перпендикуляр к оси и находит на этом перпендикуляре точку, при переходе через которую число нормалей меняется с двух на четыре. Эти рассуждения фактически позволяют описать эволюту коники (т.е. огибающую семейства нормалей).

2.19.6. Книга VI

В шестой книге рассматривается равенство и подобие конических сечений.

2.19.7. Книги VII и VIII

В седьмой книге рассматривались предложения, необходимые для диоризмов, а в восьмой (до нашего времени не сохранившейся) — задачи, к которым относятся эти диоризмы. В седьмой книге Аполлоний, в частности, доказывает, что для эллипса сумма квадратов двух сопряжённых диаметров равна сумме квадратов главных осей, и что площадь параллелограмма, двумя сторонами которого служат половины сопряжённых диаметров, равна площади прямоугольника, двумя сторонами которого служат половины главных осей. Знаменитый английский астроном Эдмунд Галлей попытался восстановить утерянную восьмую книгу трактата Аполлония.

2.19.8. Другие сочинения Аполлония

Многие сочинения Аполлония не сохранились, и о них известно только из упоминаний о них в других трактатах древнегреческих геометров, в основном, в геометрическом «Собрании» Паппа. Там, в частности, упоминается о знаменитой задаче Аполлония о построении окружности, касающейся трёх данных окружностей, и о трактате, в котором Аполлоний исследовал, какие вставки можно выполнить с помощью конических сечений, а какие нельзя. Папп довольно подробно рассказывает о сочинении Аполлония «О плоских геометрических местах» в двух книгах (плоские геометрические места — это прямые и окружности). В первой книге Аполлоний рассматривает некоторый класс преобразований, которые переводят окружности и прямые в окружности и прямые, в частности, он рассматривает инверсию относительно точки. Аполлоний приводит также утверждение, эквивалентное тому, что уравнение $x + ay = c$ задаёт прямую (точнее говоря, часть прямой, потому что все числа рассматриваются как отрезки, т.е. они

положительны). Но это утверждение нельзя рассматривать как вывод уравнения прямой в системе координат. Аполлония интересует совсем другое. Пусть дано n прямых и n отрезков $a_1, \ldots, a_n$ и пусть $x_1, \ldots, x_n$ — расстояния от точки до данных прямых, тогда геометрическое место точек, для которых $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = a_{k+1}x_{k+1} + \cdots + a_nx_n$, представляет собой прямую. (Папп приводит формулировку утверждения Аполлония только при $n = 3$ и говорит, что для нескольких прямых всё аналогчино.) Во второй книге содержалась теорема об *окружности Аполлония*: геометрическое место точек X, для которых $AX : XB = \text{const}$ — окружность. (Это утверждение встречается в сочинении Аристотеля «Метеорологика», но нет уверенности, что это не позднейшая вставка.) Там же содержадась теорема о том, что геометрические места точек, для которых $AX^2 = a^2 + mBX^2$ или $\alpha AX^2 + \beta BX^2 + \gamma CX^2 + \cdots = \text{const}$, — окружности.

В предисловии к так называемой книге XIV «Начал» Евклида (принадлежащей Гипсиклу) говорится, что Аполлоний написал трактат о сравнении икосаэдра и додекаэдра, вписанных в одну сферу. Там он доказал, что площади поверхностей этих многогранников относятся как их объёмы. Доказательство было основано на том, что расстояния от центра сферы до граней икосаэдра и додекаэдра равны, т.е. многограники описаны вокруг одной и той же сферы.

2.20. Зенодор (ок. 200-140 до н. э.)

Зенодор написал трактат «Об изопериметрических фигурах», не сохранившийся до нашего времени. О содержании этого трактата сообщают Теон Александрийский и Папп. Зенодор доказал, что из всех многоугольников с заданным числом сторон и заданным периметром наибольшую площадь имеет правильный многоугольник. Он доказал также, что площадь круга больше, чем площадь любого многоугольника с тем же периметром; это доказательство использует теорему Архимеда о том, что площадь круга равна половине площади прямоугольника, смежные стороны которого — периметр круга и его радиус. Зенодор

занимался и стереометрическими задачами. Он утверждал, что сфера имеет наибольшую площадь среди всех фигур, ограничивающих заданный объём, но доказал это только в том случае, когда фигура — правильный многогранник.

2.21. Гипсикл Александрийский (ок. 190-120 до н. э.)

Гипсикл написал небольшое сочинение о правильных многогранниках, который обычно включают в современные издания «Начал» Евклида в качестве книги XIV. В этом сочинении Гипсикл сравнивает поверхности и объёмы додекаэдра и икосаэдра, вписанных в один и тот же шар. На эту тему написал сочинение Аполлоний, которое обсуждали отец Гипсикла со своим другом и решили, что доказательства Аполлония неудовлетворительны. Они нашли свои доказательства, и Гипсикл излагает эти доказательства. Вслед за Аполлонием он доказывает, что если додекаэдр и икосаэдр вписаны в один и тот же шар, то расстояние от центра шара до грани икосаэдра равно расстоянию от центра шара до грани додекаэдра, и выводит из этого, что отношение объёма додекаэдра к объёму икосаэдра равно отношению поверхности додекаэдра к поверхности икосаэдра.

Гипсикл также дал общее определение многоугольных чисел. Мы начинаем с 1 и увеличиваем слагаемые на общую разность. Если общая разность равна 1, то получаем треугольные числа, если общая разность равна 2, то получаем квадратные числа, если общая разность равна 3, то получаем пятиугольные числа. Например, третье пятиугольное число равно $1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 3)$. В современных обозначениях n-е m-угольное число равно $\frac{n[2+(n-1)(m-2)]}{2}$.

2.22. Герон Александрийский (ок. 10-75)

Герон очень много писал о различных областях математики и физики; его сохранившиеся до нашего времени сочинения занимают 5 томов. Практические вопросы интересовали его гораздо больше, чем теоре-

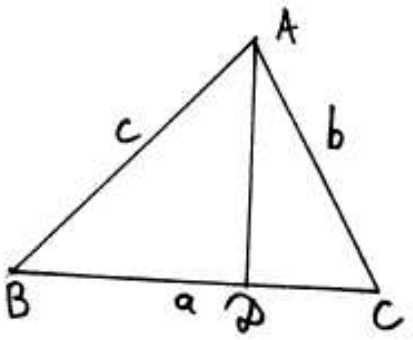

Рис. 2.69.

тические. Его основные трактаты по математике — «Метрика» и «Диоптра».

В книге I трактата «Метрика» обсуждаются площади треугольников, четырёхугольников, правильных многоугольников, эллипса, сегмента параболы, а также площади поверхности пространственных фигур (цилиндра, конуса, сферы и сектора сферы). В предисловии говорится, что впервые геометрия возникла из практических потребностей измерения и распределения земли (откуда и происходит её название), а уже потом возникла потребность измерения пространственных фигур. Именно в книге I доказана *формула Герона*. Как мы уже упоминали (см. с. 111) эта формула была доказана Архимедом задолго до Герона, но доказательство Герона отличается от доказательства Архимеда. Герон приводит два способа вычисления площади треугольника, стороны которого известны. Первый из них непосредственно основан на предложениях II, 12 и 13 Евклида (см. с. 76). С помощью этих предложений можно вычислить отрезки BH и CH, где AH — высота треугольника ABC (рис. 2.69). Действительно, $c^2 = a^2 + b^2 \mp 2a \cdot CH$, поэтому $CH = \pm\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$. Затем по теореме Пифагора можно вычислить высоту $AH = \sqrt{b^2 - CH^2}$ и, наконец, площадь треугольника. В качестве примеров Герон приводит остроугольный треугольник со сторонами 14, 15 и 13 и тупоугольный треугольник со сторонами 11, 13 и 20. Высота в обоих случаях равна 12 (эти треугольники составлены из пифогоровых треугольников, рис. 2.70).

Второй способ вычисления площади треугольника, стороны кото-

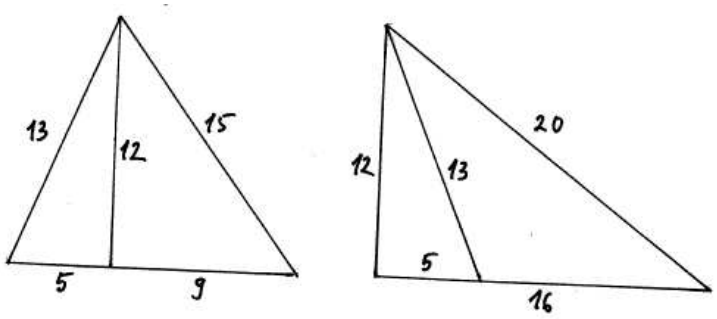

Рис. 2.70.

рого известны, — это и есть собственно формула Герона: $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, где p — полупериметр. Герон приводит доказательство этой формулы не только в книге «Метрика», но и в книге «Диоптра». Впишем в треугольник ABC окружность с центром H, которая касается его сторон AB, BC и AC в точках D, E и F (рис. 2.71). Площадь S треугольника ABC равна сумме площадей треугольников AHB, BHC и CHA, поэтому $S = pr$, где p — полупериметр треугольника ABC, r — радиус вписанной в него окружности. Отложим на луче CB точку G так, что $CG = p$. Тогда $BG = AD$. В результате получаем $S^2 = (pr)^2 = CG^2 \cdot EH^2$. Рассмотрим теперь точку L, в которой пересекаются перпендикуляры, восставленные в точках B и H к прямым BC и HC соответственно. Точки B и H лежат на окружности с диаметром CL, поэтому

$$\angle CHB + \angle CLB = 180^\circ. \tag{1}$$

Выделим теперь пары равных углов: BHE и BHD, CHE и CHF, AHD и AHF. Сумма всех этих углов равна 360°, поэтому

$$\angle CHB + \angle AHD = 180^\circ. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) легко видеть, что углы AHD и CLB равны. Следовательно, прямоугольные треугольники AHD и CLB подобны. Поэтому $BC : BL = AD : DH = BG : HE$, а значит, $BC : BG = BL : HE$.

Из подобия треугольников BLK и EHK получаем $BL : HE = BK : KE$. Из двух последних пропорций следует, что $BC : BG =$

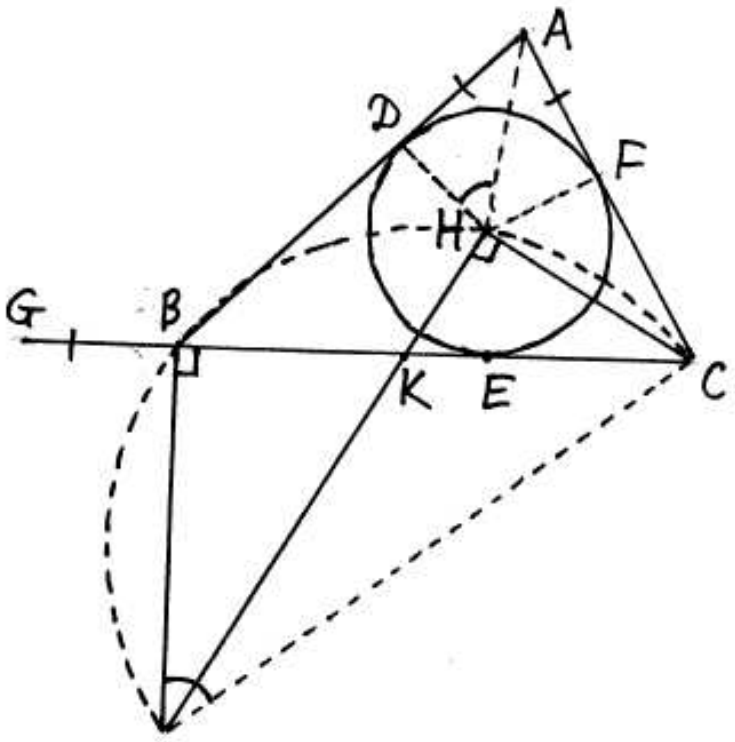

Рис. 2.71.

$BK : KE$, или $(BC + BG) : BG = (BK + KE) : KE$, т.е. $CG : BG = BE : KE$. Поэтому $CG^2 : (CG \cdot BG) = (BE \cdot EC) : (KE \cdot EC)$, или $CG^2 = ((BE \cdot EC) : (KE \cdot EC))(CG \cdot BG)$.

Треугольник KCH прямоугольный, поэтому $KE \cdot EC = HE^2$. В итоге получаем $S^2 = CG^2 \cdot HE^2 = CG \cdot BG \cdot BE \cdot EC = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Современнику Герона трудно было понять смысл соотношения $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. В то время геометры знали, что произведение двух отрезков — это площадь, произведение трёх отрезков — объём. А что же такое произведение четырёх отрезков? И даже в гораздо более позднюю эпоху Папп Александрийский неодобрительно писал, что некоторые авторы позволяют себе говорить о прямоугольнике, умноженном на прямоугольник, не объясняя толком, что же они под этим понимают.

Герон рассматривал и другие задачи, недопустимые с точки зрения многих его современников: он допускал сложение площади и периметра, а такого разработанная Евдоксом и Евклидом теория не допус-

кала. У Герона встречается, например, такая задача: «Дан квадрат, сумма площади и периметра которого равна 896; отделить площадь от периметра.»

Герон, конечно, понимал, что оба его способа вычисления площади треугольника с заданными сторонами эквивалентны. Но ему не удалось вывести формулу Герона непосредственно из формулы для длины отрезка CH. Не удалось это и Архимеду. Это является ярким свидетельством того, сколь неудобна и громоздка была геометрическая алгебра. Первым такой вывод формулы Герона получил Ньютон и привёл его в книге «Всеобщая арифметика». К тому времени более удобная техника алгебраических преобразований заменила геометрическую алгебру, что и позволило получить такое доказательство.

В связи с вычислением площади треугольника со сторонами 7, 8, 9 (она равна $\sqrt{720}$) Герон приводит следующее правило приближённого вычисления квадратных корней из натуральных чисел. Пусть a^2 — ближайший квадрат к целому числу A. В качестве первого приближения к $\sqrt{A}$ берём $a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$, в качестве второго $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right)$, и т.д.

Для круга Герон использует приближение Архимеда для числа π, т.е. $\frac{22}{7}$. Он считает, что длина окружности равна $\frac{44}{7}r$, а площадь круга равна $\frac{11}{14}d^2$, где r — радиус, а d — диаметр круга. Герон пишет, что древние использовали для площади сегмента круга приближение $\frac{1}{2}(b+h)h$, где b — основание сегмента, h — его высота. Это, по его мнению, соответствует приближённому значению 3 для числа π, поскольку для полукруга тогда получается точная формула. Те же, кто исследовал площади более тщательно, добавляли к этой формуле $\frac{1}{14}\left(\frac{1}{2}b^2\right)$, т.е. использовали формулу $\frac{1}{2}(b+h)h + \frac{1}{14}\left(\frac{1}{2}b^2\right)$, которая даёт для площади полукруга точное значение, если считать, что $\pi = \frac{22}{7}$.

В книге II обсуждаются объёмы различных трёхмерных тел: усечённой пирамиды, конуса, сферы, сегмента сферы. Герон рассматривает и другие тела, например, тор. Он вычисляет также объёмы правильных многогранников.

Книга III посвящена делению площадей и объёмов в данном отно-

шении. В этой книге Герон приводит также способ вычисления кубических корней.

Трактат «Диоптра» начинается с подробного описания прибора для измерения углов и определения направлений, который как раз и назывался *диоптра*. Сам трактат посвящён измерению высот и расстояний и другим измерениям. В «Диоптре» Герон рассказывает, в частности, о задаче восстановления границ земельных участков, размытых при разливе Нила.

В трактате «Механика» Герон доказывает, что скорости складываются по правилу параллелограмма.

Среди многочисленных комментариев Герона к «Началам» Евклида интересны те новые доказательства, которые позволяют избегать применение метода от противного.

2.23. Менелай Александрийский (70-130)

Из многочисленных книг астронома и математика Менелая сохранилась (в арабском переводе) только «Сферика». В этой книге рассматриваются сферические треугольники и их приложения в астрономии. Менелай первым дал определение сферического треугольника как фигуры, ограниченной дугами больши́х окружностей. Для сферических треугольников Менелай доказывает теорему, аналог которой для треугольников на плоскости впоследствии стали называть *теоремой Менелая*. (Для треугольников на плоскости эта теорема, по-видимому, была известна до Менелая.) Менелай доказывает, что для сферического треугольника существуют вписанная окружность и описанная окружность.

Менелай избегал доказательств от противного. Евклид доказал предложение I, 25 (если стороны AB и AC треугольника ABC фиксированы, то сторона BC возрастает при возрастании угла A) методом от противного. Менелай предложил прямое доказательство этого предложения.

2.24. Клавдий Птолемей (85-165)

Самая знаменитая книга Птолемея — «Математическое собрание», вскоре получившая название «Величайшее собрание», которое было переводено на арабский язык, и эта книга стала называться «Альмагест». В этой книге дана подробное описание движения Солнца, Луны и планет с помощью так называемых эпициклов, т.е. комбинаций движений по окружности. Эта книга оставалась непревзойдённой до появления гелиоцентрической теории Коперника.

В Древней Греции тригонометрические методы были основаны на сопоставлении каждому центральному углу длины хорды, на которую он опирается. Эта функция тесно связана с синусом: для окружности радиуса 1 длина хорды равна удвоенному синусу половинного угла. Для длины хорды Птолемей вывел формулы, аналогичные формулам для синуса суммы и разности двух углов и для синуса половинного угла. Для вывода формулы синуса суммы и разности двух углов Птолемей использовал теорему о вписанном четырёхугольнике (так называемую *теорему Птолемея*), которая была известна ещё Архимеду.

Для составления таблицы хорд Птолемей вычислил сторону правильного пятиугольника и сторону правильного десятиугольника, т.е. фактически он вычислил $\sin 36^\circ$ и $\sin 18^\circ$.

Птолемею не были известны тригонометрические формулы, справедливые для любых треугольников. При работе с остроугольными или тупоугольными треугольниками он разбивал их на прямоугольные. Но ему были знакомы тригонометрические формулы не только для прямоугольного треугольника на плоскости, но и для сферического прямоугольного треугольника.

Птолемей рассматривал стереографическую проекцию и доказал, что при стереографической проекции сохраняются углы.

2.25. Диофант Александрийский (200-284)

Наиболее важное сочинение Диофанта — «Арифметика» в тринадцати книгах, из которых сохранились лишь шесть. «Арифметика» — это сборник, состоящий из 189 тщательно подобранных задач, снабжённых решениями. Эти задачи иллюстрируют определённые методы, которые не формулируются в общем виде, но вполне ясны из решения однотипных задач.

Сохранился также фрагмент трактата Диофанта «О многоугольных числах».

Диофант допускает не только целые, но и рациональные решения; иррациональные и отрицательные решения он исключает. Ситуации, когда из меньшего числа вычитается большее, Диофант исключает. Но в промежуточных выкладках Диофант использует отрицательные числа; он даже сформулировал правило знаков для умножения положительных и отрицательных чисел.

У Диофанта впервые появляется буквенная символика алгебры, он использует некоторые сокращения для часто встречающихся величин и операций. Диофант использует обозначения, соответствующие нашим степеням неизвестной x^2, x^3, x^4 (квадратоквадрат), x^5 (квадратокуб) и x^6 (кубокуб). Дальше шестой степени он не идёт. Диофант использует также отрицательные степени. Знаки для операций умножения и деления Диофанту были не нужны, сложение обозначалось путём записывания подряд соответствующих членов. Специальный знак Диофант использовал только для вычитания.

Диофант не соблюдает требования однородности складываемых величин: он может складывать сторону и площадь, т.е. он трактует их как числа, а не как геометрические величины. Напомним, что Герон тоже рассматривал такие задачи.

Диофант рассматривал только положительные значения квадратного корня, но трудно поверить в то, что он не знал, что квадратное уравнение может иметь два положительных корня.

Диофант не обсуждает решение уравнения вида $ax + by = c$. Для

этого уравнения интерес представляет только решение в целых числах, но Диофанта интресовало только решение уравнений в рациональных числах.

При решении неопределённых квадратных уравнений Диофант получает, говоря на современном языке, *рациональную параметризацию коники*. Он показывает, что если уравение $ax^2 + bx + c = y^2$ (с рациональными коэффициентами) имеет одно рациональное решение (x_0, y_0), то оно имеет бесконечно много решений. Диофант рассматривает только уравнение $ax^2 - c = y^2$, но его метод годится и в общем случае. Он ищет решение вида $(x_0 + t, y_0 - kt)$. Подставляя $x = x_0 + t$ и $y = y_0 - kt$ в уравнение $ax^2 - c = y^2$ и учитывая, что $ax_0^2 - c = y_0^2$, получаем $2ax_0t + at^2 = -2y_0kt + k^2t^2$, т.е. $t = 2\frac{ax_0+ky_0}{k^2-a}$. Для каждого рационального k мы получаем рациональное решение $(x_0 + t, y_0 - kt)$, где $t = 2\frac{ax_0+ky_0}{k^2-a}$.

Если через две рациональные точки кубической кривой, заданной уравнением с рациональными коэффициентами, провести прямую, то третья точка, в которой эта прямая пересекает кривую, тоже рациональная. Две точки могут при этом сливаться в одну, т.е. касательная к кубической кривой в рациональной точке пересекает кривую в рациональной точке. Это даёт способ нахождения новых рациональных решений кубического уравнения с двумя неизвестными по ранее найденным решениям. Диофант приводит задачи, решаемые фактически таким способом. При этом используется как проведение касательной, так и проведение секущей (но секущая проводится через бесконечно удалённую точку; в этом случае вычисления более простые, чем в случае, когда секущая проходит через две конечные рациональные точки). Попутно Диофант фактически получает для кубической кривой алгебраический способ нахождения углового коэффициента касательной, т.е. производной.

Диофант решает также следующую задачу: найти четыре разных пифагоровых треугольника с общей гипотенузой. Решение основано на использовании тождества $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$. Если $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$ и $d = 3$, то мы получаем 4 представления

числа 65 в виде суммы двух квадратов. Диофант не записывает это тождество; в явном виде впервые оно встречается у Фибоначчи.

2.26. Папп Александрийский (290-350)

2.26.1. Биография

Папп Александрийский был последним выдающимся геометром александрийской школы. А первая книга по геометрии, в которой появилось много новых по сравнению с древнегреческой математикой идей, начинается как раз с обсуждения одной из задач Паппа. Эта книга называется «Геометрия». Она была опубликована в приложении к философскому трактату Рене Декарта «Рассуждение о методе» в качестве образца применения этого разработанного им метода. (Правда, Декарт сначала написал «Геометрию», а потом уже «Рассуждение о методе».) Декарт внимательно изучил сочинения Паппа и высоко их ценил. В трактате «Правила для руководства ума» он писал:

«. . . Но я убежден, что какие-то первые семена истин, которые присущи человеческим умам от природы и которые мы в себе заглушаем, ежедневно читая и слыша о стольких различных заблуждениях, обладали в той безыскусной и незатейливой древности такою силой, что благодаря тому свету ума, при посредстве которого люди видели, что следует предпочитать добродетель удовольствию, а честное — полезному, даже если они и не знали, почему это обстояло именно так, они также познали истинные идеи философии и математики, хотя и не могли ещё овладеть в совершенстве самими науками. И мне по крайней мере кажется, что какие-то следы этой истинной математики обнаруживаются у Паппа и Диофанта, которые жили пусть и не в самую раннюю эпоху, но всё же за много веков до нашего времени.»

О жизни Паппа почти ничего не известно. Сохранились лишь некоторые сведения о том, когда именно он жил. Например, он наблюдал солнечное затмение и описал его; это солнечное затмение относят к 320 г. н. э. Это не очень хорошо согласуется к комментарием Теона

Александрийского[7], который в хронологических таблицах напротив имени Диоклетиана отметил: «В его эпоху писал Папп». Диоклетиан был провозглашен римским императором в 284 г., а в 305 г. он сложил с себя полномочия в соответствии с заранее принятым им решением.

Основное сочинение Паппа — «Математическое собрание» ($Synag\bar{o}g\bar{e}$), состоящее из 8 книг. В них он собрал всё, что нашёл интересного в трудах своих предшественников, присоединив к этому и свои находки. Книга I и первая половина книги II утеряны. В книге III разбирается задача о построении двух средних пропорциональных и средних (арифметического, геометрического, гармонического и других) двух отрезков; в ней также показано, как правильные многогранники можно вписать в сферу. Книга IV начинается несколькими теоремами планиметрии, а последняя её часть посвящена различным кривым, в том числе спирали Архимеда, конхоиде Никомеда и квадратрисе Диностра-та. Именно в этой книге Папп приводит свою классификацию кривых (см. с. 21). В предисловии к книге V Папп пишет о мудрости пчёл. Плоскость можно замостить лишь тремя видами одинаковых правильных многоугольников: треугольниками, квадаратми и шестиугольниками, и мудрые пчёлы выбрали для своих сот фигуру с наибольшим числом углов, потому что такая фигура может вмесить больше мёда при том же самом расходе воска. После этого Папп обращается к различным изопериметрическим задачам, поначалу следуя Зенодору. К изопериметрическим теоремам Зенодора Папп добавил такую: среди всех сегментов круга, имеющих заданный периметр, наибольшую площадь имеет полукруг. Папп не смог доказать, что среди всех тел с данной площадью поверхности наибольший объём имеет шар, но он доказал, что объём шара больше объёма любого правильного многогранника с такой же площадью поверхности. Кроме того, в книге V

[7] Теон Александрийский — отец знаменитой Ипатии, последнего математика александрийской школы. Она была обаятельна и красноречива, писала комментарии к трудам Диофанта и Аполлония. В Александрии Ипатия была профессором платоновской философии. Она дружила со многими христианами, но оставалась верна традициям классического (языческого) эллинизма. В христианской общине распространился слух, будто она восстановила римского префекта Ореста против епископа Кирилла. Из-за этого слуха в 418 г. н. э. толпа христианской черни убила Ипатию острыми черепками, растерзала её тело на куски и сожгла. После Ипатии с великой александрийской математической школой было покончено. Последняя сохранившаяся в Александрии библиотека была разгромлена за несколько лет до убийства Ипатии.

Папп обсуждает 13 полуправильных многогранников, открытых Архимедом. В книге VI Папп обсуждает трактаты других авторов по астрономии. В книге VII Папп обсуждает сочинения Евклида, Аполлония и Аристея с точки зрения *анализа* и *синтеза*: при анализе мы предполагаем уже известным то, что нужно доказать, и смотрим, из чего это следует, пока не дойдём до чего-нибудь уже действительно известного или до основополагающих принципов; при синтезе мы движемся в противоположном направлении. В книге VII Папп вводит двойное отношение четырёх точек и доказывает его инвариантность при проекциях; в этой же книге он вводит полюс и поляру относительно окружности. Книга VIII посвящена механике, но там встречается много чисто математических задач и теорем. В частности, Папп строит коническое сечение по пяти точкам; строит оси конического сечения по двум сопряжённым диаметрам.

Многие теоремы из «Математического собрания» Паппа стали широко известны лишь после того, как их заново открыли знаменитые ученые. Это относится к теореме Гюльдена об объёме тела вращения и к теореме Дезарга. И если теорему Гюльдена часто называют теоремой Паппа–Гюльдена, то теорему Дезарга никогда не называют теоремой Паппа–Дезарга. Более того, говоря о тех, кто заложил основы проективной геометрии, про Паппа часто забывают, хотя именно в его «Математическом собрании» впервые появились все основные теоремы проективной геометрии, в том числе и теорема о сохранении двойного отношения при проекциях.

Обсудим теперь более подробно некоторые из наиболее интересных теорем Паппа.

2.26.2. Обобщение теоремы Пифагора

В книге IV Папп доказывает обобщение теоремы Пифагора, которую он называет предложением I, 47 Евклида.

Пусть на сторонах AB и AC треугольника ABC построены произвольные параллелограммы $ABDE$ и $ACFG$. Пусть, далее, H — точка пересечения продолжений сторон DE и FG (рис. 2.72).

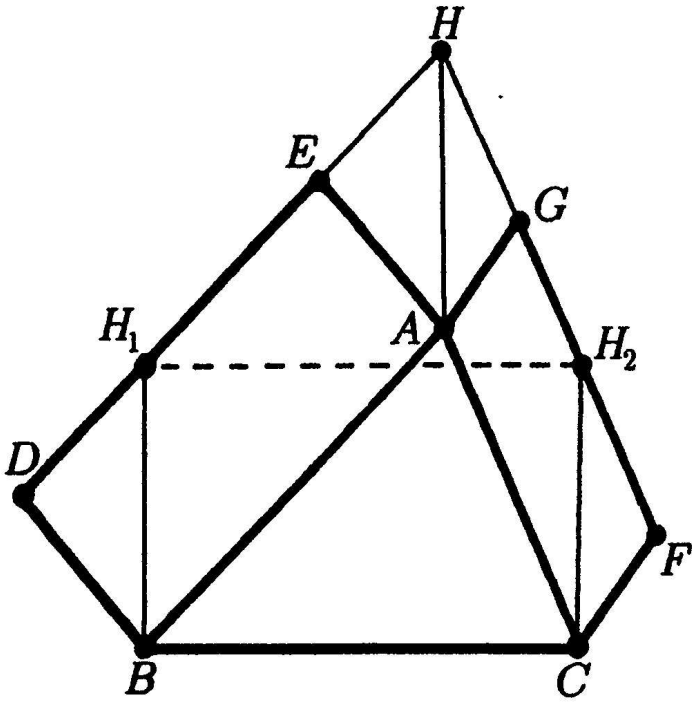

Рис. 2.72.

Тогда сумма площадей параллелограммов $ABDE$ и $ACFG$ равна площади параллелограмма, стороны которого равны и параллельны отрезкам BC и AH.

Доказательство. Параллелограммы $ABDE$ и $ACFG$ можно заменить на параллелограммы ABH_1H и ACH_2H, не меняя при этом их площадь. Ясно также, что сумма площадей двух новых параллелограммов равна площади параллелограмма BCH_2H_1,

2.26.3. Окружности, вписанные в арбелон

В книге IV Папп рассказывает также и о двух теоремах об окружностях, вписанных в арбелон. Папп не называет автора этих теорем, он просто пишет, что «в некоторых книгах приводится древнее предложение такого рода». Весьма вероятно, что автором этих теорем был Архимед.

Рассмотрим последовательность окружностей с центрами $O_1, O_2,$. вписанных в арбелон (рис. 2.73,а), и систему окружностей с центрами $O_1, O_2, \ldots,$ вписанных в фигуру, похожую на арбелон, но

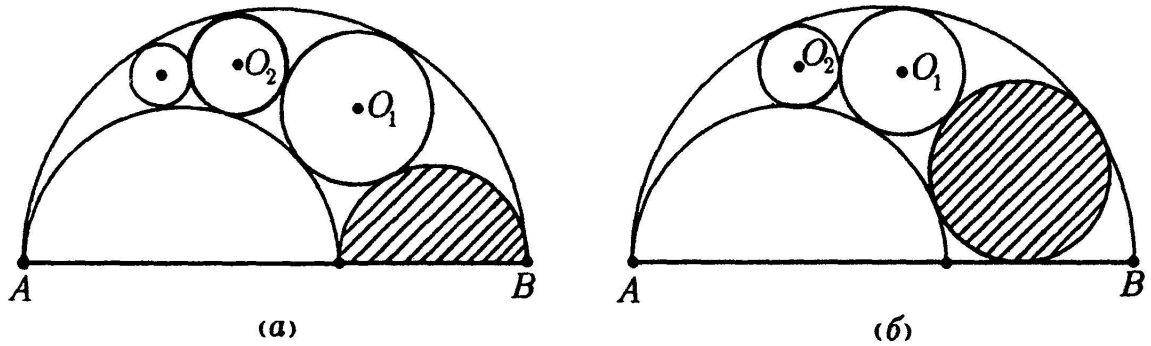

Рис. 2.73.

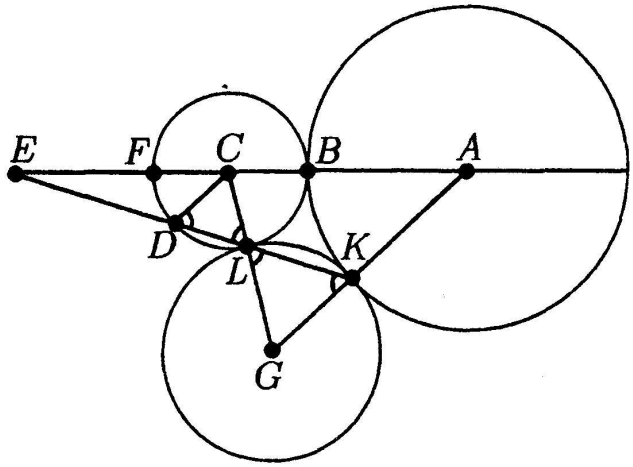

Рис. 2.74.

в которой вместо заштрихованного полукруга взят заштрихованный круг (рис. 2.73,б). Пусть p_k — расстояние от O_k до диаметра AB, d_k — диаметр окружности с центром O_k. Тогда

$$p_k = kd_k \quad \text{в случае (а)},$$

$$p_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) d_k \quad \text{в случае (б)}.$$

Мы обсудим лишь случай (а). Для тех, кто знаком с инверсией, отметим, что после инверсии с центром A оба утверждения (а) и (б) становятся очевидны.

Доказательство Паппа основано на следующих трёх леммах.

Лемма 1. *Для трёх попарно касающихся (внешним образом)*

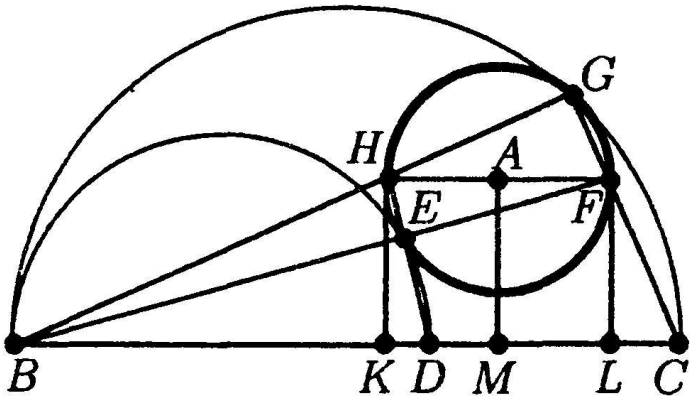

Рис. 2.75.

окружностей выполняются соотношения

$$AB : BC = AE : EC \text{ и } KE \cdot EL = EB^2$$

(рис. 2.74).

Доказательство. Так как $CD \parallel AG$, то

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{CD} = \frac{AE}{EC}.$$

Кроме того,

$$\frac{KE}{ED} = \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{CF} = \frac{AE - AB}{EC - CF} = \frac{BE}{BF}.$$

Следовательно,

$$\frac{KE \cdot EL}{EL \cdot ED} = \frac{BE^2}{BE \cdot BF}.$$

Но $EL \cdot ED = BE \cdot BF$, поэтому $KE \cdot EL = BE^2$.

Лемма 2. *Для окружности радиуса r с центром A, касающейся двух полуокружностей, выполняются следующие соотношения:*

$$\frac{BM}{r} = \frac{BC + BD}{BC - BD},\ BK \cdot LC = AM^2 \text{ (рис. 2.75).}$$

Доказательство. Из подобия пар треугольников BCG и BHK, BFL и BDE следует, что

$$BC \cdot BK = BH \cdot BG = BF \cdot BE = BD \cdot BL.$$

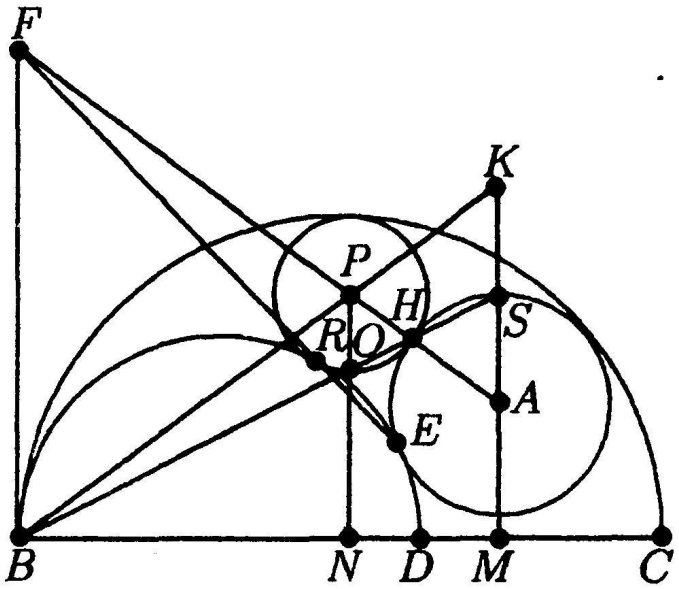

Рис. 2.76.

Поэтому

$$\frac{BC+BD}{BC-BD}=\frac{BL+BK}{BL-BK}=\frac{2BM}{KL}=\frac{BM}{r}.$$

Из подобия треугольников BHK и FCL следует, что

$$BK\cdot LC=KH\cdot FL=AM^2.$$

Лемма 3. *Две окружности с центрами A и P и диаметрами d и d' касаются друг друга и еще двух полуокружностей (рис. 2.76). Тогда*

$$\frac{AM+d}{d}=\frac{PN}{d'}.$$

Доказательство. Согласно лемме 2

$$\frac{BN}{PH}=\frac{BC+BD}{BC-BD}=\frac{BM}{AH}.$$

Пусть F — точка пересечения прямых AP и RE. Согласно лемме 1

$$\frac{FA}{FP}=\frac{AH}{PH}=\frac{BM}{BN}.$$

Поэтому точка F лежит на касательной к полуокружности, проходящей через точку B.

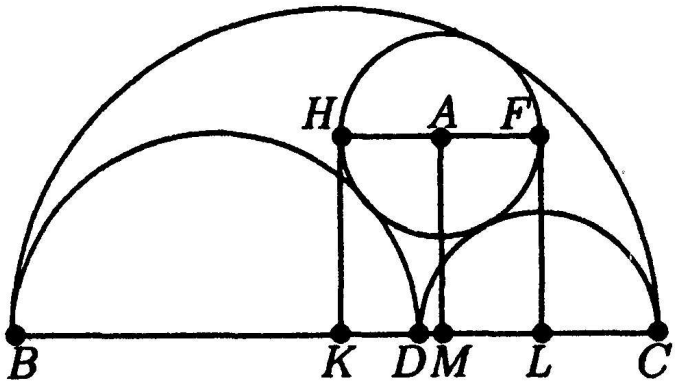

Рис. 2.77.

Согласно лемме 1

$$FH^2 = FE \cdot FR = FB^2, \text{ т. е. } FH = FB.$$

Из этого, в частности, следует, что точки O и S, в которых прямая BH пересекает перпендикуляры PN и AM, лежат на окружностях с центрами P и A соответственно. Поэтому

$$\frac{KS}{PO} = \frac{BK}{BP} = \frac{BM}{BN} = \frac{FA}{FP} = \frac{AH}{PH} = \frac{AS}{PO}.$$

т. е. $KS = AS$, а значит, $KA = d$.

Ясно также, что

$$\frac{MK}{KS} = \frac{PN}{PO}, \text{ т. е. } \frac{AM + d}{\frac{1}{2}d} = \frac{PN}{\frac{1}{2}d'},$$

что и требовалось.

Теперь уже можно доказать основное утверждение. Из леммы 3 следует, что

$$\frac{p_{k+1}}{d_{k+1}} = \frac{p_k + d_k}{d_k} = \frac{p_k}{d_k} + 1.$$

Поэтому достаточно доказать, что $p_1 = d_1$, т. е. $AM = KL$ (рис. 2.77).

При доказательстве леммы 1 было получено соотношение $BC \cdot BK = BD \cdot BL$, из которого следует, что

$$\frac{CD}{BD} = \frac{BC - BD}{BD} = \frac{BL - BK}{BK} = \frac{KL}{BK}. \quad (1)$$

Точки B и C играют одинаковую роль, поэтому выполняется также и соотношение

$$\frac{BD}{CD} = \frac{KL}{CL}. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что $BK \cdot CL = KL^2$. С другой стороны, согласно лемме 2, $BK \cdot CL = AM^2$, а значит, $KL = AM$, что и требовалось.

2.26.4. Теорема Паппа–Гульдена

В книге VII, посвящённой анализу и синтезу, сформулирована следующая теорема Паппа (впоследствии переоткрытая Гульденом): объём тела, образованного при вращении плоской фигуры вокруг какой-либо лежащей в её плоскости прямой, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описанной при вращении её центром тяжести.

2.26.5. Теоремы Паппа и Дезарга

В книге VII Папп приводит леммы к сочинениям Аполлония и Евклида, многие из которых утеряны. Особенно интересны леммы Паппа к утерянной книге Евклида «Поризмы» (поризмы — это предложения, занимающее промежуточное положение между теоремами и построениями). Папп, в частности, отмечает, что несколько поризмов Евклида можно объединить в одно утверждение, а именно:

Пусть четыре прямые пересекаются в точках A, B, C, P, Q и R (рис. 2.78). Если точки A, B и C фиксированы, а точки P и Q движутся по фиксированным прямым, то точка R движется по фиксированной прямой.

Очевидно, что когда точки P и Q сливаются в одну точку, весь треугольник PQR тоже сливается в одну точку. Поэтому третья фиксированная прямая проходит через точку пересечения первых двух. (Справедливости ради следует отметить, что сам Папп этого очевидного замечания не делает.) Таким образом, взяв другую пару точек P_1 и Q_1, мы получим конфигурацию знаменитой теоремы Дезарга (рис. 2.79).

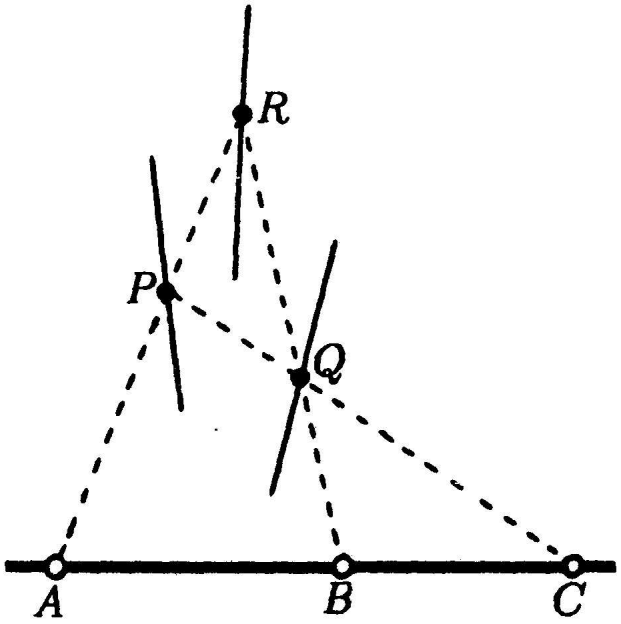

Рис. 2.78.

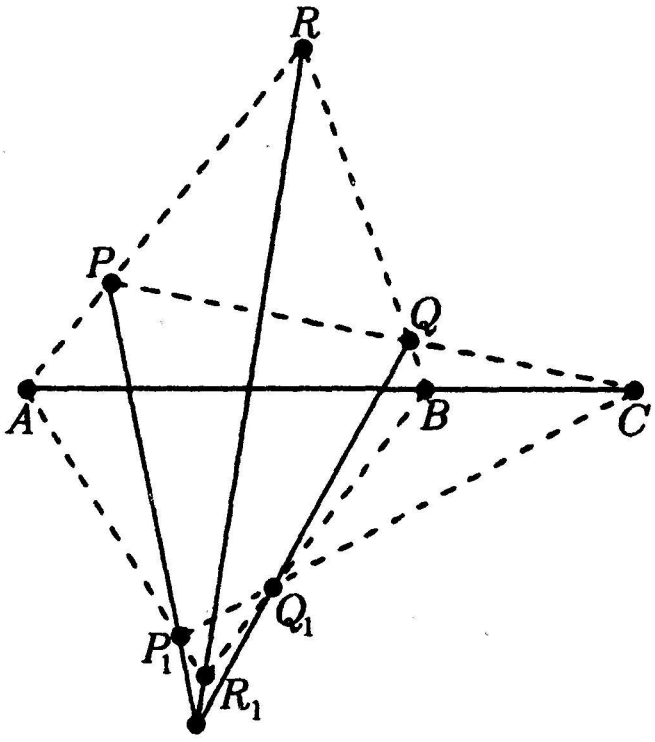

Рис. 2.79.

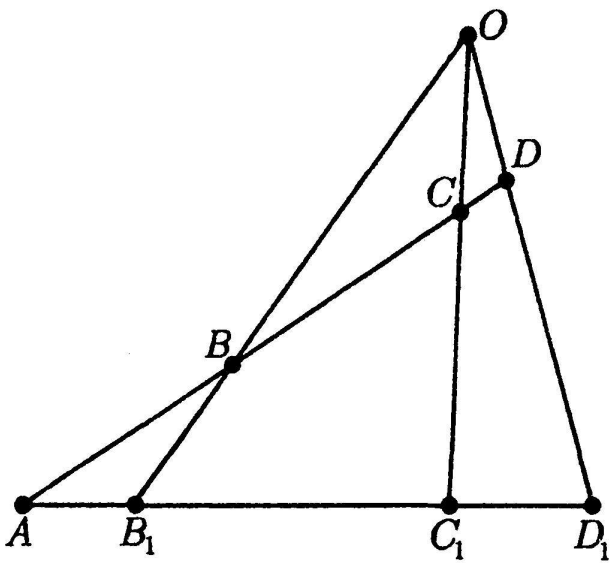

Рис. 2.80.

Полезным инструментом при доказательстве различных лемм Паппу служит утверждение о сохранении двойного отношения $\frac{AB\cdot DC}{AC\cdot DB}$ при проекциях одной прямой на другую, т. е.

$$\frac{AB\cdot DC}{AC\cdot DB}=\frac{AB_1\cdot D_1C_1}{AC_1\cdot D_1B_1} \tag{1}$$

(рис. 2.80). Папп рассматривает только частный случай сохранения двойного отношения, а именно, тот случай, когда точка A пересечения прямых сама участвует в двойном отношении. Но это не существенно. Дело в том, что если A' — произвольная точка прямой, на которой лежат точки A, B, C и D, то двойное отношение $\frac{A'B\cdot DC}{A'C\cdot DB}$ очевидным образом выражается через двойные отношения $\frac{AB\cdot DC}{AC\cdot DB}$ и $\frac{AB\cdot A'C}{AC\cdot A'B}$.

Соотношение (1) Папп доказывает следующим образом. Проведём через точку A прямые, параллельные прямым OD и OC. Они пересекут прямые OB и OD в точках K и L (рис. 2.81). Тогда

$$\frac{AB}{DB}=\frac{AK}{OD}\ \text{и}\ \frac{AB_1}{D_1B_1}=\frac{AK}{OD_1},$$

$$\frac{DC}{AC}=\frac{OD}{AL}\ \text{и}\ \frac{D_1C_1}{AC_1}=\frac{OD_1}{AL}.$$

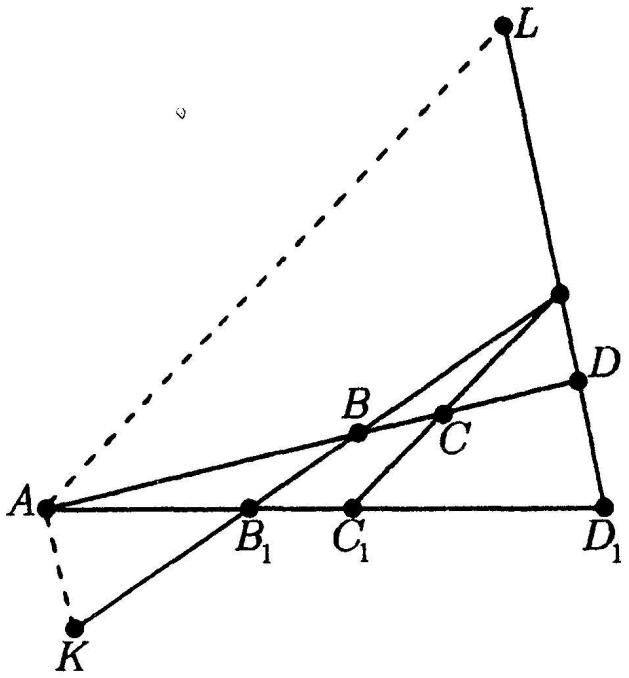

Рис. 2.81.

Поэтому

$$\frac{AB \cdot DC}{AC \cdot DB} = \frac{AK}{AL} = \frac{AB_1 \cdot D_1C_1}{AC_1 \cdot D_1B_1}.$$

С помощью утверждения о сохранении двойного отношения Папп доказывает свою знаменитую теорему:

Если на отрезках AB и DE взяты точки C и H и проведены прямые AH и CD, CE и BH, BD и AE, то их точки пересечения P, Q, R лежат на одной прямой (рис. 2.82).

2.26.6. Теорема о центре масс

Книга VIII посвящена в основном механике. Одна из наиболее интересных теорем этой книги следующая.

На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты точки D, E, F так, что

$$BD : DC = CE : EA = AF : FB.$$

Тогда центры масс треугольников ABC и DEF совпадают.

Папп приводит довольно длинное доказательство этой теоремы, опирающееся на теорему Менелая.

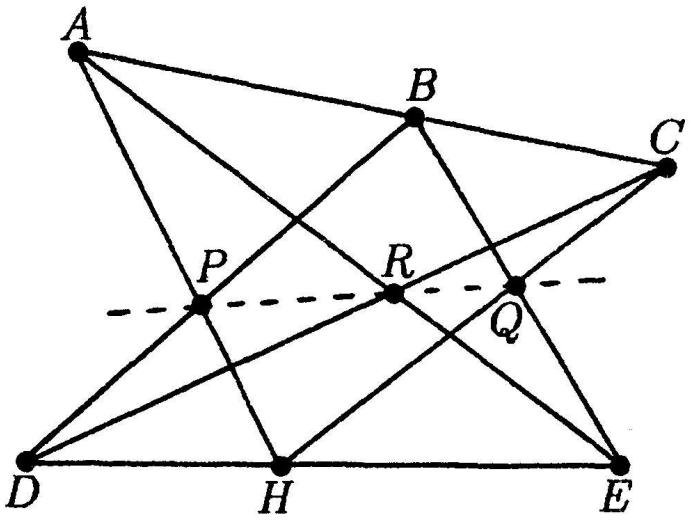

Рис. 2.82.

2.26.7. Итерационное удвоения куба

С помощью циркуля и линейки за конечное число шагов решить задачу удвоения куба нельзя, но решение методом последовательных приближений получить можно, причём многими разными способами. Одно из таких решений сохранилось в книге III «Математического собрания». История этого решения загадочна. Человека, который сообщил его Паппу, многие считали хорошим математиком. Их общие друзья попросили Паппа высказать свое мнение по поводу этого решения. Папп раздражённо ответил, что автор сам не понимает, что говорит, — он утверждает, будто нашел решение задачи удвоения куба с помощью лишь циркуля и линейки! Взаимопонимания, как видно, не было. Возможно, они даже не поговорили друг с другом. Произошло, скорее всего, следующее. Некий математик (Папп не упоминает его имени) предложил построение с помощью циркуля и линейки, повторяя которое на каждом шаге можно получать все более и более точные решения задачи удвоения куба. Вряд ли он мог считать, что точное решение получается на третьем шаге, но Папп его понял именно так. Папп без труда убедился, что на третьем шаге точного решения не получается, и от дальнейших обсуждений наотрез отказался. Но все же он привел это решение в своих сочинениях как пример неверных рассуждений.

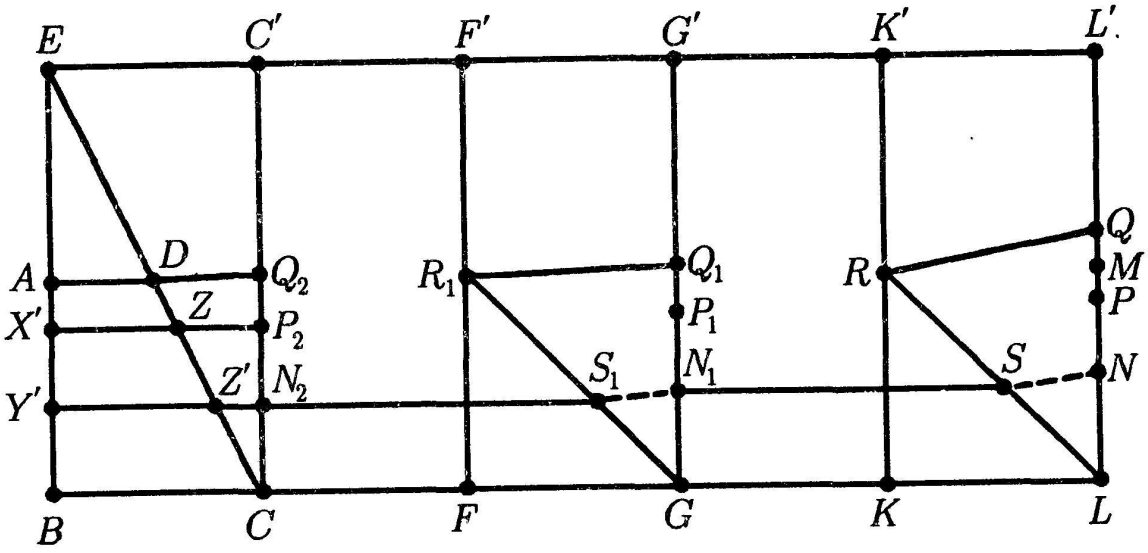

Рис. 2.83.

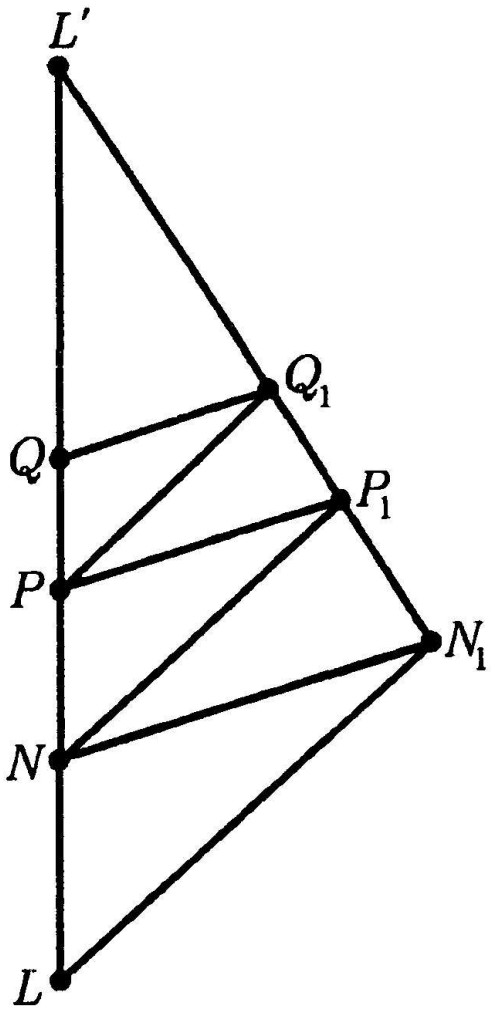

Рис. 2.84.

Папп изложил решение следующим образом. Пусть AB и AD — данные отрезки, причём $AB > AD$ и $AB \perp AD$ (рис. 2.83). Отложим на перпендикуляре к прямой AB, восставленном из точки B, отрезок BC, равный отрезку AB. Пусть E — точка пересечения прямых AB и CD. Отложим на луче BC отрезок $BL = 5BC$ и разделим его точками C, F, G и K на пять равных частей. Рассмотрим прямоугольник $EBLL'$. Возьмем на отрезке LL' такую точку M, что $LM = AB$. Пусть N — середина отрезка LM. Построим на отрезке LL' такие точки P и Q, что $L'L : L'N = L'N : L'P = L'P : L'Q$. На рис. 2.84 показано, как построить эти точки: через точку L' проводим произвольную прямую и откладываем на ней отрезок $L'N_1 = L'N$; дальнейшее построение видно из рисунка. Отложим на отрезке KK' отрезок $KR = LM = AB$, а на отрезке LR построим такую точку S, что $SN \parallel RQ$ (см. рис. 2.83). Затем на отрезке GG' построим такую точку N_1, что $SN_1 \parallel BL$, и для точки N_1 проведём такие же построения, как и для точки N (т. е. построим точки P_1 и Q_1, и повторим их для точки N_2. Если бы оказалось, что $Q_2A \parallel BC$, то $BC : Y'Z' = BE : Y'E = C'C : C'N_2$; $Y'Z' : X'Z = C'N_2 : C'P_2$ и $X'Z : AD = C'P_2 : C'Q_2$. А так как $C'C : C'N_2 = C'N_2 : C'P_2 = C'P_2 : C'Q_2$, то $BC : Y'Z' = Y'Z' : X'Z = X'Z : AD$, т. е. $Y'Z'$ и $X'Z$ — искомые отрезки. Папп, конечно, заметил, что прямая Q_2A не обязательно параллельна прямой BC, но он не заметил более глубоких свойств этого построения.

Докажем, что при последовательном повторении построения угол между прямыми Q_nR_n и BL стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^3 = 1 - a$ (рис. 2.85). Ясно, что $\frac{a}{1-x_{n+1}} = \frac{1-x_n^3}{1-x_n}$, т. е. $1 - x_{n+1} = a\frac{1-x_n}{1-x_n^3}$. Предположим сначала, что $0 < x_n^3 < 1 - a$. Тогда, с одной стороны, $1 - x_{n+1} = a\frac{1-x_n}{1-x_n^3} < 1 - x_n$, так как $1 - x_n^3 > a$. С другой стороны, $1 - x_{n+1} = \frac{a}{1+x_n+x_n^2} > \frac{a}{1+\sqrt[3]{1-a}+(\sqrt[3]{1-a})^2} = a\frac{1-\sqrt[3]{1-a}}{1-(1-a)} = 1 - \sqrt[3]{1-a}$, т. е. $x_{n+1} < \sqrt[3]{1-a}$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху и монотонно возрастает, поэтому она имеет предел. Если $1 - a < x_n^3 < 1$, то рассуждения аналогичны. Таким образом, процесс построения сходится для произвольной точки N, взятой на отрезке LL'. Но чем бли-

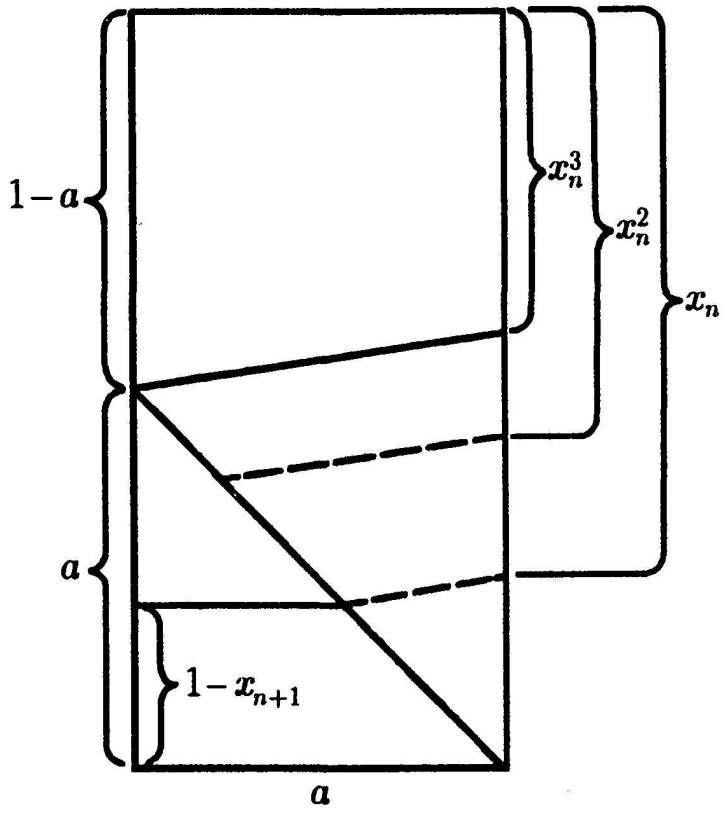

Рис. 2.85.

же $L'N/L'L$ к $\sqrt[3]{1-a}$, тем лучше сходимость. Автор решения задачи удвоения куба для $\sqrt[3]{1-0{,}5} = \sqrt[3]{0{,}5} \approx 0{,}79$ выбрал приближение $L'N/L'L = 3/4 = 0{,}75$. Он, по-видимому, достаточно хорошо понимал, что делал.

Литература

[1] Архимед *Сочинения*, М.: ГИФМЛ, 1962.

[2] Башмакова И.Г. *Диофант и диофантовы уравнения*, М.: Наука, 1972.

[3] Башмакова И.Г., Славутин Е.И. *История диофантова анализа от Диофанта до Ферма*, М.: Наука, 1984.

[4] Бурбаки Н. *Очерки по истории математики*, М.: ИЛ, 1963.

[5] Быковский В.А. *По следам далекого прошлого.* Дальневост. матем. журн., 2010, Т. 10, №1, с. 3-8.

[6] ван дер Варден Б.Л. *Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции*, М.: ГИФМЛ, 1959.

[7] Диофант Александрийский *Арифметика и Книга о многоугольных числах*, М.: Наука, 1974.

[8] Евклид *Начала.*

Кн. I–VI. М.-Л.: Гостехиздат, 1948.

Кн. VII–X. М.-Л.: Гостехиздат, 1949.

Кн. XI–XV. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.

[9] *История математики с древнейших времен до начала XIX века*, в трех томах. Под редакцией А.П.Юшкевича.

Том первый. *С древнейших времен до начала Нового времени*, М.: Наука, 1970.

[10] Прасолов В. В. *Геометрические задачи древнего мира*, М.: Фазис, 1997.

[11] Прокл *Комментарий к Первой книге «Начал» Евклида. Введение*, М.: Греко-латинский кабинет, 1994.

[12] Цейтен Г.Г. *История математики в древности и в Средние века*, М.-Л.: ГОНТИ, 1938.

[13] Ямвлих *Жизнь Пифагора*, М.: Алетейа, 1998.

[14] Heath Th. *A History of Greek Mathematics, Volume 1 (From Thales to Euclid)* Oxford: Clarendon Press, 1921.

[15] Heath Th. *A History of Greek Mathematics, Volume 2 (From Aristarchus to Diophantus)* Oxford: Clarendon Press, 1921.

[16] Kline M. *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York: Oxford Univ. Press, 1972.

[17] Seidenberg A. *On the Area of a Semi-Circle*, Archive Hist. Ex. Sci., 1972, Vol. 9, No. 3, p. 171–211.

[18] Weil A. *Number Theory. An approach through history from Hammurapi to Legendre*, Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1984.

Предметный указатель

абсцисса, 125
аксиома, 59, 67
    Архимеда, 79, 100
    Евдокса-Архимеда, 47
актуальная бесконечность, 16
алгоритм Евклида, 81
анализ, 141

геометрическая алгебра, 11, 70
гномон, 11, 72

двойное отношение, 141
дедекиндово сечение, 47
деление отрезка в крайнем и среднем отношении, 80
диоризм, 126

задача
    Аполлония, 128
    Архимеда о делении шара, 102
золотое сечение, 12, 74, 80

инверсия, 128

квадратриса Диностратa, 49
квадратура круга, 28
конхоида, 116

логистика, 42
луночки Гиппократа, 29

метод исчерпывания, 46
многоугольные числа, 130

окружность Аполлония, 129
ордината, 124

пентаграмма, 12
платоновы тела, 42
поризм, 147
постулат, 59, 67
потенциальная бесконечность, 17
приложение площадей, 74

рациональная параметризация коники, 138
решето Эратосфена, 120

симптом, 62, 124
синтез, 141
синтетическое построение геометрии, 65
совершенное число, 81
спираль Архимеда, 56, 104
способ вставок, 26, 113, 115

теорема
    Менелая, 135
    Паппа, 150
    Птолемея, 136
теория пропорций, 79
треугольные числа, 13
трисекция угла, 25

удвоение куба, 18

формула Герона, 111, 131

циссоида, 23