Оглавление

Глава 4.

Средние века и Возрождение

4.1. Византия

О византийских математиках сохранилось очень мало сведений. Известно, что Анфемий из Трал (ум. 534), строитель собора Св. Софии в Константинополе, написал трактат о зажигательных стёклах, интересный для истории конических сечений; в нём он предложил построение эллипса с помощью нити, закреплённой в фокусах. Ученик Анфемя — Исидор из Милета. Один из учеников Исидора написал трактат о правильных многогранниках, часто присоединяемый к изданиям «Начал» Евклида в качестве книги XV. Говоря о правиле нахождения углов между гранями правильного многогранника, он пишет, что этот вопрос был поставлен «по инициативе Исидора, великого нашего учителя».

С XI века в Византии некоторое распространение получают арабские цифры и позиционная нумерация. Максим Плануд из Никомедии (1260-1310) объясняет употребление девяти знаков для чисел от 1 до 9, а также знака, называемого *цифра* и «обозначающего ничто». Все эти знаки, по словам Плаунда, происходят из Индии.

4.2. Средневековая Европа

Возрождение математики в Европе началось с переводов арабских трактатов по математике (в том числе и переведённых, в свою очередь, с греческого). Переводы с греческого долгое время были редкостью. Важную роль в развитии математики играли университеты, которые появились сначала в Италии (XI век), а затем во Франции и в Англии (XII век). Уровень развития математики очень долго оставался крайне низким. Ещё в XVI в. в Парижском университете кандидаты на степень магистра вместо сдачи экзамена по геометрии присягали, что прослушали лекции по шести первым книгам «Начал».

4.2.1. Герберт (946-1003)

Французский монах Герберт, ставший в 999 году римским папой под именем Сильвестра II, написал несколько сочинений по математике. В частности, он восстановил забытые со времён Римской Империи правила счёта на аббаке. Крайне низкий уровень математической культуры того времени хорошо характеризует выдвинутое против Герберта обвинение, что он умеет делить любые сколь угодно большие числа, а потому запродался дьяволу.

4.2.2. Леонардо Пизанский по прозванию Фибоначчи (1180-1240)

Леонардо Пизанский более известен под именем именем Фибоначчи, т.е. сын Боначчи. Его отец — купец, торговавший в Алжире. Там Леонардо изучал метематику у арабских учителей.

Основной труд Леонардо — «Книга аббака» — написан в 1202 году и существенно переработан в 1228 году. Он посвящён не только счётной доске, но и арифметике вообще. Леонардо показывает преимущества индийской записи чисел (он говорит о девяти цифрах — без нуля).

В главе XII приведена знаменитая задача о кроликах: «Сколько пар кроликов родится в течение года от одной пары кроликов, если каждая пара приносит ежемесячно по паре, рождают кролики со второго месяца после своего рождения, и если ни одна пара не погибает?» После первого месяца будут 2 пары. После второго месяца из них одна пара принесёт одну пару и получится 3 пары. После третьего месяца будет $2+3=5$ пар, $\ldots$, после двенадцатого месяца будет $144+233=377$ пар. Эту последовательность можно продолжать дальше. Числа, возникающие при этом, получили название *чисел Фибоначчи*.

У Леонардо впервые появляется и популярная впоследствии задача о наименьшем числе гирь, с помощью которых можно взвесить все целые веса, меньшие данного. Он использует гири $1, 3, 9, 27, \ldots$: любое натуральное число можно представить в виде суммы и разности таких чисел (каждое число берётся не более одного раза).

Леонардо разбирает много разных задач, приводящих к линейным уравнениям. В связи с этими задачами он первым в Европе пришёл к мысли о введении отрицательных чисел и их толковании как долга. В главе XIV Леонардо излагает способы приближённого вычисления квадратного и кубического корней: $\sqrt[3]{a^3+r} \approx a + \frac{r}{3a(a+1)+1}$.

Изложение у Леонардо словесное. Неизвестную величину он называет res (вещь) или radix (корень); это — латинские переводы арабских терминов.

В 1220 году Леонардо написал книгу «Практика геометрии». Там впервые приводится доказательство того, что медианы треугольника пересекаются в одной точке (сам этот факт был известен Архимеду). Леонардо приводит также теорему о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда.

В книге «Цветок» Леонардо изучал кубическое уравнение $x^3+2x^2+10x=20$; сначала он доказал, что оно не имеет целых (положительных) решений, затем, что не имеет рациональных решений и решение не может быть квадратом рационального числа и не может также быть ни одной из иррациональностей, встречающихся у Евклида. После этого он с большой точностью вычисляет корень этого уравнения. Эту задачу, среди нескольких других, ему предложили как вызов (она есть у Омара Хайяма, который приводит решение посредством пересечения окружности и гиперболы; у него эта задача возникла из геометрии).

В «Книге квадратов» (1225) Фибоначчи доказывает, что каждый полный квадрат — сумма последовательных нечётных чисел. Он описывает построение пифагоровых троек и доказывает, что числа x^2+y^2 и x^2-y^2 не могут быть одновременно квадратами, и что x^4-y^4 не может быть квадратом. Фибоначчи доказывает также тождество $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$.

4.2.3. Томас Брадвардин (1290–1349)

Английский мыслитель Томас Брадвардин, в конце жизни ставший архиепископом Кентерберийским, написал несколько сочинений по математике и механике. В «Трактате о пропорциях или о пропорциях скоростей при движениях» он изучал равномерное движение тел. Математическими рассуждениями показал, что следующие два утверждения Аристотеля о скорости движения несовместимы. 1) Движение возможно лишь в том случае, когда действующая на тело сила больше силы сопротивления. 2) Скорость тела пропорциональна действующей на него силе, делённой на силу сопротивления. Действительно, если мы фиксируем действующую силу, а силу сопротивления будем последовательно удваивать, то в какой-то момент сила сопротивления станет больше действующей силы. Тогда по первому правилу скорость тела должна быть равна нулю, а по второму правилу скорость этого тела не может быть равна нулю.

В связи с исследованием скоростей Брадвардин подробно излагает учение о составных отношениях, приближаясь при этом к идее дробных показателей степени. Он вводит «половинное» отношение, соответствующее $\sqrt{a} : \sqrt{b}$. Вскоре эту идею развил Николя Орем.

В «Трактате о континууме» Брадвардин исследует непрерывное и дискретное, излагает различные взгляды на строение континуума, которых придерживались его предшественники и современники, и приводит свои рассуждения о природе континуума. Свою позицию он формулирует так: «Утверждение, полагающее, что континуум состоит из конечного числа неделимых, враждебно всем наукам, всем им противоборствует и потому всеми ими единодушно отвергается.»

4.2.4. Ричард Суайнсхед (первая половина XIV века)

В «Книге калькуляций» Ричарда Суайнсхеда (ок. 1350) впервые появляется понятие о мгновенной скорости. Он рассуждает об интенсивности формы как о переменной интенсивности качества. Суайнсхед анализирует примеры измениения интенсивностей. Он говорит, что при равномерном росте интенсивности средняя интенсивность на некотором промежутке есть среднее арифметическое начальной и конечной интенсивностей. Рассматривая другой пример, когда интенсивности на последовательных участках промежутка, разбитого в геометрической прогрессии $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, ..., растут в арифметической прогрессии 1, 2, 3, он получает (на современном языке), что

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2^2}\cdot 2+\frac{1}{2^3}\cdot 3+\frac{1}{2^4}\cdot 4+\cdots=2.$$

Чёткого определения понятия мгновенной скорости у Суайнсхеда не было, да и не могло быть, потому что в Средние века, как и в древности, рассматривали отношения только однородных величин — нельзя было рассмотреть отношение пути ко времени. Поэтому при сравнении скоростей сопоставляли либо пути, пройденные за одно и то же время, либо времена, за которые проходится один и тот же путь.

4.2.5. Никола Орем (1323–1382)

Французский математик Никола Орем продолжил исследования Брадвардина о составных отношениях и Суайнсхеда об интенсивности. Он написал трактат о сфере и два трактата об отношениях, очень важных для дальнейшего развития математики.

Наряду с n-кратными отношениями Орем ввёл дробно-рациональные отношения, соответствующие дробным степеням чисел, и подошёл к понятию иррационального показателя (он считал, что такие отношения можно заключить между достаточно близкими дробными отношениями).

Орем ввёл понятие ускорения. Он исследовал равноускоренное движение и доказал, что при таком движении средняя скорость равна среднему арифметическому начальной и конечной скоростей, а пройденный путь пропорционален квадрату времени. При этих исследованиях Орем ввёл графическое представление зависимостей.

Орем доказал расходимость гармонического ряда, заметив, что каждая из сумм $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$, ... больше $\frac{1}{2}$.

Последователь Орема португалец Альвар Томас сформулировал общее правило суммирования ряда

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

при $|x| < 1$.

4.3. Возрождение

4.3.1. Иоганн Мюллер по прозванию Региомонтан (1436-1476)

Иоганн Мюллер родился в маленьком городке Кёнигсберге в Баварии. В переводе на русский язык название этого города означает «королевская гора», а если перевести на латынь, то получится Regio monte. Поэтому Иоганна Мюллера называли на латинский манер Региомонтан. Он написал первое крупное сочинение в Европе по тригонометрии — «Пять книг о треугольниках всех видов». Многое Региомонтан взял из арабских источников, но, помимо систематизации этого материала, он снабдил некоторые утверждения своими оригинальными доказательствами.

Региомонтан первым доказал теорему косинусов в знакомом нам виде. Теорему синусов он также формулирует и применяет для решения треугольников. Региомонтан составил также таблицы синусов.

Региомонтан считал, что его сочинение о треугольниках необходимо астрономам (сам он много занимался астрономией). Книги III, IV и V посвящены сферической геометрии, важной для астрономии.

Региомонтан первым стал печатать книги по астрономии и математике, 20 лет спустя после изобретения печатного станка.

4.3.2. Теория перспективы

В дальнейшем на возникновение и развитие проективной геометрии большое влияние оказала теория перспективы, которую разрабатывали многие художники и архитекторы эпохи Возрождения. Теорию перспективы разрабатывали, в частности, Леон-Баттиста Альберти

(1404-1472) в трактате «О живописи» (1435), Пьеро деи Франчески (1410-1492) в трактате «О перспективе в живописи», Леонардо да Винчи (1452-1519) и Альбрехт Дюрер (1471-1528).

4.3.3. Лука Пачоли (1445-1515)

Основной труд Пачоли — «Сумма по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности» (1487 год, издан в 1494 году). В этой энциклопедии математических знаний того времени Почоли излагает правила и приёмы арифметических действий, действия с дробями, а также алгебру, которую он называет regula della cosa. Он рассматривает линейные уравнения, квадратные уравнения и некоторые виды биквадратных уравнений.

«Сумма» содержит также много разных задач. Одна из них впоследствии стала знаменитой в теории вероятностей. Игра в кости, в которой выигрывает тот, кто получает 6 очков, была прервана, когда один из игороков получил 5, а второй 2 очка. Спрашивается, в какой пропорции следует разделить ставку? Пачоли ошибочно считал, что в отношении 5:2.

В «Сумме» изложена изобретённая Лукой Пачоли двойная бухгалтерия, когда все денежные операции записываются в двух столбцах — кредита (доход) и дебета (долг). Она, по-видимому, повлияла на его трактовку отрицательных чисел.

По настоянию Леонардо да Винчи Лука Пачоли написал книгу «О божественной пропорции» (1497 год, издана в 1509 году). Леонардо сделал к этой книге рисунки правильных многогранников.

4.3.4. Никола Шюке (1445-1500)

Николя Шюке составил рукописный труд «Наука о числах в трёх частях» (1484). В нём он использовал отрицательные числа и ввёл не только нулевой, но и отрицательный показатели. Утверждал (без доказательства), что число $\frac{a+b}{c+d}$ заключено между $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{d}$. Воспользовался этим для итеррационного решения квадратного уравнения.

4.3.5. Леонардо да Винчи (1452-1519)

В записках Леонардо да Винчи часто встречаются различные математические задачи. Много внимания он уделил звёздчатым многогранникам и построению правильных многоугольников. При построениях он часто требует, чтобы циркуль имел постоянный раствор (построениями такого рода занимался Абу-л-Вафа).

При исследовании центров тяжести полукруга и тетраэдра, а также при вычислении площади эллипса, Леонардо применил методы Архимеда. Теоретически Леонардо высказывался против неделимых, но на практике он применял метод неделимых (по-видимому, он применял его не для доказательства, а лишь для поиска ответа).

Леонардо изобрёл циркуль для пропорционального увеличения или уменьшения фигур и прибор для построения параболы.

4.3.6. Косисты

Важные шаги в развитии алгебраической символики сделали коссисты — немецкие алгебраисты 16 века. Такое название связано с тем, что они называли алгебру Coss — от итальянского cosa (вещь), обозначавшего неизвестную у итальянских алгебраистов. Именно коссисты первыми стали употреблять знаки $+$ и $-$. Известный коссист Адам Ризе (1489–1559) издал в 1552 году учебник, про который он пишет, что его оригинал написан по-арабски, переведён на греческий Архимедом, а потом на латынь Апулеем.

4.3.7. Михаэль Штифель (1468-1567)

Крупнейший коссист — Михаэль Штифель. Он вычислил, что 19 октября 1533 г. будет конец мира. После того как предсказанный им конец мира не произошёл, Штифель, желая понять свою ошибку, всеръёз занялся математикой.

Штифель дал словесную формулировку бинома Ньютона для любого натурального n и сформулировал правило вычисления биномиальных коэффициентов (это не совсем правило Паскаля, потому что Штифель записывал лишь часть треугольника Паскаля, избегая повторений) и составил таблицу биномиальных коэффициентов до 17-й степени.

Штифель был первым, кто рассматривал отрицательные числа как числа, меньшие нуля. Использование отрицательных чисел позволяет вместо трёх видов квадратных уравнений

$$x^2 = ax + b, \quad x^2 + ax = b, \quad x^2 + b = ax$$

рассматривать любой из них. В Индии так делал уже Брахмагупта, а в Европе такая единая трактовка впервые встречается у Штифеля.

Штифель первым в Европе сформулировал современное правило деления одной дроби на другую как умножение на перевёрнутую дробь. До этого для деления одной дроби на другую их обычно приводили к общему значенателю.

4.3.8. Коперник (1473-1543)

Коперник оказал существенное влияние на развитие тригонометрии. Ему были ближе труды Птолемея, а не арабских математиков и Региомонтана. Коперник, доказал, что точка окружности, катящейся внутри окружности вдвое большего радиуса, описывает диаметр бóльшей окружности. Неизвестно, узнал он об этой теореме из сочинений Насир ад-дина ат-Туси или обнаружил её сам.

4.3.9. Решение кубического уравнения

Первым кубическое уравнение в радикалах решил профессор Болонского университета Сципион дель Ферро (1456–1526). Сделал он это для уравнения вида $x^3 + ax = b$. Он не опубликовал это решение, но сообщил его своему ученику Фиору, который пользовался им на математических турнирах. На одним из таких турниров в 1535 году Фиор встретился с Николо Тартальей (1500–1557). Тарталья самостоятельно нашёл правило дель Ферро и решил все предложенные ему задачи. Это настолько обескуражило Фиора, что он не смог решить ни одной из предложенных ему задач. На следующий день после турнира Тарталья нашёл и решение уравнения $x^3 = ax + b$. В 1539 году об открытии Тартальи узнал Джироламо Кардано (1501–1556) и выпросил у него формулировку решения, поклявшись её не публиковать. Познакомившись с бумагами дель Ферро, Кардано нарушил клятву, и опубликовал обработанное им решение с упоминанием об авторстве Тартальи. Тем не менее, закрепилось название *формула Кардано*.

Уравнение $x^3 + ax = b$ дель Ферро и Тарталья решали так. Сначала они находили u и v, удовлетворяющие системе уравнений $u - v = b$, $uv = \left(\frac{a}{3}\right)$ (это сводится к решению квадратного уравнения), а затем уже находили $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$. При решении уравнения $x^3 = ax + b$ Тарталья поступал так: $u + v = b$, $uv = \left(\frac{a}{3}\right)$ и $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$. Доказательство Кардано было геометрическое, с помощью разрезания куба на части.

Кардано признавал отрицательные корниотрицательные!корни уравнения. Он знал не только о наличии трёх корней кубического уравнения, но и о том, что сумма этих корней равна (по абсолютной величине) коэффициенту при x^2.

Для уравнения $x^3 = ax + b$ получалось решение

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

При $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{3}\right)^3$ это решение становится непригодным: действительный корень оказывается суммой двух мнимых чисел. Кардано не смог разобраться с этим. С этой проблемой разобрался Рафаэль Бомбелли (1526-1573).

Уравнение четвёртой степени решил Луиджи Феррари (1522-1565), ученик Кардано. Общее уравнение сводится к виду $x^4+ax^2+bx+c = 0$. Феррари заметил, что

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 = x^4 + ax^2 + \frac{a^2}{4} = -bx - c + \frac{a^2}{4},$$

и добавил к обеим частям $2\left(x^2 + \frac{a}{2}\right)t + t^2$, чтобы получить в левой части полный квадрат. При этом правая часть принимает вид

$$2tx^2 - bx + \left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{4}\right).$$

Этот квадратный трёхчлен является полным квадратом, когда его дискриминант обращается в нуль, т.е.

$$b^2 = 2t(4t^2 + 4at + a^2 - 4c).$$

Получилось кубическое уравнение; найдём его корень t_0. Извлекая квадратный корень из двух стоящих в левой и правой части полных квадратов, получаем два квадратных уравнения

$$x^3 + \frac{a}{2} + t_0 = \pm\sqrt{2t_0}\left(x - \frac{b}{4t}\right).$$

Тарталья определил число различных сочетаний из n элементов по m (без повторений). Познакомившись с таблицей биномиальных коэффициентов, составленной Штифелем, Тарталья расширил её и стал записывать в виде квадрата; диагональ отсекает от этого квадрата треугольник Паскаля. Таблицу биномиальных коэффициентов Таралья составлял, чтобы определить, сколько возможно существенно различных выпадений при бросании r игральных костей. Кардано тоже изучал задачу о бросании костей.

4.3.10. Герард Меркатор (1512-1594)

Фламандский картограф и географ Герард Кремер перевёл свою фамилию, означавшую «купец», и стал называться Меркатор. При составлении карт используются различные проекции сферы на плоскость. В 1569 году Меркатор впервые применил проекцию, получившую название *проекция Меркатора*. При этой проекции параллели и меридианы представляются перпендикулярными прямыми.

4.3.11. Рафаэль Бомбелли (1526-1573)

Книга Бомбелли «Алгебра» опубликована в 1572 году. В этой книге он свободно обращается с отрицательными числами и приводит правило знаков для умножения чисел.

Как уже говорилось, при $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{3}\right)^3$ решение Кардано для уравнения $x^3 = ax + b$ становится непригодным, потому что действительный корень уравнения оказывается суммой двух мнимых чисел. Кардано не смог разобраться с этим. Бомбелли обнаружил, что при этом два кубических корня являются сопряжёнными числами. Например, действительный корень уравнения $x^3 = 15x + 4$ выражается формулой $\sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$, и при этом $\sqrt[3]{2 \pm 11i} = 2 \pm i$. Бомбелли разработал правила обращения с комплексными числами.

В «Алгебре» Бомбелли представляет квадратные корни из натуральных чисел в виде цепных дробей.

4.3.12. Франсуа Виет (1540-1603)

Франсуа Виет был советником короля Генриха III, а после его смерти — Генриха IV. Славу ему принесла расшифровка переписки врагов Генриха III.

Виет отвергал слово «алгебра», потому что такого слова не было в европейских языках; он предлагал заменить его на «анализ». Надо сказать, что и в более поздние времена слова «алгебра» и «анализ» употреблялись как синонимы. Например, так делал Даламбер в знаменитой «Энциклопедии».

Виет, как и древнегреческие математики, считал необходимым соблюдать закон однородности, т.е. складывать только одинаковые степени.

Виет использовал словесное обозначение степеней. Он предложил неизвестные величины обозначать гласными (большими) буквами, а известные — согласными.

Виет предложил новый подход к решению кубических уравнений: уравнение $x^3 + 3ax = 2b$ заменой $y^2 + xy = a$ сводится к $y^6 + 2by^3 = a^3$.

При решении кубических уравнений вызывал трудности так называемый неприводимый случай, когда при решении кубического уравнения с вещественными корнями по формуле Кардано возникают квадратные корни из отрицательных чисел. Несложным преобразованием кубическое уравнение в неприводимом случае приводится к виду $q = z^3 - 3z$. Виет воспользовался известным ему тождеством

$$2\cos 3x = (2\cos x)^2 - 3(2\cos x)$$

и показал, что решение уравнения $q = z^3 - 3z$ сводится к нахождению неизвестной величины $2\cos x = z$ по известной величине $2\cos 3x = q$, т.е. к трисекции угла. (Коэффициент 2 перед косинусами связан с тем, что Виет использовал не синусы и косинусы, а хорды окружности.)

Виет знал и общие выражения $\cos nx$ и $\sin nx$ через $\cos x$ и $\sin x$. Это позволило ему решить в 1594 году уравнение 45-й степени, предложенное голландским математиком Адрианом ван Роуменом (1561-1615). Это было уравнение для хорды одной 45-й дуги в 24° (окружности радиуса 1). Виет нашёл и 22 других положительных корня этого уравнения.

Отрицательных корнейотрицательные!корни Виет не признавал, хотя и был хорошо знаком с работами Кардано, который признавал отрицательные корни. Подстановку $y = x + a$, которую Кардано использовал для уничтожения члена второй степени в кубическом уравнении, Виет распространил на уравнения произвольной степени. На примерах уравнений с положительными корнями от второй до пятой степени и коэффициентом ± 1 при старшей степени показал, что коэффициенты при x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}, $\ldots$ — это (взятые с чередующимися знаками) сумма корней, сумма произведений пар корней, сумма произведений троек корней и т.д. (Для квадратных уравнений такое утверждение ранее высказывал Кардано.)

Виет нашёл выражение числа π в виде бесконечного произведения квадратных корней:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{90^\circ}{2}\cos\frac{90^\circ}{4}\cos\frac{90^\circ}{8}\cdots = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right.\right.}}$$

Доказательство этой формулы основано на следующем соображении: если площадь правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1, равна S_n, то $S_n : S_{2n} = \cos\frac{180^\circ}{n}$.

Виет нашёл решение с помошью циркуля и линейки задачи Аполлония о построении окружности, касающейся трёх данных окружностей. (Решение Аполлония было утеряно. Оно содержалось в его трактате «О касаниях», о котором рассказывает Папп.)

Виет ввёл термин *коэффициент*, сначала в весьма специальном случае.

4.3.13. Симон Стевин (1548-1620)

Широкое распространение десятичных дробей в Европе началось после посвящённой им книги фламандского математика Симона Стевина, изданной в 1585 году. До этого обычно использовались шестидесятеричные дроби.

Стевин писал о необходимости признания иррациональнымх чисел и возражал против того, чтобы их называли иррациональными или невыразимыми, потому что они всего лишь несоизмеримы.

Глава 5.

17 век

В 17 веке впервые появляются академии. В 1601 году в Риме была основана Академия Рысей (Accademia dei Lincei); её членом с 1611 года был Галилей. Во Франции Дезарг, Декарт, Паскаль, Ферма и другие под руководством Мерсенна встречались частным образом с 1630 года для обсуждения научных проблем. В 1666 году Людовик XIV предоставил им право создать Королевскую Академию Наук, которой он оказывал поддержку. В Англии группа математиков и астрономов под руководством Джона Валлиса собиралась с 1645 года Эта группа была официально признана в 1662 году Карлом II и стала называться Лондонским Королевским Обществом. В 1700 в Германии году была основана Берлинская Академия Наук. Первым её президентом стал Лейбниц. В 1724 году в России Петр I основал Санк-Петербургскую Академию Наук.

Академии не только давали возможность ученым обсуждать интересующие их проблемы и обмениваться идеями, но и организовывали издание научных журналов. Правда, первый научный журнал, Journal des Savants, начал издаваться во Франции в 1665 году, до создания Королевской Академии Наук. В том же году начал выходить журнал Philosophical Transaction of the Royal Society.

Одно из важнейших приобретений математики 17 века — метод координат. Координатный подход резко расширил класс кривых, которыми могли заниматься геометры, по сравнению с теми кривыми, которыми занимались древнегреческие геометры. Уже Декарт писал, что метод координат может работать не только на плоскости, но и в пространстве, и давал краткие пояснения этого. Ферма тоже об этом вкратце писал, и обещал написать подробнее, когда у него найдётся свободное время. Чуть более подробно об этом написал Лагир. Но сколько-нибудь подробные работы о координатах в трёхмерном пространстве появились лишь в 18 веке.

Более позднее, но и более важное приобретение математики 17 века — дифференциальное и интегральное исчисление. Взаимно обратный характер задач, решаемых теперь с помощью дифференцирования и интегрирования, не был ясен для Ферма и Декарта. Его открыл Исаак Барроу, учитель Ньютона. Основной вклад в развитие математического анализа в 17 веке внесли Ньютон и Лейбниц. Обозначения Лейбница ($\int$ и dx) оказались более удобными, чем обозначения Ньютона ($\dot{x}$). Первым пробным камнем для испытания правильности и применимости нового исчисления явилась задача о цепной линии (т.е. о том, как выглядит тяжёлая нить с закреплёнными концами). Эту задачу впервые поставил Галилей; он высказал предположение (оказавшееся неверным), что эта кривая представляет собой параболу. Лейбниц и Иоганн Бернулли решили её с помощью нового исчисления, а Гюйгенс, который не сумел освоить новое исчисление, исследовал её старыми методами.

Алгебра и анализ в 17 веке не имели логического обоснования, но проблемы их логического обоснования пока мало интересовали математиков. Ферма, Паскаль и Барроу признавали, что их работам о вычислении площадей и методе неделимых недостаёт строгости, но были уверены, что эти работы можно обосновант на таком же уровне строгости, как это было у Архимеда. У Ньютона и Лейбница не было строгих определений производной и интеграла. Они полагались на согласованность результатов и плодотворность метода и двигались вперёд.

В 17 и 18 веке никто из тех, кто внёс наибольший вклад в развитие математики, не был математиком по преимуществу. Декарт, Гюйгенс и Ньютон внесли больший вклад в развитие физики, чем математики. Паскаль, Ферма и Лейбниц активно занимались физикой. Декарт считал, что в математику помимо алгебры и геометрии входят астрономия, музыка, оптика и механика.

Галилей и Ньютон, хотя и настаивали на необходимости экспериментов, но это были по-преимуществу мысленные эксперименты для подтверждения уже полученных результатов. Они были уверены в том, что мир устроен просто, и достаточно немногичисленных, но хорошо продуманных экспериментов. А вера в простоту устройства мира опиралась на их веру в то, что законы природы описываются на языке математики.

Следует отметить, что в 17 веке целью математики постепенно становятся общие, а не частные результаты.

5.1. Логарифмы

Швейцарец Иост Бюрги (1552-1632) около 1610 года изготовил таблицы, которые он долго не публиковал и опубликовал их уже после Непера. Он исходил из соответствия между умножением в геометрической прогрессии и сложением в арифеметической прогрессии. Бюрги составил таблицу геометрической прогрессии со знаменателем 1,0001. Его таблица не получила распространения, потому что она была менее удобна, чем таблица Непера, и появилась, когда таблицы Непера уже были широко известны.

Шотландец Джон Непер (1550-1617) к открытию люгарифмов пришёл не позднее 1594 года, но таблицы опубликовал лишь спустя 20 лет, в 1614 году. Эти таблицы содержали логарифмы синусов и косинусов. В отличие от Бюрги, рассматривавшего две дискретные прогрессии, Непер рассматривал логарифмы для всех значений непрерывно меняющихся тригонометрических величин — синуса и косинуса. Логарифм он определяет кинематически следующим образом. Пусть две точки начинают двигаться одновременно с одной и той же начальной скоростью. Первая точка движется по лучу с постоянной скоростью, вторая точка движется по отрезку длины 10^7 со скоростью, равной расстоянию от неё до того конца отрезка, по направлению к которому она движется. Тогда длина пути, пройденного первой точкой, равна неперову логарифму длины пути, пройденного второй точкой. Неперов логарифм числа x линейно выражается через натуральный логарифм: $-10^7 \ln x + 10^7 \ln 10^7$. Такое отличие от натурального логарифма связано с той целью, которую ставит перед собой Непер: вычисление логарифмов полухорд окружности радиуса 10^7. Непер хочет, чтобы они были положительными. В вычислениях у Непера была ошибка, повлекшая за собой ошибку в большей части таблицы в седьмом знаке.

Неперовы логарифмы были неудобны тем, что логарифм 1 не был равен 0. Он этого неудобства избавился Генри Бригс (1561-1631); кроме того, он стал использовать в качестве основания логарифмов основание 10. Это ему предложил в 1615 году сам Непер, которому ухудшившееся здоровье не позволяло проделать необходимые огромные вычисления. Бригс опубликовал свои таблицы в 1624 году.

Всё это делалось для упрощения вычислений в астрономии. Лаплас говорил, что логарифмы вдвое увеличивают жизнь астрономов, сокращая их работу, связанную с вычислениями. Одним из первых оценил пользу логарифмов для вычислений в астрономии Кеплер.

Экспоненциальная функция появилась позже, потому что в то время ещё не рассматривали степени с дробными показателями.

Появление логарифмов способствовало развитию преобразований тригонометрических формул к виду, удобному для логарифмирования. В частности, Непер предложил следующий формулы для сферического треугольника:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}, \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Эти формулы получили название *аналогии Непера*. Дело в том, что греческое слово «аналогия» в 17 веке часто употреблялось вместо латинского термина «пропорция».

5.2. Томас Гарриот (1560-1621)

Томас Гарриот основал английскую школу алгебры. При решении уравнений он рассматривал отрицательные корни и даже мнимые корни.

Гарриот значительно усовершенствовал алгебраическую символику. Знаки $>$ и $<$ впервые появились в посмертном издании его книги по алгебре (1631), но эти обозначения введены не самим Гарриотом, а издателем этой книги.

В 1601 году, за 20 лет до Снеллиуса, Гарриот открыл закон преломления света.

Гарриот изучал траекторию движения снаряда и раскладывал действующие на него силы на горизонтальную и вертикальную составляющие. Он очень близко подошёл к векторному решению задачи о нахождении скорости снаряда. В 1607 году Гарриот выяснил, что снаряд движется по параболе.

В письме к Кеплеру Гарриот упомянул задачу о наиболее плотной упаковке сфер. Кеплер не смог решить эту задачу, но в 1611 году он высказал гипотезу, что наиболее плотная упаковка получается тогда, когда сферы укладываются слоями, причём центры сфер верхнего слоя расположены над центрами отверстий нижнего слоя. Эта *гипотеза Кеплера* оставалась недоказанной до 1998 года.

5.3. Галилео Галилей (1564-1642)

Открытия Галилея в области математики не такие великие, как в астрономии и механике, но всё же они весьма существенные.

Не позднее 1586 года Галилей нашёл центр тяжести усечённого параболоида вращения. Но вскоре Валерио получил более общие результаты, и Галилей отказался от публикации своего сочинения. (Позже он включил его в свои «Беседы».)

Задуманный труд о неделимых Галилей не завершил, но идеи Галилея оказали большое влияние на Кавальери.

В «Беседах о математических доказательствах» (1638) Галилей показывает, что всех квадратов натуральных чисел, с одной стороны, меньше, чем всех натуральных чисел, а с другой стороны, их столько же. Он объясняет это так: «Свойства равенства, а также большей и меньшей величины, не имеют места там, где дело идёт о бесконечности, они применимы только к конечным количествам.» Галилей доказывает, что при равноускоренном движении, начинающемся с нулевой скоростью, путь проходится за то же время, что и при равномерном движении со скоростью, равной половине конечной скорости равноускоренного движения. Это он делает, сравнивая площадь треугольника и площадь прямоугольника. Галилей устанавливает, что наибольшая дальность полёта при заданной начальной скорости достигается, когда тело брошено под углом 45° к горизонту.

Галилей установил, что тяжёлая точка съёзжает в нижнюю точку вертикально расположенной окружности по дуге окружности быстрее, чем по хорде. В связи с этим он ошибочно считал, что дуга окружности — это та кривая, по которой тяжёлая точка быстрее всего попадает из одного положения в другое.

5.4. Иоганн Кеплер (1571-1630)

С 1594 года Кеплер работал профессором математики и морали в Граце. В качестве астролога он должен был заниматься предсказанием не только погоды, но и политических событий. Кеплер говорил, что мать астрономия голодала бы, если бы ей на хлеб не зарабатывала её дочь астрология. Грац Кеплеру пришлось покинуть после того, как там начались гонения на протестантов. В 1600 году Кеплер переехал в Прагу по приглашению придворного астронома и астролога Тихо Браге (1546-1601). После смерти Браге Кеплер занял его должность. Используя астрономические наблюдения Браге, Кеплер открыл первые два своих закона и опубликовал их в книге «Новая астрономия» (1609). Первый закон: каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Второй закон: каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём площадь сектора орбиты, описанная радиусом-вектором планеты, изменяется пропорционально времени. При формулировке второго закона Кеплер говорит не о площади, а о сумме радиусов-векторов. Чтобы придать этому смысл, нужно задать распределение точек на орбите, но Кеплер этого не делает.

Закон площадей сводит определение положения планеты на её орбите в данный момент времени к решению трансцендентного уравнения

$$\varphi + e \sin \varphi = kt,$$

которое получило название *уравнение Кеплера*.

Гипотеза Коперника о том, что Земля вращается вокруг Солнца, давала единообразное описание для движения планет, находящихся ближе к Солнцу, чем Земля, и находящихся от него дальше. Упрощалось также описание посредством эпициклов (уменьшалось число окружностей, участвующих в описании). Но выигрыша в точности не было. Наборот, система Птолемея давала более точное описание, чем система Коперника. И Тихо Браге, выполнивший самые точные для того времени измерения движения планет, отказался от системы Коперника и предпочитал ей систему Птолемея. Измерения Тихо Браге позволили Кеплеру предложить описание движения планет, которое совмещало простоту описания Коперника и точность описания Птолемея. Кеплер предположил, что Земля и другие планеты движутся по эллипсам, причём Солнце находится в одном из двух фокусов каждого из этих эллипсов.

Большое значение для истории геометрии имеет книга Кеплера «Оптическая часть астрономии» (1604). Здесь впервые вводится термин *фокус* и впервые появляется термин *бесконечно удалённый*. Кеплер говорит, что парабола — это эллипс (или гипербола), у которого один фокус удалён на бесконечное расстояние.

В урожайный для винограда 1612 год Кеплер заинтересовался практическими правилами измерения объёмов бочек. Виноделы определяли вместимость бочек разной формы с помощью всего лишь одного промера — отметки на линейке, просунутой через наливное отверстие в середине верхней части бочки до края днища. В 1615 году он опубликовал «Новое измерение винных бочек». Главная цель этой книги — выяснить, при какой форме бочка имеет наибольшую вместимость. Изучая этот вопрос, Кеплер пришёл к изопериметрическим задачам.

Попутно он заметил, что по обе стороны от места наибольшего значения величины её убывание вначале очень мало. Это было за 13 лет до того, как Ферма открыл общее правило нахождения экстремумов. Этим наблюдением Кеплер воспользовался для решения следующей задачи: вписать в данный шар цилиндр наибольшего объёма.

Первая часть книги содержит изложение сочинения Архимеда о шаре и цилиндре. Но Кеплер использует не строгие доказательства Архимеда, основанные на методе исчерпывания, а непосредственно вводит бесконечно малые величины. Замена строгих, но тяжеловесных методов, на нестрогие, но более удобные и лёгкие, позволила Кеплеру получить новые результаты, и он вычислил объёмы 87 новых тел.

Третий закон Кеплера (квадраты времён обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их средних расстояний от Солнца) опубликован в книге «Гармония мира» (1619).

Кеплер заметил, что отношение последовательных чисел Фибоначчи стремится к $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Во время судебного процесса против его матери, которую обвинили в колдовстве, Кеплер с риском для собственной жизни защищал её и спас от сожжения на костре.

5.5. Пауль Гульдин (1577-1643)

С 1635 по 1641 годы издавалось сочинение Гульдина «О центре тяжести» в нескольких книгах. Во второй книге (1640) содержатся две теоремы об объёме и площади поверхности тела, полученного при вращении замкнутой кривой вокруг некоторой оси (предполагается, что ось не пересекает кривую и кривая лежит в плоскости, содержащей ось).

1. Площадь поверхности тела вращения равна произведению длины кривой на длину кривой, заметаемой центром тяжести этой кривой.

1. Объём тела вращения равен произведению площади фигуры, ограниченной кривой, на длину кривой, заметаемой центром тяжести этой фигуры.

Эти теоремы без доказательства были ещё у Паппа (но их не было в том издании, которое было доступно Гульдину). Доказательства Гульдина весьма туманны и невразумительны. Более ясное доказательство (методом неделимых) дал Кавальери (1647).

5.6. Иоганн Фаульгабер (1580-1635)

Фаульгабер занимался изучением сумм степеней целых чисел. Он получил формулы для сумм $1^r + 2^r + \dots + n^r$ при $r \leq 11$ (1617), а затем и при $r \leq 17$ (1631). При этом он получил фактически первые восемь чисел Бернулли. Фаульгабер отметил постоянство 20-х разностей последовательности $1^{20}, 2^{20}, 3^{20}, \dots$

Фаульгабер заметил, что $1^r + 2^r + \dots + n^r = S_r(n)$ — многочлен степени $r+1$ от n. Он утверждал также, что $S_r(n)$ полиномиально выражается через два первых многочлена $S_1(n)$ и $S_2(n)$. Доказательства он не привёл. Впервые доказательство этой теоремы получил Якоби в 1834 году (у Якоби была книга Фаульгабера, поэтому он мог узнать из неё формулировку этой теоремы).

5.7. Григорий Сен-Винцент (1584-1667)

Основной труд Григория Сен-Винцента «Геометрический труд о квадратуре круга и конических сечений» закончен в 1629 году, по опубликован только в 1647 году. (В 1632 году, спасаясь бегством из осаждённой шведскими войсками Праги, он не смог взять свои бумаги, и получил их только много лет спустя.) В этом сочинении рассматривается сравнение объёмов тел, ограниченных цилиндрами и плоскостями; в координатах эти тела задаются неравенствами $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq y(x)$, $0 \leq z \leq z(x)$. Объём такого тела равен $\int_a^b y(x)z(x)\,dx$. Выбирая функции $y(x)$ и $z(x)$ так, чтобы их произведение было постоянно, Сен-Винцент получает тела равного объёма. Например, если $y(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ и $z(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$, то полученное тело имеет такой же объём, как и тетраэдр, который получается, когда $y(x) = a - x$ и

$z(x) = a + x$. Подход Сен-Винцента похож на подход Кавальери, но открыт незвисимо от него.

Сен-Винцент вычислил объём тела, отсекаемого от прямого кругового цилиндра плоскостью, проходящей через центр одного из оснований (и не пересекающей другое основание). Эта задача была уже решена Архимедом в послании Эратосфену, в то время ещё не обнаруженном.

Сен-Винцент первым установил, что если фигуру, ограниченную гиперболой $y = c^2/x$ и осью абсцисс, разрезать прямыми, параллельными оси ординат и проходящими через члены геометрической прогрессии, то получатся равновеликие фигуры. Лейбниц справедливо считал это открытие, устанавливающее связь между площадью под гиперболой и логарифмами, важнейшим достижением Сен-Винцента.

Сен-Винцент считал, что если в тело вписывать тонкие параллелепипеды и увеличивать их число, то они *исчерпают* всё тело. Термин *исчерпывание* после этого получил широкое распространение, и даже метод древних греков стали называть *методом исчерпывания*.

5.8. Жерар Дезарг (1591-1661)

Жерар Дезарг был по профессии архитектором и инженером. Его знаменитая теорема содержится в 12-страничном сочинении «Образец одного из способов для употребления перспективы» (1636). Она формулируется следующим образом: если прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников ABC и $A'B'C'$ пересекаются в одной точке, то точки пересечения их соответственных сторон лежат на одной прямой.

Основной труд Дезарга «Черновой набросок подхода к явлениям, происходящим при встрече конуса с плоскостью» (1639) занимает всего 30 страниц. Здесь уже широко применяются проективные преобразования. Дезарг определил бесконечно удалённые точки как точки пересечения пучков параллельных прямых, а бесконечно удалённые прямые как прямые пересечения пучков параллельных плоскостей. Он обратил внимание на то, что двойное отношение $\frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC}$ четырёх точек A, B, C и D, лежащих на одной прямой, сохраняется при проекциях. Сам этот геометрический факт был известен ещё Паппу и Менелаю (Менелаю он был известен даже в сферической геометрии). Но они не воспринимали его с точки зрения проекций, а просто рассматривали конфигурацию из четырёх прямых на плоскости, пересекающихся в одной точке, и двух пересекающих их прямых. Дезарг рассматривал на прямой точки в инволюции и гармонические четвёрки точек. Инволюции прямой бывают двух типов: гиперболические и эллиптические. Гиперболическая инволюция задаётся формулой $x \mapsto a^2/x$; она имеет две неподвижные точки $\pm a$. Эллиптическая инволюция задаётся формулой $x \mapsto -a^2/x$; она не имеет неподвижных точек. Инволюция — это проективное преобразование прямой, совпадающее со своим обратным. Постепенно в математике стали называть инволюциями любые преобразования, совпадающие со своим обратным.

Дезарг пользовался своей собственной терминологией, часто заимствованной из ботаники. Все его термины забыты, за исключением термина инволюция (involution — скрученность молодых листьев).

Дезарг изучил полный четырёхсторонник[1] с точки зрения инволюций. Он доказал, что если рассмотреть семейство коник, проходящих через четыре точки, то на любой прямой эти коники будут высекать пары точек, находящихся в инволюции. Эту теорему тоже часто называют теоремой Дезарга. Среди рассматриваемых коник есть три вырожденные коники, соответствующие парам прямых, проходящих через данные точки.

Дезарг изучал поляры, которые ввёл ещё Папп. Поляра точки A относительно данной коники определяется следующим образом. На каждой прямой, проходящей через точку A, построим четвёртую гармоническую точку для точки A и двух точек пересечения прямой и коники. Все построенные точки лежат на одной прямой, которая и называется полярой точки A относительно данной коники.

[1]Полным четырёхсторонником называют фигуру, образованную четырьмя точками и тремя парами прямых, проведённых через эти точки.

Дополняя плоскость бесконечно удалённой прямой Дезарг трактует гиперболы и параболы как замкнутые кривые (пересекающие эту прямую в двух точках или касающиеся её).

Труды Дезарга были малопонятны для его современников (полностью его идеи усвоил лишь Паскаль, а частично — Лагир). Многие сочинения Дезарга были утеряны и не оказали большого влияния. Лишь в 1845 году Шаль нашёл копию «Чернового наброска», сделанную в 1679 году Лагиром. В 1951 году был обнаружен и печатный экземпляр этого сочинения.

5.9. Альбер Жирар (1595-1632)

В 1626 году Жирар опубликовал книгу «Тригонометрия», в которой впервые появляются сокращённые обозначения sin, cos, tan. В этой книге он доказал, что площадь сферического треугольника пропорциональна избытку суммы его углов над двумя прямыми углами (*формула Жирара*).

В книге «Новые открытия в алгебре» (1629) Жирар первым интерпретирует отрицательные числа, как движение в противоположном направлении по сравнению с положительными числами. Он принимает и использует не только отрицательные, но и мнимые корни. Это позволило ему сформулировать основную теорему алгебры в весьма общей форме. В этой книге Жирар приводит *треугольник Паскаля* задолго до Паскаля и использует его для изучения симметрических функций. В частности, он выражает суммы квадратов, кубов и четвёртых степеней корней многочлена через его коэффициенты. (Общие формулы такого рода получил Ньютон.)

В 1629 году Жирар ввёл обозначение $\sqrt[n]{x}$ для обозначения корней произвольной степени.

В 1634 году Жирар первым сформулировал индуктивное определение *чисел Фибоначчи* ($F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$) и показал, что отношение соседних чисел Фибоначчи стремится к *золотому отношению*.

5.10. Рене Декарт (1596-1650)

Шаль в «Историческом обзоре развития геометрических методов» пишет об идеях, которые развил Декарт в своей «Геометрии»: «Это дети, появивишиеся без матери». Идеи Декарта действительно имели огромное преимущество перед теми, которые господствовали в математике до него.

Когда Декарт учился в школе, его здоровье было слабым, и он получил разрешение спать до 11 часов, и это стало его привычкой. Этой привычке ему пришлось изменить лишь в последний год жизни. Около 20 лет Декарт прожил в Голландии. В 1630 году Декарт заявил Мерсенну, что устал от математики, и после этого математикой не занимался, за исключением краткого периода в 1637 году. В 1649 году шведская королева Христина убедила Декарта переехать в Стогкольм и давать ей уроки. Но свободное для этого время было у неё только в 5 часов утра. Декарту пришлось отказаться от многолетней привычки поздно вставать, и он в холодном северном климате ежедневно рано по утрам ездил в королевский дворец. Через несколько месяцев он умер от воспаления лёгких.

«Геометрия» Декарта была опубликована как третье приложение к его философскому трактату «Рассуждение о методе». Это — исторически первая книга, которую современный математик может читать без затруднений, связанных со словесными формулировками вместо формул. Ещё Виет совсем незадолго до Декарта вместо привычного нам уравнения $x^3 - 3r^2x = r^3$ пишет

A cubus minus Z quadrato ter in A aequatur Z cubo.

Декарт внимательно читал Виета и многим ему обязан, но он гордо говорил, что начал там, где Виет остановился. Символические обозначения Декарта кардинально отличались от предшествующих ему словесных формулировок. Он обозначал известные величины первыми буквами алфавита, а неизвестные — последними. Но буквами он обозначал только положительные числа. Буквенные обозначения для положительных и отрицательных чисел встречаются у Иоганна Гудде в 1657 году; Ньютон уже свободно использует эти обозначения. Обозначения для степеней у Декарта принимают современный вид: x^2, x^3, … (правда, квадрат ещё долгое время многие обозначали xx). Но эти обозначения он ещё не распространил на дробные и отрицательные показатели (это сделал Ньютон).

Декарт заинтересовался задачей о прямых, которой занимался сначала Аполлоний, а затем Папп. Их решение было утеряно. Декарту потребовалось шесть недель на решение этой задачи, и после этого он избавился от невысокого мнения об аналитических способностях древних. Задачу о прямых в случае $2n$ прямых можно сформулировать следующим образом. На плоскости даны два набора прямых по n прямых в каждом, и для каждой прямой задан угол. Из точки C проводятся прямые, образующие заданные углы с данными прямыми. Они пересекают прямые первого набора в точках $X_1, \ldots, X_n$, а прямые второго набора — в точках $Y_1, \ldots, Y_n$. Требуется найти множество точек C, для которых $CX_1 \ldots CX_n = kCY_1 \ldots CY_n$, где k — данное число. Для трёх прямых ищется множество точек C, для которых $CX_1 \cdot CX_2 = kCY_1^2$. Для $2n-1$ прямых ищется множество точек C, для которых $CX_1 \ldots CX_n = kCY_1 \ldots CY_{n-1}$, где k — отрезок. Эта задача оказалась чрезвычайно удобной для решения в координатах, потому что, например, для $2n$ прямых искомое множество задаётся уравнением

$$\prod_{i=1}^{n}(a_ix + b_iy + c_i) - k \prod_{i=n+1}^{2n}(a_ix + b_iy + c_i) = 0.$$

А без использования координат задача получается трудная. Уравнение кривой (конического сечения), полученное при решении Декартом задачи о четырёх прямых, было первым заданием кривой уравнением в координатах. А при решении этой задачи для пяти прямых, четыре из которых перпендикулярны и находятся на равных расстояниях от соседних с ними, а пятая им перпендикулярна, вервые в истории геометрии появляется уравнение кривой третьей степени.

После этого Декарт пришёл к общему понятию о задании кривой уравнением $F(x, y) = 0$ и разработал метод координат. Сначала Декарт считал, что допустимыми являются лишь те кривые, каждую точку которых можно построить циркулем и линейкой.

Для кривых 2-го порядка Декарт не доказывает, что они имеют две оси; он считает это известным (этот факт установлен Аполлонием). Аналитическая геометрия далеко не сразу смогла во всём превзойти достижения древнегреческих геометров. Ещё Ньютон при выводе законов Кеплера предпочитает ссылаться на Аполлония, а не на Декарта.

Для алгебраических кривых Декарт решил задачу о нахождении касательной и нормали методом исключения одной переменной из двух алгебраических уравнений. Сначала первичной для него была задача построения нормали. Для построения нормали в точке (a, b) алгебраической кривой $f(x, y) = 0$ Декарт разработал следующий алгебраический метод. Предположим, что эта нормаль пересекает ось абсцисс в точке $(c, 0)$. Рассмотрим окружность $(x - c)^2 + y^2 = (a - c)^2 + b^2$ с центром в точке $(c, 0)$, проходящую через точку (a, b). Искомое число c определяется тем условием, что рассматриваемая окружность касается кривой. На алгебраическом языке это означает, что если мы исключим из уравнения $f(x, y) = 0$ и из уравнения окружности переменную y, то полученное уравнение $F(x) = 0$ должно иметь двукратный корень $x = a$. Для нахождения c Декрат использовал открытый им метод неопределённых коэффициентов. Запишем равенство $F(x) = (x-a)^2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)$, где a_0, a_1, … — неопределённые коэффициенты. Приравнивая в обеих частях равенства коэффициенты при одинаковых степенях x, находим c и неопределённые коэффициенты.

Рассмотрим простейший пример: построение нормали к параболе $y = kx^2$ в точке (a, b). Исключая y из уравнений $y = kx^2$ и $(x-c)^2+y^2 = (a-c)^2+b^2$, получаем $(x-c)^2+kx-(a-c)^2-b^2 = 0$. Этот квадратный трёхчлен должен быть равен $(x - a)^2$, поэтому $c = a + \frac{k}{2}$. В частности, $c - a = \frac{k}{2}$, т.е. поднормаль параболы постоянна.

Сам Декарт в 1638 году заметил, что его метод проще применять не к нормалям, а к касательным: при этом нужно исключать переменную

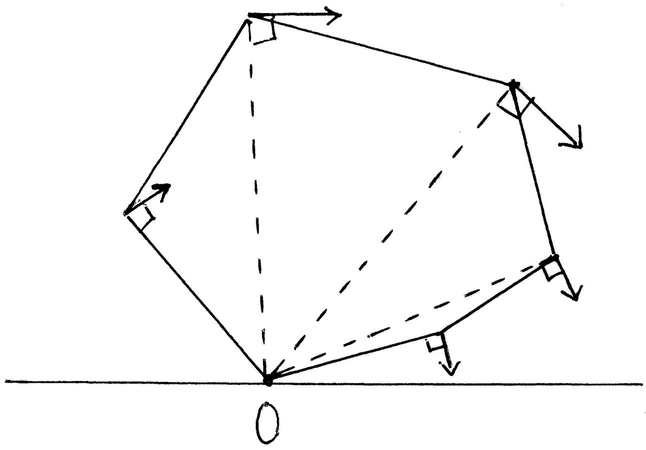

Рис. 5.1.

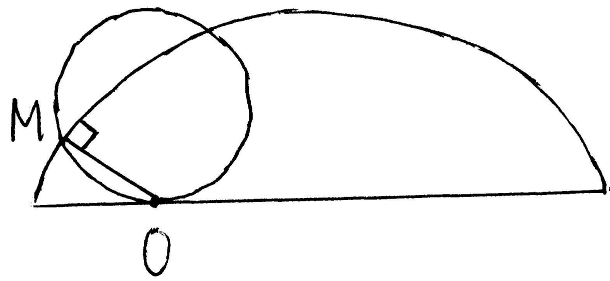

Рис. 5.2.

не из уравнения $f(x, y) = 0$ и квадратичного уравнения окружности, а из уравнения $f(x, y) = 0$ и линейного уравнения прямой (касательной).

В 1638 году Декарт построил нормаль к циклоиде независимо от Роберваля. Его подход был следующий. Рассмотрим вместо катящейся окружности катящийся многоугольник (рис. 5.1). Для каждой вершины многоугольника нормаль к траектории движения вершины проходит через опорную точку O. Поэтому для циклоиды нормаль в каждой точке M траектории проходит через опорную точку O окружности (рис. 5.2)

Начало книги III посвящено многочленам. Здесь они впервые обозначаются так же, как и сейчас. Декарт говорит (без доказательства), что число корней многочлена не превосходит его степени. Формулирует (тоже без доказательства) так называемое *правило знаков Декарта*: количество положительных (соответственно, отрицательных) корней многочлена не превосходит числа перемен (соответственно, повторений) знака в последовательности коэффициентов.

Декарт даёт новое решение уравнения 4-й степени в радикалах. Для этого он замечает, что уравнение $x^4+px^2+qx+r=0$ можно записать в виде

$$\left(x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}\right)\left(x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}\right) = 0,$$

где y находится из уравнения

$$y^6 + 2py^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0.$$

Последнее уравнение — кубическое относительно y^2.

Один из основных вопросов для Декарта — какие линии служат предметом геометрии. Сначала он считал геометрическими линиями те, которые строятся посредством шарнирных механизмов. Другие линии (например, спираль и квадратрису) он называл механическими. Декарт постулировал, что построение кривой посредством шарнирного механизма и задание кривой алгебраическим уравнением эквивалентны. Но это доказал лишь Кемпе в 1876 году.

Квадратриса Динострата занимает видное положение в книге Декарта «Геометрия». Одной из главных его целей было разделение кривых на «геометрические» и «механические». У Декарта нет единого определения «геометрических кривых»; к этому понятию он подходит разными путями и не только не доказывает эквивалентности получающихся при этом определений, но даже и не дает сколько-нибудь строгих определений. С современной точки зрения самым главным свойством этих кривых является то, что они задаются алгебраическими соотношениями. У Декарта такой подход намечен, но лишь как нечто второстепенное. Самый главный его подход к этим кривым — они должны задаваться некоторой комбинацией движений. Причины, по которым Декарт исключает из числа этих кривых квадратрису, не совсем ясны. Он пишет, что для квадратрисы между двумя движениями отрезков нет соотношения, которое можно измерить точно.

Декарт делает замечание о возможности распространить его метод на пространственные кривые посредством проектирования их точек на две взаимно перпендикулярные плоскости. Сам он не занимался разработкой этого вопроса, и этого замечания совершенно не достаточно для введения трёх координат в пространстве.

В 1630 году Декарт получил выражение для суммы плоских углов выпуклого многогранника. Если обозначить число вершин, рёбер и граней через V, E и F соответственно, то словесно сформулированное выражение, полученное Декартом, можно записать в виде $2\pi(V-2)$. С другой стороны, если просуммировать углы всех граней многогранника, то для суммы плоских углов многогранника получаем выражение $2\pi(E-F)$. Приравнивая эти выражения, можно вывести теорему Эйлера, связывающую число вершин, рёбер и граней выпуклого многогранника. Записки Декарта о многогранниках были опубликованы лишь в 1860 году.

В «Геометрии» Декарт вводит единицу измерения и показывает, как тогда можно произведению отрезков сопоставить отрезок. Это позволяет рассматривать произведение любого числа отрезков и отказаться от принципа однородности. Декарт пишет, что он делает это, чтобы установить более тесную связь с числами. (Такой подход был уже у Бомбелли, но в той части его «Алгебры», которая осталась неопубликованной.)

Декарт принимает отрицательные числа в алгебре (корни уравнений), но не принимает их в геометрии. Возражения против признания отрицательных чисел у Декарта следующие: такое число должно быть меньше, чем ничто. В «Геометрии» Декарта говорится о «ложных» корнях уравнений, но он объединяет их вместе с «истинными» корнями в категорию «действительных» корней в противоположность «мнимым». Термины «действительные» (réelles) и «мнимые» (imagimaires) числа впоследствии были приняты другими математиками. Книга Декарта сыграла важную роль в распространении применения отрицательных чисел. Декарт геометрически истолковал отрицательные числа, как противоположно направленные отрезки.

Декарт рассматривал только ту часть кривой $x^3 + y^3 - axy = 0$ (называемой *декартовым листом*), которая лежит в первом квадранте; дополнительные ветви декартова листа впервые рассмотрел Гюйгенс (1692).

Декарт предложил отнести кривые степени $2n-1$ и $2n$ к одному роду, потому что ошибочно считал, что уравнение степени $2n$ сводится к уравнению степени $2n-1$, как уравнение четвёртой степени сводится к кубическому уравнению. При этом Декарт отчётливо понимал, что степень кривой не зависит от выбора (прямоугольной или косоугольной) системы координат. Но доказательства этого факта у него нет.

Декарт (и независимо от него Ферма) нашёл две новые пары дружественных чисел 17 296 и 18 416, 9 363 584 и 9 437 056.

5.11. Бонавентура Кавальери (1598-1647)

Бонавентура Кавальери — ученик Галилея. В 1622 году Кавальери сообщил Галилею свою концепцию вычисления площадей поверхностей и объёмов тел, систематически изложенную лишь в 1635 году в книге «Геометрия, развитая некоторым новым способом при помощи неделимых частей непрерывных величин». Эта книга сыграла важную роль в развитии интегрального исчисления. Согласно Кавальери неделимые имеют на одно измерение меньше, чем фигура, которую они порождают при движении. Неделимые — это параллельные сечения. Доказательство Галилея для закона пути $s = \frac{1}{2}gt^2$ по известной скорости свободно падающего тела $v = gt$ проведено вполне в духе концепции Кавальери.

В «Геометрических этюдах» (1647) дал Кавальери более ясное доказательство теорем Гульдина методом неделимых. В эту книгу Кавальери включил также вычисление площади под кривой $y = x^n$ для натуральных $n \leq 9$. В ней он формулирует так называемый *принцип*

Кавальери: если все соответственные сечения двух фигур находятся в постоянном отношении, то площади этих фигур тоже находятся в таком же отношении (здесь Кавальери рассматривает сечения параллельными плоскостями).

Кавальери в ответ на упрёки, что его методы вычисления площедей и объемов недостаточно строгие, отвечал, что о строгости должна заботиться философия, а не геометрия.

5.12. Пьер Ферма (1601-1665)

По профессии Пьер Ферма был юристом. С 1631 года он был советником парламента в Тулузе. Математикой он занимался в свободное время, которого у него оставалось не так уж много. Ферма писал мало и очень кратко. Свои работы он не публиковал. Он изложил их в рукописях, с которыми могли познакомиться очень немногие, и в письмах. Работы Ферма по арифметике были опубликованы его сыном в 1670 году, а остальные работы — в 1679 году.

5.12.1. Исчисление бесконечно малых

Около 1629 года Ферма нашёл общий метод нахождения максимумов и минимумов. Он формулировал его следующим образом. В выражение, экстремальное значение которого нужно найти, вместо неизвестной величины A подставляется $A+E$, и оба выражения приближённо приравниваются друг другу. Затем в обеих сторонах равенства вычеркиваются одинаковые члены, производится деление на множитель E, и после этого E полагается равным нулю. Получающееся в результате уравнение даёт значение A, соответствующее экстремуму.

К 1629 году Ферма умел вычислять площадь под кривой $y = x^n$ для всех натуральных n, но об этом он сообщал только в переписке. Сначала он использовал неравенства

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < \sum_{k=1}^{m} k^n.$$

Но это доказательство было весьма громоздким, и не годилось для дробных или отрицательных n. Поэтому Ферма придумал другой подход, основанный на неравномерном делении отрезка. Для квадратуры кривой $y = x^n$, где $n = p/q > 0$, Ферма поступал следующим образом. Разделим отрезок оси абсцисс от 0 до x точками $\alpha^k x$. Для квадратуры нужно просуммировать площади прямоугольников, представляющие собой бесконечную геометрическую прогрессию с начальным членом $(1-\alpha)x^{\frac{p+q}{q}}$ и знаменателем $\alpha^{\frac{p+q}{q}}$. Сумма этой прогрессии равна $(1-\alpha)x^{\frac{p+q}{q}} \cdot \frac{1}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}}$. Положим $\alpha = \beta^q$. Тогда

$$\frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}} = \frac{1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{q-1}}{1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{p+q-1}} \to \frac{q}{p+q}$$

при $\beta \to 1$.

Впоследствии Ферма вычислил площади и под более сожными кривыми, например, под так называемым *локоном Аньези* $y = \frac{a^3}{a^2+x^2}$ и под кривыми $y = (a^2 - x^2)^n$ для нечётных натуральных n.

5.12.2. Метод координат

Ферма разработал метод координат и задание кривых уравнениями одновременно с Декартом в рукописи под названием «Ad locos planos et solidos isagoge» (Введение в изучение плоских и пространственных мест). Древнегреческие геометры называли проскими местами прямые и окружности, а пространственными местами — эллипсы, параболы и гиперболы. Ферма не стал публиковать свою рукопись, хотя и послал её Декарту, получив от него экземпляр «Геометрии». Ферма, так же как и Декарт, опирался в этом на труды Виета. Ферма объяснил, как уравнение с двумя неизвестными задаёт кривую, и рассмотрел простейшие примеры. Он доказал, что уравнение первой степени задаёт прямую, и рассмотрел примеры уравнений второй степени, и соответствующие им кривые.

Ферма захотел доказать предложения из утерянного сочинения Аполлония, которые дошли до нас благодаря Паппу. Разработанный им метод позволил легко их доказать. Например, Ферма доказывает, следующую теорему Аполлония: геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до данных точек постоянна, — это окружность.

Ферма применял свою аналитическую геометрию и к определению геометрических мест в пространстве. При этом он, однако, не использует пространственные координаты, а определяет поверхности, исследуя свойства линии их пересечения с любой плоскостью. В частности, Ферма доказывает, что геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до данных точек постоянна (или, в более общем случае, удовлетворяет уравнению 1-й степени), — это сфера.

5.12.3. Теория чисел

Интерес Ферма к теории чисел во многом связан с двумя работами Баше де Мезириака (1581-1638). В книге «Приятные и занимательные задачи» (1612) Баше разработал метод решения уравнения $ax-by=c$ в целых числах, что побудило Ферма заняться решением в целых числах уравнений второй степени. Кроме того, Баше издал с комментариями «Арифметику» Диофанта в подлиннике и с латинским переводом (1621). Ферма внимательно читал это издание Диофанта, делая пометки на полях. Именно из этих пометок нам известно большинство результатов Ферма по теории чисел.

Наиболее известен Ферма тем, что сформулировал так называемую *великую теорему Ферма*: уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет ненулевых целых решений при $n > 2$. Эту теорему он записал на полях книги Диофанта и сделал приписку, что на полях слишком мало места, чтобы привести здесь найденное им остроумное доказательство этой теоремы. Позднее Ферма сообщил доказательство только для $n = 4$, поэтому вряд ли найденное им доказательство было верно. Лишь в 1995 году Эндрю Уайлс опубликовал доказательство этой теоремы, найденное им в 1994 году.

В теории чисел Ферма разработал новый метод доказательства — метод бесконечного спуска. Сначала он доказывал методом бесконечного спуска только утверждения о несуществовании. Например, что не существует прямоугольного треугольника с целочисленными сторонами, площадь которого — полный квадрат. В более развёрнутом виде, чем в изложении самого Ферма, это доказательство выглядит следующим образом. Пусть стороны прямоугольного треугольника, площадь которого является полным квадратом, равны $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$ и $2xy$. Если две стороны имеют общий множитель k, то тогда третья сторона тоже делится на k, а площадь делится на k^2. Поэтому можно рассмотреть подобный треугольник, стороны которого уменьшены в k раз. Таким образом, можно считать, что числа x^2+y^2, x^2-y^2 и $2xy$ попарно взаимно простые. Следовательно, числа x и y взаимно простые, а числа $x+y$ и $x-y$ нечётные. Поэтому числа $x+y$ и $x-y$ взаимно простые. Площадь $xy(x-y)(x+y)$ является полным квадратом, причём все сомножители взаимно простые. Следовательно, $x = u^2$, $y = v^2$, $u^2 + v^2 = p^2$ и $u^2 - v^2 = q^2$. Из двух последних равенств получаем $2v^2 = p^2 - q^2 = (p-q)(p+q)$. Числа $p+q$ и $p-q$ чётные, так как числа p^2 и q^2 нечётные. Других общих множителей, кроме 2, эти числа иметь не могут, так как иначе эти множители имели бы числа $2p$ и $2q$, а значит, и числа $p^2 = x+y$ и $q^2 = x-y$. Следовательно, $p+q = 2m^2$ и $p-q = n^2$ или $p+q = n^2$ и $p-q = 2m^2$, где число n чётное. Таким образом,

$$u^2 = \frac{p^2+q^2}{2} = (m^2)^2 + \left(\frac{n^2}{2}\right)^2.$$

Целые числа m^2, $\frac{n^2}{2}$ и u являются сторонами нового прямоугольного треугольника, площадь которого равна квадрату целого числа $\frac{mn}{2}$. Стороны этого нового треугольника меньше сторон исходного, так как квадрат его гипотенузы $u^2 = x$ является множителем одного из катетов исходного треугольника. Бесконечное уменьшение сторон целочисленных треугольников невозможно, поэтому предположение о существовании прямоугольного треугольника с целочисленными сторонами, площадь которого — полный квадрат, неверно.

Если предположить, что разность $u^4 - v^4$ является полным квадратом, то те же самые рассуждения приводят к противоречию. Из этого следует, что уравнение $u^4 = v^4 + t^4$ не имеет решений в натуральных числах.

Метод бесконечного спуска хорошо приспособлен к доказательству несуществования. Ферма пришлось потрудиться, чтобы научиться доказывать методом бесконечного спуска и утверждения о существовании. Но он добился и этого и доказал методом бесконечного спуска, например, что любое простое число вида $4n+1$ представляется суммой двух квадратов.

Ферма полагал, что все числа $F(n) = 2^{2^n} + 1$ простые. При этом он, правда, отмечал, что у него нет полного доказательства Эйлер показал, что число $F(5)$ не простое — оно делится на 641.

Ферма установил, что для кажого числа a, не делящегося на простое число p, существует такое число f, являющееся делителем числа $p-1$, что $a^f - 1$ делится на p. Из этого следует, что $a^{p-1} - 1$ делится на p (это стандартная формулировка так называемой *малой теоремы Ферма*).

Ферма впервые поставил вопрос о представимости простых чисел квадратичной формой $ax^2+bxy+cy^2$ и получил ответ для форм x^2+y^2, $x^2 \pm y^2$, $x^2 + 3y^2$ и $x^2 + xy + y^2$. Ферма выяснил, что в виде $x^2 + y^2$ представляются только прстые числа вида $4n+1$, причём каждое простое число такого вида представляется в виде суммы двух квадратов единственым образом. (Этот результат был известен ещё Диофанту). В виде $x^2 + 2y^2$ представимы простые числа вида $8n + 1$ и $8n + 3$ и только они. В виде $x^2 + 3y^2$ и $x^2 + xy + y^2$ представимы простые числа вида $6n + 1$.

Баше де Мезириак в своих комментариях к изданию «Арифметики» Диофанта высказал предположение, что любое натуральное число является суммой не более чем четырёх квадратов целых чисел. Ферма утверждал, что он умеет доказывать более общее утверждение: любое n-угольное число является суммой n-угольных чисел в количестве не более n. Своё доказательство Ферма никому не сообщил. Для $n = 4$ эту теорему доказали Эйлер и Лагранж, для $n = 3$ Гаусс (1801), а в общем случае Коши (1815).

В 1657 году Ферма предложил своим корреспондентам найти общее правило решения в целых числах уравнения $ax^2 + 1 = y^2$. Ферма предложил им также рассмотреть случаи, когда $a = 149$, 109 или 433. Английские математики сначала его не поняли: Броункер считал, что это уравнение нужно решить в рациональных числах. После разъяснений он нашёл решение для $a = 109$ с помошью разложения числа $\sqrt{109}$ в цепную дробь. Но он не смог доказать, что оно нашёл минимальное решение и что его способом можно найти все решения.

В статье 1765 года Эйлер назвал уравнение $y^2 = ax^2 + 1$ *уравнением Пелля*. Сам Джон Пелль (1611-1685) ничего не публиковал об этом уравнении, но это уравнение исследуется в книге швейцарского математика Иоганна Рахна (1622-1676). Пелль обучал его математике и принимал участие в написании книги. По-видимому, Эйлеру была известна степень участия Пелля в исследовании этого уравнения.

Ферма (и независимо от него Декарт) нашёл две новые пары дружественных чисел 17 296 и 18 416, 9 363 584 и 9 437 056.

Поставленные Ферма арифметические проблемы 70 лет не поддавались решению, пока ими не занялся Эйлер, решив многие из них.

5.13. Жиль Персон Роберваль (1602-1675)

В 1628 году Жиль Персон получил разрешение добавить к своей фамилии «де Роберваль», и с тех пор был известен под этим именем. Роберваль получил много важных результатов, относящихся к квадратурам (вычислению интегралов), но опубликовал лишь две не очень существенные статьи. У него были основания держать в секрете свои методы. Согласно воле Петра Рамуса, основателя кафедры Французского коллежа, которую занимал Роберваль, её профессор каждые три года должен был объявлять конкурс, ставя публично несколько вопросов. Тот, кто побеждал в конкурсе, имел право занять кафедру. Именно победив в таком соревновании Роберваль стал профессором в 1634 году, и он остерегался разглашать свои методы. Его основные труды были впервые напечатаны лишь посмертно, в 1693 году.

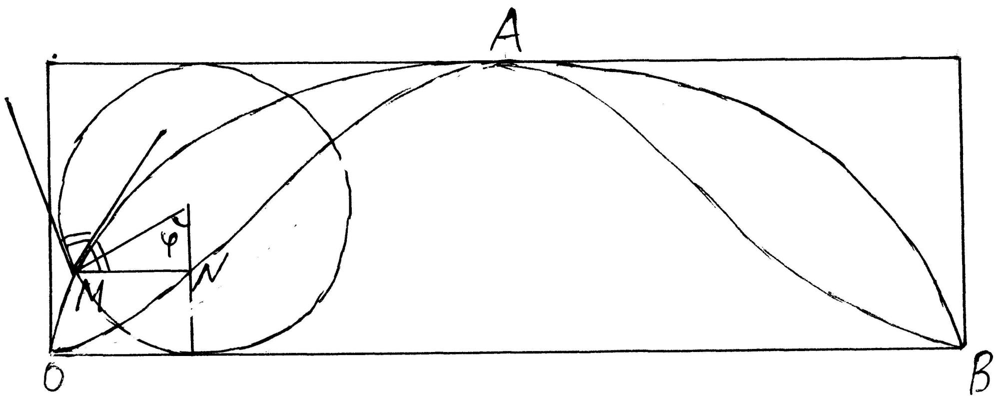

Рис. 5.3.

Около 1634 года Роберваль вычислил площадь под кривой $y = x^n$ для всех натуральных n. В 1636 году Ферма написал Робервалю о своей квадратуре кривых $y = x^n$ для всех натуральных n, не сообщая своего метода. Роберваль ответил, что он тоже пришёл к этому результату, используя неравенства

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < \sum_{k=1}^{m} k^n.$$

Роберваль вычислил также площадь под синусоидой.

Галилей назвал кривую, которую описывает точка обода движущегося колеса, *циклоидой*, и попытался определить площадь одной арки этой кривой. Мерсенн поставил Робервалю эту задачу, и тот в 1636 году дал следующее её решение с помощью метода Кавальери (в 1638 году это повторил Декарт, тоже воспользовавшись принципом Кавальери). Пусть колесо повернулось на угол φ и точка, описывающая циклоиду, находится в положении M (рис. 5.3). Наряду с циклоидой Роберваль рассмотрел вспомогательную кривую, описываемую проекцией N точки M на вертикальный диаметр катящегося колеса. Эту кривую он назвал спутницей циклоиды. Из симметричности спутницы циклоиды следует, что она делит пополам площадь прямоугольника, описанного вокруг арки циклоиды. Поэтому площадь под аркой циклоиды равна сумме половины площади этого прямоугольника и двух лепестков, заключённых между циклоидой и её спутницей. Сечение MN

одного из лепестков одновременно является и сечением полукруга, радиус которого равен радиусу катящейся окружности. Поэтому площадь арки циклоиды равна $\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot 2r + \pi r^2 = 3\pi r^2$. Нетрудно убедиться, что спутница циклоиды — синусоида. Роберваль вычислил также объём тела, образованного при вращении циклоиды вокруг основания.

Между 1635 и 1638 годами Роберваль построил касательную к циклоиде кинематическим методом, основываясь на сложении скоростей по правилу параллелограмма. Движение точки M (см. рис. 5.3) складывается из двух движений: движения по окружности и поступательного движения, параллельного OB. Скорости этих движений равны, потому что длина окружности равна OB. Поэтому касательная к циклоиде — биссектриса угла между прямой MN и касательной к окружности в точке M.

Роберваль не публиковал свои результаты о квадратуре циклоиды. Первым квадратуру циклоиды опубликовал Торричелли в 1644 году в своих «Геометрических трудах».

В 1643 году Роберваль доказал равенство дуг параболы и спирали Архимеда при определённом выборе параметров.

5.14. Эванжелиста Торричелли (1608-1647)

Торричелли не был прямым учеником Галилея, но многое почерпнул из его работ. В 1641 году он стал ассистентом Галиллея, но Галилей через несколько месяцев умер.

Торричелли первым дал пример спрямления кривой в 1640 году; он определил отрезок, равный длине логарифмической спирали, отсчитываемой от полюса.

В работе «О максимумах и минимумах» (1640) решил задачу, поставленную Ферма: найти точку, для которой сумма расстояний от вершин треугольника наименьшая. Эта точка получила название *точка Торричелли*.

В работе «О движении естественно падающих и брошенных тел» (1641, опубликовано в 1644 году) Торричелли построил касательную к параболе кинематическим методом (с помощью сложения скоростей по правилу параллелограмма). В той же работе он нашёл огибающую семейства парабол — траекторий тел, бросаемых из одной и той же точки под разными углами. Это был первый пример нахождения огибающей семейства кривых. Эта огибающая — так называемая *парабола безопасности*.

Торричелли первым опубликовал квадратуру циклоиды в 1644 году в своих «Геометрических трудах», написанных в 1641 году. Но эту квадратуру до него получил в 1634 году Роберваль, не опубликовавший свои результаты.

Торричелли знаменит своими опытами с вакуумом, приведшим к изобретению барометра.

5.15. Франс ван Схоотен (1615-1660)

Познакомившись с работами Декарта, ван Схоотен так восхитился ясностью метода Декарта, что решил, будто греки тоже знали этот метод и пользовались им, чтобы получать свои результаты, но потом излагали их на запутанном языке геометрической алгебры. Ван Схоотен вместе со своими учениками, наиболее выдающимися из которых были Гюйгенс и Гудде, много способствовал распространению и развитию декартовой геометрии. В 1649 году он перевёл на латинский язык «Геометрию» Декарта и снабдил её комментариями. Во втором латинском издании (1659-1661) есть три приложения, написанные его учениками. По книге ван Схоотена «Математические этюды» изучал математику Ньютон. В этой книге ван Схоотен первым предложил способ построение эллипса с помощью верёвки, концы которой прикреплены к двум колышкам.

5.16. Джон Валлис (1616-1703)

Джон Валлис прославился во время Английской революции (войны короля и парламента) расшифровкой перехваченных писем сторонников короля.

Валлис предложил первую геометрическую интерпретацию мнимых чисел. Он основывался на построении среднего геометрического двух отрезков с помощью окружности и интерпретировал $\sqrt{-ab}$ как соответствующий (при этом построении) отрезок, перпендикулярный отрезкам a и $-b$ (или $-a$ и b). Но эта интерпретация не получила поддержки.

В книге о конических сечениях (1655) показал, что коники — это кривые, которые задаются уравнениями второй степени. Именно он первым ввёл отрицательные координаты (Декарт рассматривал только положительные координаты). Валлис рассматривает в этой книге не только кривые второй степени, но и кубическую параболу $x^3 = a^2y$. Опыта работы с отрицательными координатами тогда ещё было мало, и он ошибочно рисует график кубической параболы так же, как график обычной параболы (т.е. $y > 0$ при $x < 0$). Но уже в следующем году Валлис исправляет эту ошибку. Он считал, что Архимед и другие древние так запрятали методы, которыми они пришли к своим открытиям, что теперь проще изобрести всё заново, чем пытаться разобраться в их работах.

В книге о конических сечениях Валлис впервые использовал символ ∞. У Валлиса он символизоровал кривую, которую можно обходить бесконечно много раз. Этот же символ он использовал и в книге «Арифметика бесконечных», имевшей гораздо большее влияния.

Основной труд Валлиса — книга «Арифметика бесконечных» (Arithmetica infinitorum, 1656). Именно в этой книге содержится его наиболее знаменитое открытие — представление числа $\frac{4}{\pi}$ в виде бесконечной дроби.

Большое влияние на Валлиса оказала теория неделимых Кавальери. Сначала Валлис получает новым (арифметическим) методом результат, ранее доказанный геометрически. Для вычисления площади под параболой он вычислил отношение

$$\frac{0^2 + a^2 + \cdots + (na)^2}{(na)^2 + (na)^2 + \cdots + (na)^2} = \frac{0^2 + 1^2 + \cdots + n^2}{n^2 + n^2 + \cdots + n^2}$$

и показал, что при увеличении n оно стремится к $\frac{1}{3}$. После этого Валлис решил применить этот метод к кубам и более высоким степеням и получил, что

$$\frac{0^r + a^r + \cdots + (na)^r}{(na)^r + (na)^r + \cdots + (na)^r} \approx \frac{1}{r+1}$$

для натуральных r. Используя интерполяцию и метод неполной математической индукции, Валлис получил квадратуру кривых $y = x^r$ для всех рациональных r.

Затем Валлис занялся вычислением интеграла $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{4}$. Его целью было получить формулу для числа $\frac{\pi}{4}$. Это оказалось трудной задача. Сначала ему удалось вычислить интегралы $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ для натуральных n, но для $n = \frac{1}{2}$ ему ничего не удалось сделать. После этого он занялся вычислением обратных чисел, и вывел формулу $1 : \int_0^1 (1 - x^{\frac{1}{p}})^q dx = \frac{(p+q)!}{p!q!}$. Валлиса интересовал случай $p = q = \frac{1}{2}$, и в этом случае снова ничего не получилось. Но для $p = \frac{1}{2}$ и натуральных q Валлис смог вычислить нужный интеграл:

q	1	2	3	4
интеграл	$\frac{3}{2}$	$\frac{3\cdot5}{2\cdot4}$	$\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}$	$\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8}$

Валлис обозначил число $\frac{4}{\pi}$ специальным знаком $\square$. Через это число он смог выразить нужный интеграл для полуцелых q:

q	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
интеграл	$\square$	$\frac{4}{3}\square$	$\frac{4\cdot6}{3\cdot5}\square$	$\frac{4\cdot6\cdot8}{3\cdot5\cdot7}\square$

И последнее наблюдение: если a_1, a_2, a_3 и a_4 — значения интеграла для q, расположенных в порядке возрастания, то

$$\frac{a_1}{a_2} > \frac{a_2}{a_3} > \frac{a_3}{a_4}.$$

Применяя это неравенство для q, равных $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$, 4, Валлис получает неравенства

$$\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8}\sqrt{\frac{8}{7}} > \square > \frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8}\sqrt{\frac{9}{8}}.$$

Затем, устремляя q к бесконечности, Валлис пришёл к своей знаменитой формуле

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \ldots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \ldots}$$

В 1663 году Валлис получил доказательство пятого постулата Евклида, исходя неверного предположения, что для любой фигуры существует подобная ей фигура произвольной величины. Валлис считал это предположение естественным, потому что для любого круга существует подобный ему круг произвольного размера.

В книге «Трактат об алгебре» (1685) Валлис привлёк внимание математиков к книге по алгебре Томаса Гарриота, ясно изложив её. (Валлис утверждал, что все результаты Декарта по алгебре взяты у Гарриота.) Валлис принимает отрицательные корни и комплексные корни.

5.17. Вильям Броункер (1620-1684)

Лорд Броункер был первым президентом Королевского общества.

Валлис, до публикации в 1656 году полученного им представления числа $\frac{4}{\pi}$ в виде бесконечной дроби, показал эту формулу Броункеру, и тот преобразовал её к виду

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \ldots}}}}}$$

Броункер не объяснил, каким методом он преобразовал одну дробь в другую.

В 1658 году Броункер с помощью цепных дробей получил решение уравнения, предложенного Ферма (уравнение Пелля).

Не позже 1657 года Броункер получил квадратуру площади гиперболы $xy = 1$ от $x = 1$ до $x = 2$ в виде ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \ldots$$

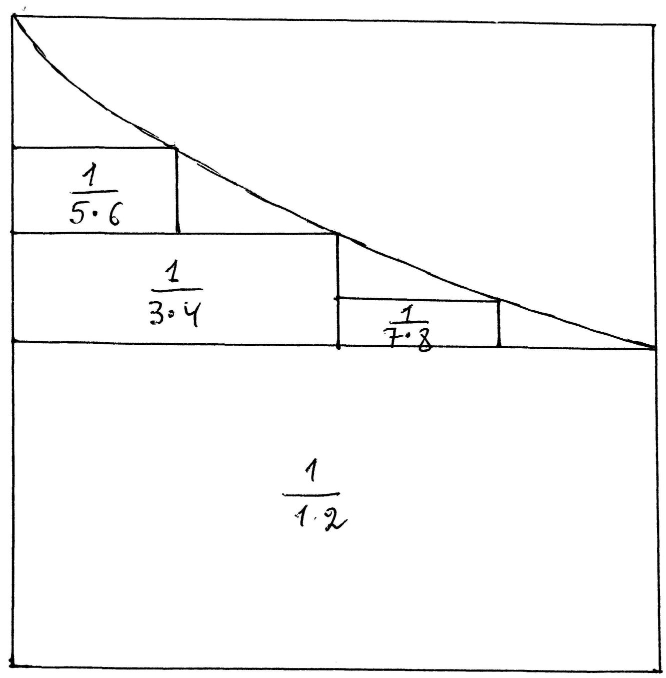

Рис. 5.4.

Но он опубликовал этот результат лишь 1668 году, и к этому времени эта квадратура была уже получена другим способом и опубликована в 1659 году итальянским математиком Пьетро Менголи (1625-1686).

Для доказательства Броункер берёт квадрат со стороной 1, содержащий рассматриваемую дугу гиперболы, и делит сторону квадрата, лежащую на оси абсцисс, сначала пополам, потом на 4 части, и т.д. Тогда можно построить прямоугольники, площади которых равны $\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{3\cdot 4}$, $\frac{1}{5\cdot 6}$, $\frac{1}{7\cdot 8}$ и т.д. (рис. 5.4). Броункер доказывает сходимость полученного ряда, что математики впоследствии делали редко.

5.18. Николаус Меркатор (1620-1687)

Немецкий математик Николаус Кауфман шесть лет преподавал в университете Копенгагена, а потом, когда университет был закрыт во время чумы, переехал в Лондон и давал там частные уроки. Он перевёл свою фамилию, означавшую по-немецки «купец, торговец», на латынь, и стал называться Меркатор.

В 1668 году Меркатор опубликовал книгу «Логарифмотехника». В этой книге он одним из первых рассмотрел бесконечный ряд, отличный от геометрической прогрессии. Меркатор пришёл к удачной мысли записать уравнение гиперболы в виде $y = \frac{1}{1+x}$. Эту дробь он разложил в бесконечный ряд $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ и проинтегрировал его почленно. В результате он получил квадратуру гиперболы в виде

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x} = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \ldots$$

Вопрос сходимости этого ряда Меркатор не рассматривал.

До Меркатора такое же разложение логарифмической функции получили Гудде (1656) и Ньютон (1665), но они не опубликовали свои результаты.

5.19. Винченцо Вивиани (1622-1703)

Вивиани — ученик Галилея. С Галилеем он познакомился в 1639 году, когда тот уже ослеп и находился под домашним арестом. Первым нашёл касательную к циклоиде. Вивиани сделал попытку восстановить книгу V «Конических сечений» Аполлония, в которой разбирались некоторые вопросы о максимумах и минимумах (в то время были известны только первые 4 книги Аполлония из 8). Посвященная этому книга Вивиани «О максимальных и минимальных значениях» вышла в 1659 году. Вивиани снова нашёл построение нормалей к коническому сечению, причём он нашёл именно решение Аполлония. Гипотезы Вивиани потвердил перевод труда Аполлония, изданный в 1661 году Борелли на основе найденной им арабской рукописи, содержащей первые 7 книг Аполлония. В своей книге Вивиани рассматривает и другие задачи на максимум и минимум. Одна из таких задач — найти точку, сумма расстояний от которой до трёх данных точек имеет минимальное значение. Этой задачей занимался уже ранее Торричелли.

В 1692 году в качестве вызова другим матеметикам Вивиани предложил задачу, связанную с вычислением площадей частей сферы, которая приводила к рассмотрению кривой, впоследствии получившей название *кривая Вивиани*. Эта кривая — пересечение сферы и цилиндра (радиусом сферы служит диаметр кругового сечения цилиндра, т.е. центр сферы лежит на образующей цилиндра и радиус сферы равен диаметру цилиндра).

Вивиани написал первую биографию Галилея и собрал много его рукописей. Это собрание впоследствии оказалось весьма полезным при издании сочинений Галилея.

5.20. Блез Паскаль (1623-1662)

Отец Блеза Этьенн Паскаль (1588-1651) известен тем, что он открыл кривую, называемую *улиткой Паскаля*. Он решил, что его сын не будет изучать математику до 15 лет, и из их дома были убраны все учебники математики. Но в 12 лет Паскаль самостоятельно открыл, что сумма углов любого треугольника равна 180°; узнав об этом, отец разрешил ему читать Евклида. В 14 лет Паскаль начал сопровождать своего отца на научные собрания у Мерсенна. В 15 лет Паскаль познакомился с работами Дезарга, и они привели его в восторг.

В 1640 году Паскаль напечатал в виде афиши тиражом 50 экземпляров своё сочинение «Опыт о кониках». Эти афиши были прибиты на стенах домов и розданы некоторым учёным. В этом сочинении было несколько определений и лемм; доказательства отсутствовали. Основной теоремой была теорема о шестиугольнике, вписанном в окружность: точки пересечения продолжений сторон такого шестиугольника лежат на одной прямой. Паскаль также отметил, что с помощью центральной проекции можно получить аналогичное утверждение для шестиугольника, вписанного в любое коническое сечение. При этом Паскаль воздаёт должное Дезаргу, разработавшему теорию проективных преобразований, как одному из наиболее искусных математиков того времени.

В 1647 году Паскаль занимался экспериментами с атмосферным давлением и установил существование вакуума. Эту тему он обсудил с Декартом, который не поверил в существование вакуума, и написал

Гюйгенсу, что у Паскаля слишком много вакуума в голове.

В 1653 году Паскаль написал «Трактат о равновесии жидкостей», в котором содержится закон Паскаля для давления.

Важную роль в развитии комбинаторики сыграл «Трактат об арифметическом треугольнике» (1654, опубликован в 1665 году). Там записана таблица сочетаний в треугольной форме. Но в похожем виде эта таблица уже встречалась в Азии и в Европе (у Штифеля и у Тартальи). Паскаль ввёл обозначение C_n^m и доказал соотношение $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$, предварительно доказав методом полной математической индукции, что $C_n^m = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}$. Но этот закон образования биномиальных коэффициентов посредством умножения тоже был известен ранее — его знал Пьер Ферма (1636). Паскаль первым ввёл метод полной математической индукции.

В 1654 году возникла переписка между Паскалем и Ферма по поводу задачи о справедливом разлеле ставки, когда игра прервана, и одному игроку недостаёт выигрыша двух партий, а другому — трёх. Ферма рассуждал так. Игра может продолжаться ещё не более четырёх партий. Для четырёх партий всего возможно 16 исходов. Из них в 11 случаях выигрывает первый, а в 5 второй. Поэтому ставку нужно разделить в отношении 11:5. Паскаль решает задачу о разделе ставки в общем случае, изучая таблицу биномиальных коэффициентов. Эта переписка заложила основы теории вероятностей.

В работах Паскаля получил дальнейшее развитие метод интегральных сумм. Он пользовался терминами из теории неделимых («сумма линий»), но всегда понимал под ними интегральные суммы. Паскаль считал, что метод неделимых по существу тождествен методу древних, отличаясь лишь манерой выражения, и потому можно без опасения пользоваться языком неделимых.

В 1658 году Паскаль применил принцип Кавальери для вычисления площади любого сегмента циклоиды и нахождения центра масс такого сегмента.

Сборник работ Паскаля о методе интегральных сумм был издан в 1659 году. Один из основных результатов Паскаля в этой области —

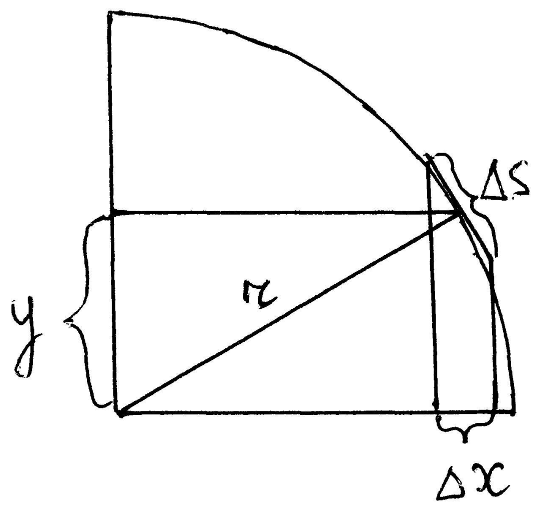

Рис. 5.5.

вычисление интегралов $\int_0^\alpha \sin\varphi\, d\varphi = 1 - \cos\alpha$ и $\int_0^\alpha \cos\varphi\, d\varphi = \sin\alpha$. Он воспользовался для этого следующим замечанием. Из подобия треугольников следует, что $\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{r}{y}$, где r — радиус окружности (рис. 5.5). Малый отрезок Δs можно заменить на дугу окружности. После этого при $r = 1$ получаем $\int_\alpha^\beta \sin\varphi\, d\varphi = \cos\alpha - \cos\beta$.

Лейбниц, изучая труды Паскаля, обратил особое внимание на треугольник с гипотенузой Δs. Он назвал этот треугольник *характеристическим*. Лейбниц обнаружил, что с помощью характеристического треугольника для произвольной кривой можно вычислять площадь поврехности, образованной при вращении этой кривой.

Интересным свидетельством того, с каким трудом усваивались операции с отрицательными числами, является следующее высказывание в знаменитой книге Паскаля «Мысли»: Слишком несомненная истина ставит в тупик (я знаю людей, которые так и не взяли в толк, что, если от нуля отнять четыре, в результате получится нуль).

5.21. Джованни Доменико Кассини (1625-1712)

Джованни Доменико Кассини родился в Италии. Переехав жить во Францию, он изменил своё имя на французский манер: Жан-Доминик.

В 1668 году, наблюдая за спутниками Юпитера, Кассини обнаружил расхождение в данных, которое он объяснил тем, что скорость света конечна. Это было первое предположение о конечности скорости света. Кассини был столь консервативен, что сам отказался от этой гипотезы и искал другие объяснения своих наблюдений. Но именно данные, полученные Кассини, через 7 лет послужили для первого вычисления скорости света Рёмером.

В 1680 году предложил заменить эллипсы Кеплера кривыми четвёртого порядка, которые назвали впоследствии *овалами Кассини*. Овал Кассини — это множество точек, для которых произведение расстояний от двух фиксированных точек (фокусов) постоянно. Лемниската Бернулли входит в это семейство. (Якоб Бернулли исследовал эту кривую на 14 лет позже Кассини.)

5.22. Иоганн Гудде (1628-1704)

Ученик ван Схоотена Иоганн Гудде 30 лет был бургомистром Амстердама. До того как он начал работать в городском совете в 1663 году, Гудде занимался математикой. Он открыл, что двукратный корень a многочлена $f(x)$ является также и корнем многочлена $f'(x)$, а потому $x-a$ можно найти как общий делитель многочленов $f(x)$ и $f'(x)$. Он пришёл к этому выводу из чисто алгебраических соображений, не производя дифференцирования. Своё правило Гудде сформулировал следующим образом. Двукратный корень многочлена $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$ является также корнем многочлена $ax^n + (a+b)a_1x^{n-1} + (a+2b)a_2x^{n-2} + \cdots + (a+nb)a_n$ для любых a и b. Для удобства вычислений Гудде полагал $a = n$ и $b = -1$. Тогда второй многочлен после сокращения на x оказывается равным $f'(x)$.

Гудде указывает, что предложенное им правило можно применить как к нахождению касательных, так и к решению задач на максимум и минимум. Разбирая рассмотренные Декартом примеры, Гудде показывает, что его правило приводит к более простому нахождения касательной, чем непосредственное применение метода неопределённых коэффициентов.

5.23. Христиан Гюйгенс (1629-1695)

Голландский математик Гюйгенс родился и умер в Гааге, но долгое время жил в Париже. В 1665 году Кольбер (фактический глава правительства Людовика XIV) пригласил его возглавить создаваемую им Королевскую Академию Наук. С 1666 по 1681 год Гюйгенс жил в основном в Париже, но потом уехал на родину для лечения. Вернуться в Париж он уже не смог, потому что во Франции в это время начались гонения на протестантов.

В 1655 году Гюйгенс впервые посетил Париж. Там он познакомился работами Паскаля и Ферма по теории вероятностей и заинтересовался этой областью математики. В 1657 году Гюйгенс написал сочинение «О расчётах в азартной игре», которое вышло в виде приложения к «Математическим этюдам» его учителя ван Схоотена. Затем оно необнократно переиздавалось в виде отдельной книги, которая долгое время была единственной книгой по теории вероятностей. Гюйгенс вводит понятие математического ожидания. Именно оно было первым понятием из теории вероятностей (понятие вероятности события ввёл Якоб Бернулли много лет спустя).

В сочинении «Маятниковые часы» (1673) Гюйгенс доказал изохронность циклоидального маятника. Там же он ввёл понятие эволюты кривой (огибающей семейства нормалей к кривой) и нашёл эволюты циклоиды и параболы. Гюйгенс показал, что эволюта циклоиды — это некоторая другая циклоида, а эволюта параболы — полукубическая парабола. Гюйгенс изучил также эволюту эллипса. Он получил спрямление циклоиды и полукубической параболы.

Гюйгенс применил к кругу метод, использованный Архимедом для квадратуры параболы. Это позволило ему получить более точные оценки площади круга через площадь вписанного и площадь описанного многоугольников, чем те, которые получил Архимед. При одном и том же числе сторон многоугольника неравенства Гюйгенса давали вдвое больше знаков π, чем неравенства Архимеда.

5.24. Исаак Барроу (1630-1677)

Летом 1663 года в Кембридже появилась должность Лукасовского профессора математики благодаря пожертвованию Генри Лукаса. Эту должность занял Исаак Барроу (до этого он был профессором греческого языка). Во время семестра 1668-69 годов он читал лекции по оптике, которые посещал Ньютон; эту тему они с Ньютоном часто обсуждали.

«Лекции по оптике» Барроу опубликованы в 1669 году, «Лекции по геометрии» в 1670 году, а «Лекции по математике» в 1683 году. Барроу не готовил свои книги к публикации. Среди других этим занимался и Ньютон. Он рекомендовал некоторые улучшения и кое-что добавил.

Лекции по оптике более теоретические, чем практические. Они в основном посвящены геометрической оптике. В лекциях по геометрии Барроу описывает метод касательных. Его обозначения были уже гораздо удобнее обозначений Ферма. Барроу установил, что задача вычисления площади под кривой и задача о построении касательной взаимно обратны. При этом он исходил из механических идей Галилея и Торричелли.

Большинство математических работ Барроу выполнены с 1663 года по 1669 год. В 1669 году Барроу отказался от должности Лукасовского профессора, потому что был назначен священником короля. Его место занял Ньютон.

В «Лекциях по геометрии» содержится неравенство $(1+x)^n > 1+nx$ для положительных x и целых $n > 1$. Через 20 лет это неравенство независимо обнаружил Якоб Бернулли и опубликовал его в своей первой работе по теории рядов. Теперь это неравенство обычно называют *неравенством Бернулли*.

5.25. Кристофер Рен (1632-1723)

Рен и независимо от него Гук задолго до Ньютона предположили закон обратных квадратов для гравитационного притяжения тел.

В 1658 году Рен получил спрямление циклоиды, т.е. вычислил длину её дуги, используя метод исчерпывания. Он первым решил задачу Кеплера о делении в данном отношении полукруга прямой, проходящей через данную точку на диаметре этого полукруга.

Рен играл ведущую роль в кружке учёных, который в 1662 году стал Королевским обществом. С 1680 по 1682 годы он был президентом Королевского общества.

Занимаясь оптикой, Рен обнаружил, что однополостный гиперболоид заполнен двумя семействами прямых; этот результат опубликован в 1669 году.

Рен много занимался архитектурой и был ведущим архитектором Англии в то время. После пожара Лондона (1666) выполнил геодезическую съёмку разрушенной части города с помощью трёх других геодезистов, одним из которых был Гук. Составил план восстановления города. Под его наблюдением была восстановлена 51 церковь.

5.26. Вильям Нейль (1637-1670)

В 1657 году Нейль дал первый пример алгебраического спрямления алгебраической кривой. Он спрямил полукубическую параболу $y^2 = x^3$, которую с тех пор стали называть *параболой Нейля*. Нейль сообщил этот неожиданный результат Броункеру и Рену. Неожиданным он был потому, что Декарт и многие другие были уверены, что длины дуг алгебраических кривых не могут выражаться алгебраически.

5.27. Джеймс Грегори (1638-1675)

В 1667 году опубликовал книгу «Истинная квадратура круга и гиперболы», в которой изложил основы геометрии бесконечно малых.

В частности, он ввёл понятие сходимости, близкое к современному. В этой книге он также дал определение алгебраической функции и трансцендентной функции, алгебраического числа и трансцендентного числа, и попытался доказать, что числа π и e трансцендентные, но в его доказательстве была ошибка. Экземпляр этой книги Грегори послал Гюйгенсу. Тот ничего не ответил, но напечатал рецензию, в которой утверждал, что он первым открыл некоторые из опубликованных Грегори результатов. Это озадачило Грегори, который не мог знать об этих открытиях Гюйгенса, и впоследствии он не публиковал многие из своих открытий.

В 1668 году в книге «Геометрические этюды» Грегори предложил ряд

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right).$$

Эта книга была первой попыткой написать учебник анализа. В ней впервые доказано, что метод касательных (дифференцирование) и метод квадратур (интегрирование) взаимно обратны.

В 1668 году Грегори предложил формулу численного интегрирования, впоследствии предложенную Симпсоном и получившую название *формула Симпсона*.

В 1670 году Грегори уже владел общим разложением бинома $(1 + x)^{p/q}$, т.е. он открыл разложение бинома независимо от Ньютона и примерно одновременно с ним. В 1671 году Грегори открыл *ряд Тейлора*, задолго до самого Тейлора (1715). К началу 1672 году Грегори получил несколько важнейших разложений в ряд: для арктангенса, для тангенса, для секанса.

Грегори одним из первых начал понимать, что уравнение пятой степени нельзя решить в радикалах.

5.28. Филипп де Лагир (1640-1718)

Отец Лагирра был художником и дружил с Дезаргом. Лагирр тоже готовился стать художником и чертёжником. В 1660 году он на 4 года поехал в Италию для совершенстования художественного мастерства. В это время у него возник интерес к изучению перспективы в живописи, и постепенно он стал заниматься математикой больше, чем живописью.

В 1679 году Лагир мимоходом использовал координаты в пространстве, получив уравнение одной поверхности. Это было первым применением координат в пространстве, потому что Ферма и Декарт использовали только координаты на плоскости.

В геометрии Лагир в основном занимался коническими сечениями, применяя к ним проективный подход. Он обнаружил, что если точка движется по некоторой прямой, то её поляра вращается вокруг некоторой точки.

Лагир ввёл названия «абсцисса» и «ордината». Это был важный шаг, потому что до этого с координатами была большая путаница, часто приводившая даже хороших математиков к ошибкам, особенно при постепенном введении отрицательных координат. При этом особенно долго геометры не хотели вводить отрицательные абсциссы.

5.29. Георг Мор (1640-1697)

Георг Мор был почти неизвестен в своё время. В 1672 году он опубликовал книгу «Датский Евклид», которая была прочно забыта до 1928 года (возможно, не было продано ни одного экземпляра этой книги). В 1928 году датский математик Хьельмслев обнаружил, что в этой книге содержится доказательство того, что любое построение, которое можно выполнить циркулем и линейкой, можно выполнить одним циркулем. За прошедшее время эта теорема, конечно, уже была открыта заново. Это сделал спустя 125 лет (в 1797 году) итальянский математик Маскерони.

5.30. Секи Кова (1642-1708)

Японский математик Секи Кова сделал несколько выдающихся открытий, опредедив евкропейских математиков. В 1683 году он, разрабатывая китайский метод решения систем линейных уравнения, пришёл к понятию определителя. В заметках Лейбница это понятие появляется примерно в то же время, но его письмо к Лопиталю, где понятие определителя сформулировано уже вполне чётко, написано на 10 лет позже.

Секи Кова знал степенной ряд для $(\arcsin x)^2$, вывод которого показывает, что ему была известна теорема о биноме по крайней мере для показателя $\frac{1}{2}$. Секи Кова также открыл числа Бернулли раньше Якоба Бернулли.

Секи Кова получил 24 верных десятичных знака числа π.

5.31. Исаак Ньютон (1643-1727)

5.31.1. Биография

Когда Ньютону было около 15 лет, его мать забрала его из школы, чтобы он занимался хозяйством. Это получалось у него плохо; он предпочитал сидеть под деревом с книгой или что-нибудь мастерить. Бывший учитель Ньютона посетил его мать и постарался убедить её дать сыну возможность завершить обучение в школе и подготовиться к поступлению в университет, чтобы не загубить на ферме столь многообещающий ум. Он даже предложил внести за него плату за обучение. Для матери Ньютона, едва умевшей читать и почитавшей только землевладение, это было крушением всех надежд. Она обратилась за советом к брату, на которого полагалась, и неожиданно он поддержал мнение учителя. Ньютон вернулся в школу и в 1661 году отправился в Кембридж.

Очень большое влияние на Ньютона, начинающего изучать математику, оказали «Геометрия» Декарта и «Арифметика бесконечных» Валлиса. В 1663 году учителем Ньютона в Кембриджском университете стал Исаак Барроу, много занимавшийся задачами на касательные и обратными к ним задачами (эти задачи привели к созданию дифференциального и интегрального исчисления). Барроу, в частности, установил взаимную обратность дифференцирования и интегрирования, но он видел в этом лишь средство для решения обратных задач на касательные. Ньютон значительно развил идеи своего учителя.

На время чумы (1665-66) Кембридж был закрыт, и Ньютон провёл два года у матери. За это время он разработал теорию флюксий (основы математического анализа) и теорию тяготения, проделал опыты с призой по изучению спектра. В 1666 году чума пошла на спад, но в Лондоне случился большой пожар, бушевавший четыре дня. Вернувшись в Кембридж, Ньютон не спешил делиться своими открытиями. Кое-что он рассказал только Исааку Барроу. В 1669 году Барроу убедил Ньютона написать небольшой трактат «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов», но Ньютон согласился лишь показать его нескольким математикам и не соглашался публиковать его (этот трактат опубликован лишь в 1711 году).

В 1669 году Барроу получил должность священника короля Карла II. Покидая Кембридж, Барроу оставил Ньютона своим преемником на кафедре.

В 1669 году Ньютон первым изготовил рефлекторный телескоп (основанный на отражении, а не на преломлении света). Идея такого телескопа возникла у Джеймса Грегори, но он не смог его изготовить. В то время только Ньютон понимал, что важное преимущество рефлекторных телескопов над рефракторными состоит в отсутствии хроматической аберрации, свяазанной с тем, что лучи разного цвета преломляются под разными углами. Но он ошибочно полагал, что этот недостаток рефракторных телескопов невозможно устранить. За изготовление рефлекторного телескопа Ньютон в 1672 году был избран членом Королевского общества.

После экспериментов с призмой Ньютон пришёл к убеждению, что свет состоит из частиц. Гук и Гюйгенс с этим не соглашались, считая, что природа света волновая.

В 1679 году Гук высказал гипотезу, что движение планет объясняется их притяжением со стороны Солнца по закону обратных квадратов, и сообщил её Ньютону. Эта гипотеза сильно расходилась с господствовавшей тогда теорией вихрей Декарта, поэтому Ньютон сначала отнёсся к ней с недоверием, но постепенно понял, что с математической точки зрения эта идея чрезвычайно плодотворна. Идею Гука обсуждали астрономы, и в 1684 году Кристофер Рен и Эдмонд Галлей поставили перед Гуком задачу: математически вывести из предположения, что сила притяжения планет Солнцем обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, эллиптическую форму орбит планет. Гук утверждал, что он умеет это выводить, но не предъявил доказательство. Спустя полгода Галлей решил поехать в Кембридж к Ньютону. На вопрос Галлея, какие траектории будут описывать планеты, если предположить, что сила притяжения их Солнцем обратно пропорциональна расстоянию, Ньютон без колебаний ответил: «Это будут эллипсы». На изумлённый вопрос Галлея, откуда он это знает, Ньютон ответил, что он это вычислил. Галлей попросил показать вычисления, но Ньютон не смог найти их среди своих бумаг. Ньютон пообещал повторить эти вычисления и прислать их по почте. Галлею пришлось ждать 3 месяца, но он всё же получил обещанные вычисления. Галлей немедленно поехал снова к Ньютону, чтобы узнать, согласится ли Ньютон представить свою статью перед Королевским обществом и опубликовать её. Ньютон захотел детально разработать свою теорию и после 18 месяцев упорного труда в апреле 1686 года представил Королевскому обществу «Математические начала натуральной философии». Месяц спустя общество решило издать книгу Ньютона, но после этого выяснилось, что все деньги уже потрачены на дорогостоящее издание истории рыб. Тогда Галлей решил издать книгу за свой счёт.

Ньютон считал, что для поддержания стабильного состояния Солнечной системы требуется вмешательство посторонних сверхъестественных сил.

В 1689 году Кембриджский университет должен был избрать двух членов Парламента; одним из них был избран Ньютон. В Парламенте он провёл около года, но выступал там только один раз (попросил закрыть окно, чтоб не дуло). В 1702 году во время новых выборов в Парламент Ньютона спросили, хочет ли он, чтобы его выбрали снова. Он отказался.

Ньютон предпринял несколько безуспешных попыток получить другую должность (в Кембридже ему часто приходилось читать лекции в пустой аудитории, и это его раздражало). В 1692-93 годы из-за тяжёлого переутомления (или отравления в ходе занятий алхимией) Ньютон страдал психическим расстройством. В 1696 году Ньютон был назначен хранителем Монетного двора и переехал в Лондон; в 1699 году он был назначен директором Монетного двора. Ньютону предстояла большая работа: из-за обилия в Англии фальшивых монет было решено полностью перечеканить монеты. В обязанности Ньютона входило также выявление фальшивомонетчиков.

В январе 1697 года Ньютон получил письмо от Иоганна Бернулли, содержавшее две трудных задачи. Одна из них была опубликована 6 месяцев назад, но оставалась нерешённой, а другую решил Лейбниц, но Бернулли не сообщил Ньютону это решение, желая проверить способности Ньютона. Ньютон получил это письмо после тяжёлого рабочего дня на Монетном дворе. В первой задаче требовалось найти кривую, по которой должно двигаться тяжёлое тело под действием собственного веса, чтобы оно быстрее всего попало из одной данной точки в другую дунную точку. Не поужинав, Ньютон принялся за решение задач. Через 12 часов он решил обе задачи и написал письмо президенту Королевского общества, изложив решения и попросив напечатать их анонимно. Иоганн Бернулли, прочитав эту статью, решил, что только Ньютон мог её написать: «Узнаю льва по отметке его когтей.»

В 1703 году Ньютон был избран президентом Королевского общества и переизбирался каждый год вплоть до смерти.

В 1705 году королева Анна посвятила Ньютона в рыцари (он был первым из учёных, удостоившимся этой чести за научные труды).

Ньютон отказывался публиковать свои работы по анализу. В 1676 году Лейбниц побывал в Лондоне. С Ньютоном он не встречался, но получил доступ к его бумагам, хранившимися у Джона Коллинза, и даже сделал из них какие-то выписки; лишь много позднее выяснилось, что никаких выписок, связанных с анализом, Лейбниц не делал. По поводу возникшего впоследствии спора между Ньютоном и Лейбницем о приоритете в открытии анализа бесконечно малых написано в параграфе, посвящённом Лейбницу.

5.31.2. Математические начала натуральной философии

При жизни Ньютона «Математические начала натуральной философии» (Philosophiae naturalis principia mathematica) издавались трижды: в 1687, 1713 и 1726 годах. Название, по-видимому, связано с критикой Декарта, которому, по мнению Ньютона, недоставало адекватных математических принципов. В названии отразилось также то, что Ньютон очень ценил «Начала» Евклида. Помощник Ньютона вспоминал, что за 5 лет только один раз видел его смеющимся: Ньютона рассмешил вопрос, есть ли какая-то польза от изучения «Начал» Евклида.

В 1670-е годы Ньютон начинает критически относиться к геометрии Декарта и к методам бесконечно малых. Он предпочитает методы древнегреческих математиков. Поэтому в «Началах» Ньютон обходится и без техники учения о флюксиях и без техники аналитической геометрии Декарта. Но он систематически применяет инфинитезимальные методы в синтетически-геометрической форме. (Только один раз он вскользь упоминает о флюксиях и форумулирует о них одно утверждение.) В «Началах» Ньютон пишет о движениях, изменениях или флюксиях величин (здесь у него впервые встречается термин *флюксия*).

Мысль Ньютона о единстве силы тяготения, управляющей падением земных тел и движением небесных тел, была нова. Ещё Галилей придерживался идеи Аристотеля, что земная механика и небесная механика подчиняются разным законам. В частности, свободное движение в земной механике прямолинейное, а в небесной — круговое. Галилею была также чужда мысль о дальнодействии (притяжении Земли Солнцем). Он считал, что о действии Солнца или Луны на Землю могут говорить только астрологи, и не верил в гипотезу Коперника о том, что приливы и отливы вызывают Луна и Солнце. Принцип действия на расстоянии долго не могли принять картезианцы (а картезианцами было большинство французских физиков и математиков). Ньютон не дал физического объяснения механизма всемирного тяготения.

В первой книге «Начал» Ньютон решает синтетически-геометрическим методом, в духе древнегреческих геометров, задачу Паппа, которую Декарт решил с помошью аналитической геометрии.

При решении задачи Кеплера о нахождении площади сектора эллипса Ньютон доказывает лемму о неалгебраичности площади сектора любого овала, отсекаемого прямой, вращающейся вокруг фиксированной точки. Доказательство основано на том, что после одного оборота добавляется площадь овала, что приводит к образованию спирали; прямая пересекает эту спираль в бесконечном числе точек, что противоречит алгебраичности.

Ньютон доказывает, что шар, плотность которого зависит только от расстояния до центра, притягивает частицу, расположенную вне его с такой же силой, как если бы вся его масса была сосредоточена в центре. Точно так же он сводит притяжение двух шаров к притяжению двух точек.

Книга 2 «Начал натуральной философии» посвящена движению тела в сопротивляющейся среде. Ньютон нашёл форму тела вращения, испытывающего наименьшее сопротивление при движении в направлении оси вращения, сведя эту задачу к дифференциальному уравнению $\frac{yy'^3}{1+y'^2} = \frac{a}{4}$. Это была первая решённая задача вариационного исчисления. Ньютон не объяснил, как он получил дифференциальное уравнение, поэтому эта задача не привлекла к себе внимания математиков и сначала не оказала влияния на возникновение вариационного исчисления.

В книге 3 Ньютон применяет к астрономии результаты, полученные в книге 1. Ньютон изучает приливы, форму Земли, некоторые отклонения в движении Луны, прецессию равноденствия, траектории комет. Изучая траектории комет, Ньютон применяет метод интерполяции. В конце третьей книги (но только во втором издании) Ньютон написал знаменитое «Гипотез не измышляю».

5.31.3. Математический анализ

Зимой 1664 года Ньютон установил биномиальную теорему для дробных показателей. Ньютон пришёл к пониманию взаимной обратности задачи проведения касательных и задачи вычисления площади под кривой. Он разработал алгоритм, по сути дела эквивалентный дифференциальному и интегральному исчислению Лейбница. Ньютон воспользовался биномиальной теоремой для решения задачи квадратур (почленное интегрирование).

Ньютон называет *флюентой* величину, которая непрерывно течёт (flows) во времени (например, площадь под кривой, которая возрастает при непрерывном изменении координаты); *флюксия* — это мгновенная скорость флюенты.

В работе «Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых» (1671) Ньютон описал способ нахождения разложений в ряд для ветвей алгебраической кривой в кратной точке (параллелограмм Ньютона). Параллелограмм Ньютона впоследствии сыграл очень важную роль в развитии теории алгебраических функций.

В 1676 году Ньютон установил, что интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ выражается алгебраически в том и, насколько ему известно, только том случае, когда одно из чисел $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ или p натуральное. (Доказательство того, что в остальных случаях этот интеграл не выражается в элементарных функциях, получил Чебышев в 1853 году.)

В 1680 году Ньютон попытался переформулировать свои результаты о флюксиях и флюентах на геометрическом языке, согласованном с методами древнегреческих математиков.

У Ньютона терминология, связанная с отношением исчезающих величин, была неустойчива. Иногда он использовал термин «метод первых и последних отношений». Ньютон указывает на аналогию отношения исчезающих величин с понятием мгновенной скорости.

В книге «Разностный метод» (1711) Ньютон доказывает свою интерполяционную формулу и выводит из неё формулу, получившую впоследствии название *формула Стирлинга*.

5.31.4. Всеобщая арифметика

В книге «Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе» (1707) Ньютон определяет число как отношение двух однородных величин. Это определение охватывает только положительные числа; нуль и отрицательные числа вводились дополнительно. Во «Всеобщей арифметике» Ньютон не приводит доказательств большинства теорем.

Во «Всеобщей арифметике» Ньютон впервые привёл алгебраическое доказательство формулы Герона. До этого техника алгебраических преобразований была разработана не достаточно для этих целей. Ньютон приводит также аналитическое решение задачи Паппа (в «Началах» Ньютон даёт её решение синтетически-геометрическим методом, в духе древнегреческих геометров).

Ньютон доказал (в «Началах» синтетически, т.е. без вычислений, а во «Всеобщей арифметике» аналитико-геометрически, что если два угла вращаются и точка пересечения их сторон движется по прямой, то вторая точка пересечения движется по конике. Эта теорема описывает конику как множество точек пересечения соответственных прямых в двух проективных пучках (теорию проективных пучков прямых построил Штейнер в 1832 году.).

Ньютон поставил и решил задачу, которую на современном языке можно сформулировать так. Пусть дан неприводимый многочлен степени $2m$ с целыми коэффиицентами и со старшим коэффициентом 1. Существует ли такое целое число d, что над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ этот многочлен разлагается на два множителя степени m?

Завершающая часть «Всеобщей арифметики» посвящена построению корней кубических уравнений с помоью конических сечений.

5.31.5. Классификация кубических кривых

В работе «Перечисление кривых третьего порядка» Ньютон дал классификацию кубических кривых (1667-68, опубликовано в 1704); он перечислил 72 типа кривых (6 типов он пропустил, что было обнаружено в 18 веке.). Ньютон даёт также проективную классификацию. Но он не приводит никаких доказательств.

5.32. Готфрид Вильгельм фон Лейбниц (1646-1716)

В 16 лет Лейбниц поступил в университет в Лейпциге и изучал там философию и математику. В 1666 году он подготовил диссертацию по философии под названием «Рассуждение о комбинаторном искусстве». В этом трактате введён термин *комбинаторика*. В нём содержится ряд теорем о сочетаниях и перестановках. Цель Лейбница была в том, чтобы свести все рассуждения и открытия к комбинациям некоторых основных элементов — цифр, букв, звуков, цветов. Такой подход характерен и для многих последующих работ Лейбница.

С 1672 года Лейбниц в Париже изучал математику и физику под руководсттвом Гюйгенса. В 1675 году в Париж приехал Чирнгауз и подружился с Лейбницем. Именно в Париже Лейбниц получил свои основные результаты об анализе бесконечно малых, но опубликовал их гораздо позже. В его рукописи, относящейся к 1675 году, уже встречается обозначение $\int f(x)\,dx$. В 1676 году Лейбниц получил равенство $d(x^n) = nx^{n-1}dx$ как для целых, так и для рациональных n.

Лейбниц пришёл к созданию анализа бесконечно малых десятью годами позже Ньютона, но независимо от него. К тому времени, когда Ньютон опубликовал первую из своих работ по анализу, все основные работы Лейбница уже были опубликованы. Ньютон и Лейбниц не публиковали свои результаты по анализу более 10 лет, и много лет спустя это привело к ожесточённому спору по поводу приоритета, дополнительно разжигаемому их сторонниками.

В 1676 году Лейбниц обменялся письмами с Ньютоном через посредство Ольденбурга. В это время он уже владел основными идеями и методами исчисления бесконечно малых, но узнал много интересных подробностей.

Ньютон послал Лейбницу письмо, в котором перечислил многие из своих результатов, но ничего не сообщил о методах. Лейбниц на это письмо ответил сразу, но оно долго шло до него, и Ньютон решил, что Лейбниц ответил после шестинедельных раздумий. Письмо Ньютона побуждало Лейбница торопиться с публикацией полного изложения своих методов.

В октябре 1676 года Ньютон написал Лейбницу второе письмо, которое было доставлено Лейбницу лишь в июне 1677 года, когда он был уже в Ганновере. Письмо было написано вежливо, но Ньютон был убеждён, что Лейбниц украл его методы. В ответном письме Лейбниц привёл некоторые подробности о своих методах дифференциального исчисления, в том числе правило дифференцирования сложной функции. Ньютон справедливо замечал, что методы Лейбница не позволили решить ни одной задачи, не решённой ранее. Но разработанный Лейбницем формализм доказал свою полезность при дальнейшем развитии анализа.

Всеобщая характеристика по замыслу Лейбница должна была стать единым алгоритмом математики и вообще всех формализованных наук, опирающимся на аппарат символической логики. Эта идея направляла многие его исследования. Именно поэтому он придавал большое значение символике, и его обозначения в анализе оказались более удобными, чем у Ньютона. В 1678 году он писал Чирнгаузу: «Следует заботиться о том, чтобы знаки были удобны для открытия. Это достигается в наибольшей мере тогда, когда знаки коротко выражают и как бы отображают глубочайшую природу вещи, и при этом удивительным образом сокращается работа мышления.»

В 1673 году Лейбниц ввёл термин *функция*. Понятие функции как величины, зависящей от переменной, сформировалось у Лейбница к 1697 году.

Лейбниц свёл вычисления площади круга к вычислению интеграла $\int \frac{z^2}{1+z^2}dz$ и получил ряд для арктангенса, который ранее уже получил

Грегори. Этот ряд даёт, в частности,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

Рассматривая ряды с знакочередующимися членами, Лейбниц пришёл к общему вопросу о сходимости таких рядов. В 1705 году в письме к Я.Герману Лейбниц сформулировал признак сходимости знакопеременного ряда: бесконечный знакопеременный ряд имеет конечную сумму, если абсолютная величина членов убывает и стремится к нулю (*признак Лейбница сходимости знакопеременного ряда*). В 1713 году Лейбниц в письме к Николаю Бернулли сформулировал определение сходящегося ряда.

Первые три работы Лейбница об исчислении бесконечно малых опубликованы в 1684, 1686 и 1693 году. Это первые публикации на эту тему. Изобретение анализа бесконечно малых Лейбницем датируется между 1672 и 1676 годами. В это время Лейбниц находился в Париже с дипломатической миссией. К занятиям математикой его привлёк Гюйгенс. Девятилетнюю задержку публикации Лейбниц объяснял тем, что в это время был занят другими делами. Заняться публикацией Лейбница побудило ещё и то, что его друг Чирнгауз начал публиковать решения задач методом бесконечно малых, очень близкие к тому, что ему рассказал Лейбниц.

В 1678-79 годы в письмах Чирнгаузу Лейбниц подробно рассказал, как он пришёл к дифференциальному и интегральному исчислению. Он указывает три главных источника своего открытия: 1) взятый у Паскаля и существенно обобщённый метод характеристического треугольника; 2) введённое Декартом и его последователями алгебраическое представление геометрических кривых; 3) открытия Валлиса и Меркатора в области бесконечных рядов вместе с исследованиями самого Лейбница о суммировании рядов при помощи порождающих их разностей.

В первой работе (1684) под влиянием Паскаля вводится *характеристический треугольник*. Лейбниц вводит термин *дифференциал* и обозначения dv и dx. Без доказательства приводятся правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного. Лейбниц отметил, что $dv = 0$ для максимума или минимума. Вводится второй дифференциал. Затем Лейбниц устанавливает правило дифференцирования степеней, корней и сложных функций. На четырёх примерах популярных в то время задач Лейбниц продемонстрировал силу нового метода. Один из этих примеров — вывод закона преломления в оптике. Лейбниц показывает, что его метод применим и к трасцендентым кривым, которые Декарт хотел изгнать из геометрии, считая их изучение невозможным.

Первая публикация Лейбница была очень краткой (в ней не было доказательств) и содержала много опечаток, что делало её понимание очень трудным. В 1687 году Якоб Бернулли обратился к Лейбницу с просьбой дать ему некоторые пояснения, считая, что тот просто скрывает многие из своих методов. Якоб Бернулли не получил ответа от Лейбница и проник в тайны анализа самостоятельно и обучил им своего брата Иоганна. По мнению Якоба Бернулли публикация Лейбница была скорее загадкой, чем разъяснением. Гюйгенс тоже жаловался Лейбницу на туманность его изложения и сетовал, что вообще не может понять, что такое ddx.

Вторая работа (1686) посвящена интегральному исчилению. Лейбниц подчёркивает важность трансцендентых кривых для задачи квадратур. Интегрирование определяется через суммирование и представлено как операция, обратная дифференцированию. Лейбниц вводит обозначение $\int$ как стилизацию первой буквы слова summa.

Третья статья (1693) посвящена задаче квадратур. Лейбниц не проводит чёткого разделения между определёнными и неопределёнными интегралами, применяя для них одно и то же обозначение.

Лейбниц совместно с Иоганном Бернулли разработал алгоритм интегрирования рациональных функций. Сначала он дупустил ошибку, решив, что x^4+a^4 нельзя разложить на действительные квадратичные множители. Основы обращения с комплексными числами в то время ещё только начинали разрабатываться. Гюйгенс, когда Лейбниц ему сообщил, что $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$, нашёл это столь удивительным, что ответил ему, что в этом кроется что-то для нас непостижное.

Тождество $\frac{1}{x-a_1} - \frac{1}{x-a_2} = \frac{a_1-a_2}{(x-a_1)(x-a_2)}$ показывает, что интегрирование функции $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ сводится к интегрированию функций $\frac{1}{x-a_1}$ и $\frac{1}{x-a_2}$, где a_1 и a_2 — корни многочлена ax^2+bx+c. Для вещественных a_1 и a_2 интегралы от функций $\frac{1}{x-a_1}$ и $\frac{1}{x-a_2}$ выражаются через логарифмы. Но у многочлена с вещественными коэфиициентами корни могут быть комплексными, поэтому в результате могут получиться логарифмы от комплексных чисел. Лейбница сначала это не смущало, и он говорил, что комплексные числа здесь не причиняют вреда. Но впоследствии он считал, что логарифм от -1 не существует.

Определение трансцендентных чисел Лейбниц дал в 1686 году. Термины «алгебраический» и «трансцендентный» к кривым он применял ещё до этого; в 1684 году Лейбниц считал, что нужно отказаться от терминологии Декарта (геометрические линии и механические линии), потому что трансцендентные кривые не следует исключать из геометрии. Различие между алгебраическими и трансцендентными функциями было отчетливо сформулировано Джеймсом Грегори в 1667 году. Он пытался доказать, что площадь кругового сегмента не может быть алгебраической функцией радиуса и хорды. Лейбниц доказал, что функция sin трансцендентная, и заодно решил задачу Грегори. Доказательство трансцедентности синуса у Лейбница следующее. Предположим, что x и $\sin x$ связаны алгебраическим соотношением $f(x, \sin x) = 0$. Тогда из двух соотношений $f(m \cdot \frac{x}{m}, \sin x) = 0$ и $f(\frac{x}{m}, \sin\frac{x}{m}) = 0$ можно исключить $\frac{x}{m}$ и получить соотношение $g(\sin x, \sin\frac{x}{m})$, причём степень r многочлена g не зависит от m. Таким образом, при заданном значении $\sin x$ величина $\sin\frac{x}{m}$ не может иметь более r значений. Получаем противоречие, поскольку при нечётном m при заданном значении $\sin x$ величина $\sin\frac{x}{m}$ имеет m различных значений.

В 1692 году Лейбниц ввёл термин *координаты*. При этом он подчеркнул равноправие абсциссы и ординаты.

В 1696 году маркиз Лопиталь опубликовал первый учебник анализа, основанный на лекциях, которые ему прочитал Лейбниц.

Лейбниц ввёл дифференцирование дробного порядка, используя бесконечный биномиальный ряд. Для вычисления дифференциалов дробного порядка он применил формулу дифференцирования показательной функции, приняв, что $d^n e^{mx} = m^n e^{mx}(dx)^n$ для всех n. Но эти исследования он не опубликовал. О них он сообщает, в частности, в письме к Лопиталю в 1695 году. Там он приводит формулу для дифференцирования порядка e:

$$d^e(xy) = d^e x \cdot d^0 y + \frac{e}{1} d^{e-1} x \cdot d^1 y + + \frac{e(e-1)}{1 \cdot 2} d^{e-2} x \cdot d^2 y + \frac{e(e-1)(e-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^{e-3} x \cdot d^3 y$$

Из связанного с дифференцированием дробного порядка он опубликовал только формулу дифференцирования произведения для натурального n.

В 1686 году Лейбниц определил соприкасающуюся окружность с данной кривой и соприкосновения высших порядков. Ошибочно полагал, что соприкасающаяся окружность имеет две (а не три, как правильно) совпадающие точки пересечения с кривой. Эту ошибку исправил в 1692 году Якоб Бернулли.

В 1692 году Лейбниц вкраце изложил определение огибающей семейства кривых и вывод уравнения огибающей; подробнее он это изложил в 1694 году.

Лейбниц считал, что основа математики — определения, а не аксиомы. Аксиомы вытекают из определений (и не могут быть произвольными).

В 1700 году, после пятилетних усилий, при содействии своей ученицы, дочери ганноверского герцога Софии-Шарлотты, вышедшей замуж за прусского государя, Лейбниц организовал Бранденбургское научное общество и стал первым его президентом; через несколько лет это общество было преобразовано в Берлинскую Академию наук. Пётр Первый трижды встречался с Лейбницем, обсуждая с ним план создания Академии наук в Санкт-Петербурге. Лейбниц участвовал также в создании академий в Дрездене и Вене.

Многие не принимали метод бесконечно малых. Лейбниц по-разному объяснял, что он подразумевает под бесконечно малыми и бесконечно большими величинами. Лейбниц писал и о настолько малых величинах, что они порождают несущественную ошибку; и о том, что земной шар считается точкой по сравнению с расстоянием до неподвижных звёзд, а шарик в наших руках — точкой по сравнению с радиусом земного шара. Писал он даже и о том, что ими можно надёжно пользоваться как идеальными понятиями, сокращающими рассуждения, и сходными с мнимыми корнями, которые, несмотря на то, что их называют мнимыми, не перестают от этого быть полезными. Эти слова Лейбница свидетельствуют не столько о том, как хорошо в то время было разработано понятие бесконечно малой величины, сколько о том, как плохо было разработано понятие мнимых чисел.

Лейбниц оставил неопубликованными свои работы, в которых он пришёл к понятию определителя. Впервые это понятие появилось у него в 1678 году; при этом он естественным образом пришёл к необходимости снабжать коэффициенты линейных уравнений двумя индексами. Как и всегда, Лейбниц тщательно заботился об удобных обозначениях. Неопибликованные записки, относящиеся к 1684 году, содержат уже весьма удобные обозначения. В 1693 году Лейбниц писал Лопиталю о пользе применения коэффициентов вида a_{10}, a_{11} и т.д. (коэффициент a_{10} Лейбниц обозначал 10 и называл его числом, чтобы отличить от буквы, т.е. коэффициента без индекса): «...Раз Вы говорите, что Вам трудно поверить, что пользование числами носит столь же общий характер и столь же удобно, как и пользование буквами, значит, я нехорошо выразил свою мысль. Нельзя сомневаться в общности, если принять во внимание, что можно пользоваться 2, 3 и т.д. так же, как a или b, если только иметь в виду, что это не настоящие числа. Так, $2 \cdot 3$ означает вовсе не 6, но то же, что ab. Что касается удобства, то оно очень велико, и поэтому я часто пользуюсь этим, особенно в длинных и трудных вычислениях, в которых легко ошибиться. Ибо, кроме удобства проверки с помощью чисел, а также отбрасывания девяток, я нахожу в этом очень важное преимущество даже для развития Анализа. Так как это открытие довольно своеобразно, я ещё не рассказывал о нём другим. Но вот в чём дело. Ведь верно, что когда приходится употреблять много букв, то эти буквы совсем не выражают отношений между обозначаемыми ими величинами; между тем, пользуясь числами, я могу это отношение выразить. Допустим, например, что предложены три простых уравнения с двумя неизвестными и требуется исключить эти два неизвестных, причём по общему правилу. Я полагаю $10 + 11x + 12y = 0 \quad (1)$ и $20 + 21x + 22y = 0 \quad (2)$ и $30 + 31x + 32y = 0 \quad (3)$, где предлагаемые числа выражены каждое двумя знаками, из которых первый показывает мне, какому уравнению принадлежит число, а второй показывает, какой оно принадлежит букве. Вычисляя таким образом, везде открываешь гармонии, которые не только служат нам порукой, но и сразу показывают нам правила или теоремы. Например, исключая сперва из первого и второго уравнений y, мы получим

$$\begin{array}{l} +10\cdot 22 + 11\cdot 22x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = 0, \\ -12\cdot 20 - 12\cdot 21x \end{array}$$

а исключая его из первого и третьего, мы получим

$$\begin{array}{l} +10\cdot 32 + 11\cdot 32x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = 0, \\ -12\cdot 30 - 12\cdot 31x \end{array}$$

где легко заметить, что эти два уравнения отличаются лишь тем, что предыдущий знак 2 заменяется на предыдущий знак 3. Впрочем, в каждом члене каждого уравнения предыдущие знаки одинаковы, а последующие знаки образуют одну и ту же сумму. Теперь остаётся исключить из четвертого и пятого уравнений букву x, и тогда мы получим

$$\begin{array}{ccc} 10 & 21 & 32 \\ 11 & 22 & 30 \\ 12 & 20 & 31 \end{array} = \begin{array}{ccc} 10 & 22 & 31 \\ 11 & 20 & 32 \\ 12 & 21 & 30, \end{array}$$

что и представляет собой последнее уравнение, свободное от обоих неизвестных, которые желали исключить, и заключающее своё доказательство в самом себе, в силу заметных во всём гармоний, которые было бы весьма трудно открыть при употреблении букв a, b, c, особенно, когда число букв и уравнений велико. Часть секрета Анализа состоит в характеристике, т.е. в искусстве хорошо употреблять применяемые знаки, и по этому малому образцу Вы видите, Сударь, что Виет и Декарт ещё не познали все его тайны. Незначительно продолжив это вычисление, можно прийти к общей теореме для любого произвольного числа букв и простых уравнений». Полученное Лейбницем условие совместности трёх линейных уравнений с двумя неизвестными можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

Открытие Лейбница значительно опередило своё время. Первая публикация, посвященная определителям, появилась лишь через 72 года, в 1750 году; она принадлежит Г. Крамеру. Следует, однако, заметить, что японский математик Секи Кова пришёл к понятию определителя в 1683 году

Лейбниц близко подошёл к понятию вектора. В 1679 году он отправил Гюйгенсу письмо о геометрической характеристике. Лейбниц писал, что нужен анализ, который непосредственно выражает положение, как алгебра непосредственно выражает величину. Он писал также, что в геометрии, как и в алгебре, можно составлять уравнения, пользуясь конгруэнцией (для которой Лейбниц использует обозначение круг и над ним дуга полуокружности).

Лейбницу принадлежит идея «анализа положения» (analysis situs), которую впоследствии использовал Эйлер при решении задачи о кёнигсбергских мостах. Термин *топология*, введённый Листингом, является переводом на греческий язык латинского термина Лейбница.

В распространении двоичной системы счисления важную роль сыграла работа Лейбница «Изложение двоичной арифметики, для которой достаточно только двух цифр 0 и 1, с замечаниями о её пользе и о том, что она даёт смысл древним китайским фигурам Фохи». Фохи, о котором пишет Лейбниц, — это китайский бог-прародитель Фуси, а «фигуры Фохи» — рисунки из древнекитайских гадательных книг. Лейбниц ошибочно истолковал их как двоичные записи чисел; в действительности о применении в Древнем Китае двоичной системы счисления ничего не известно. Двоичную систему Лейбниц разработал в 1679 году, но ничего не публиковал на эту тему до 1701 года.

Лейбниц поставил задачу дедуктивного построения арифметики на основе аксиом. Он предложил две аксиомы (явно не достаточные): 1) каждое натуральное число, кроме 1, получается из натурального числа прибавлением к нему 1; 2) $m + (n + 1) = (m + n) + 1$.

Последние годы жизни Лейбница были омрачены спором по поводу приоритета в открытии анализа. Лейбницев анализ распространился в континентальной Европе до того, как появилась первая публикация Ньютона в 1704 году. Ньютон и некоторые его последователи были уверены, что Лейбниц плагиатор. В 1711 году Лейбниц прочитал в трудах Королевского общества статью Кейлла, в которой Лейбниц обвинялся в плагиате. Лейбниц потребовал опровержения, говоря, что он никогда не слышал о методе флюксий до того, как прочитал труды Валлиса. Кейлл ответил, что в двух письмах Ньютона было достаточно указаний, объясняющих основы анализа. После второго письма Лейбница, пользуясь своей дожностью президента Королевского общества, Ньютон назначил «независимую» комиссию, которая должна была решить, кто открыл анализ: он или Лейбниц. Комиссия была чрезвычайно пристрастная и даже не пыталась выяснить у Лейбница его версию событий. Ньютон сам написал отчёт этой комиссии, который был опубликован от её имени Королевским обществом в начале 1713 года. Лейбниц прочитал его лишь осенью 1714 года, но о содержании этого отчёта он уже знал из письма Иоганна Бернулли. Лейбниц ответил анонимным памфлетом, где в качестве довода в свою пользу приводил то, что Ньютон ошибочно понимал вторые производные и производные высших порядков. Продолжать спор с Кейллом Лейбниц отказался, но на письмо Ньютона он ответил и дал подробное описание своего открытия дифференциального исчисления.

Последователи Лейбница, особенно Якоб Бернулли, резко выступили против пристрастного отчёта комиссии. После этого теория Ньютона долгое время была распространена почти исключительно в Англии, а теория Лейбница — в континентальной Европе.

5.33. Джованни Чева (1647-1734)

Знаменитая *теорема Чевы* была опубликована в сочинении «О взаимопересекающихся прямых» в 1678 году. Эта теорема утверждает, что три отрезка, проведённые из вершин треугольника к его сторонам, пересекаются в одной точке, если произведение отношений, в которых эти отрезки делят стороны треугольника, равно 1.

Чева также переоткрыл и опубликовал теорему Менелая.

5.34. Эренфрид Вальтер фон Чирнгауз (1651-1708)

Предки саксонского дворянина Эренфрида Вальтера фон Чирнгауза жили в Богемии и там их фамилия была Черноус. (Авторы, далёкие от истории математики, очень часто неправильно пишут его фамилию «Чирнгаузен».)

В 1675 году Чирнгауз познакомился в Париже с Лейбницем и подружился с ним. Лейбниц сообщил ему некоторые основные принципы разработанного им анализа.

Чирнгауз исследовал свойства зеркал и в связи с этим изучал огибающую семейства лучей, которые получаются при отражении лучей света, выходящих из точки и отражающихся от некоторой кривой.

В 1683 году Чирнгауз опубликовал преобразование, которое, как он считал, позволяло решить в радикалах любое уравнение; в своей статье он показал, как этим методом решается кубическое уравнение. Лейбниц ещё до публикации указал ему, что для применения этого преобразования к уравнению степени $n > 4$ требуется решить уравнение степени больше n. Теме не менее, это преобразование, получившее название *преобразование Чирнгауза*, оказалось весьма полезным.

В 1683 году Чирнгауз опубликовал ряд результатов Лейбница, выдавая их за свои. Это заставило Лейбница наконец-то начать публиковать свои результаты в 1684 году.

5.35. Мишель Ролль (1652-1719)

Основное сочинение Мишеля Ролля — «Трактат по алгебре» (1690). Ролль впервые чётко сформулировал, что любой корень n-й степени имеет n значений; при нечётном n все корни, кроме одного, мнимые, а при чётном n могут быть два действительных корня, а остальные мнимые. Он привёл способ решения в целых числах неопределённых уравнений первой степени с двумя неизвестными; это решение по идее совпадает с полученным позже решением Эйлера (1740). Ролль привёл также чисто алгебраический способ получения высших производных многочлена $f(x)$; они появляются как коэффициенты уравнения, которое получается при замене x на $x + z$. Ролль сообщает (без доказательства), что между двумя последовательными корнями уравнения $f^{(r)}(x) = 0$ есть корень уравнения $f^{(r+1)}(x) = 0$. Ролль применил алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух многочленов.

Теорема Ролля опубликована в 1691 году. Она утверждает, что если $f(a) = f(b) = 0$, то $f'(x) = 0$ для некоторого x, заключённого между a и b. Эта теорема была нужна Роллю для обоснования некоторых методов, приведённых в «Трактате по алгебре». В этой же работе Ролль предложил считать, что если $a > b$, то $-b > -a$ (до него при сравнении отрицательных чисел обычно упорядочивали их по абсолютной величине; так поступал, например, Декарт).

Следует иметь в виду, что работы Ролля чисто алгебраические, к анализу они не имеют никакого отношения. Ролль долгое время был активным противником анализа бесконечно малых; он был убеждён, что методы анализа бесконечно малых неизбежно приведут к ошибкам.

В «Трактате по алгебре» Ролль ввёл обозначение $\sqrt[n]{x}$.

5.36. Пьер Вариньон (1654-1722)

Наиболее известны работы Вариньона по механике, в которых он применил только что появившееся дифференциальное исчисление Лейбница.

В заметках Вариньона об обучении математике в школе, опубликованных в 1731 году, содержится *теорема Вариньона*: середины сторон черырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

5.37. Якоб Бернулли (1654-1705)

Якоб Бернулли и его младший брат Иоганн одними из первых смогли разобрать трудные для понимания статьи Лейбница и применить разработанные в них методы к решению новых задач.

В конце 17 века многие математики занимались задачей об изохроне; так они называли кривую, двигаясь по которой под действием силы тяжести, частица попадает из любой точки в нижнюю точку за одно и то же время. Первым задачу об изохроне решил Лейбниц. В 1690 году Якоб Бернулли показал, что эта задача сводится к дифференциальному уравнению

$$dy\sqrt{b^2y - a^3} = dx\sqrt{a^3}.$$

Из равенства дифференциалов он сделал вывод о равенстве интегралов и получил решение

$$\frac{2b^2y - 2a^3}{3b^2}\sqrt{b^2y - a^3} = x\sqrt{a^3}.$$

В этой статье он ввёл термин *интеграл*. (Его брат Иоганн в автобиографии утверждал, что этот термин придумал он.)

В той же статье Якоб Бернулли поставил задачу о нахождении формы кривой, которую принимает тяжёлая гибкая нерастяжимая нить, подвешенная за оба конца (*цепная кривая*). Эту задачу ставил ещё Леонардо да Винчи; Галилей полагал, что это должна быть парабола. В 1691 году Гюйгенс, Лейбниц и Иоганн Бернулли независимо получили решения этой задачи. Рассуждения Гюйгенса были туманными. Иоганн Бернулли вывел дифференциальное уравнение и нашёл его решение.

В 1691 году Якоб Бернулли впервые выразил в виде эллиптического дифференциала элемент дуги параболической спирали, заданной в полярных координатах уравнением $(r-a)^2 = 2ap\varphi$. При этом он установил равенство определённых дуг спирали. К эллиптическим интегралам он пришёл также при изучении гибкой пластины с одним неподвижным концом. К этому же кругу вопросов относится лемниската Бернулли.

В 1692 году Якоб Бернулли разработал общий метод нахождения эволюты кривой. Он обнаружил, что эволюта и каустика логарифмической спирали также являются логарифмическими спиралями. Это свойство столь поразило его, что он завещал изобразить на своём надгробии такую спираль с подписью eadem mutata resurgo (изменённая, я возрождаюсь прежней).

В 1694 году Якоб Бернулли исследовал кривую, которую он назвал *лемниската*. Он не знал, что эта кривая является одной из кривых, входящих в уже известное семейство кривых — овалов Кассини.

В 1696 году Якоб Бернулли решил дифференциальное уравнение

$$y' = p(x)y + q(x)y^n,$$

получившее название *уравнение Бернулли*.

В 1697 году Якоб Бернулли решил задачу о брахистохроне (кривой скорейшего спуска), поставленную его братом Иоганном. Якоб не был первым, кто решил эту задачу, но в его решении был высказан важный для многих задач вариационного исчисления принцип: если какая-нибудь кривая обладает свойством максимума или минимума, то каждая её бесконечно малая часть обладает тем же свойством.

Наиболее важное сочинение Якоба Бернулли — книга «Ars Conjectandi» (Искусство предположений), изданная посмертно в 1713 году. Она состоит из четырёх частей. Первая часть — это сочинение Гюйгенса с подробными комментариями Бернулли.

Во второй части разрабатывается комбинаторика. Якоб Бернулли без доказательства сообщил формулу для суммы $1^n + 2^n + \cdots + k^n$ и указал рекуррентное соотношение между числами B_i, входящими в эту формулу. Теперь эти числа называют *числами Бернулли*. Фаульгабер ранее вычислил эти суммы сначала для $n \leq 11$ (1617), а затем и для $n \leq 17$ (1631).

Эйлер обобщил метод Бернулли для суммирования $f(1) + f(2) + \cdots + f(k)$ (*формула суммирования Эйлера–Маклорена*). Остаточный член в этой формуле суммирования получил гораздо позднее Пуассон.

В третьей части решаются 24 задачи по теории вероятностей. Задачи решаются в основном комбинаторными методами. Бернулли использует, в частности, условные вероятности.

Четвёртая часть посвящена приложениям. Там Бернулли высказывает также общие соображения о случайных событиях и доказывает свой закон больших чисел

Якоб Бернулли намеревался дать различные приложения теории вероятностей к вопросу о продолжительности человеческой жизни, но во время работы над ней он неожиданно умер. Бернулли первым наряду с априорными вероятностями ввёл апостериорные вероятности (формула для вычисления апостериорных вероятностей получена Т.Байесом); доказал закон больших чисел (есть и другие версии этого закона).

5.38. Гийом Лопиталь(1661-1704)

В 1691 году Иоганн Бернулли, который был на 6 лет моложе маркиза Лопиталя, приехал в Париж читать лекции о дифференциальном исчислении Лейбница. Лопитать некоторое время посещал лекции Бернулли, а затем переехал в своё поместье. В этом поместье Бернулли читал лекции Лопиталю.

Иоганн Бернулли открыл правило вычисления предела дроби, у которой числитель и знаменатель стремятся к нулю. Лопиталь изложил это правило в главе 9 своего учебника по дифференциальному исчислению (1696), и теперь это правило известно как *правило Лопиталя*. Учебник Лопиталя, составленный на основе лекций, которые читал ему Иоганн Бернулли, долгое время был единственным употребительным учебником дифференциального исчисления.

В учебнике Лопиталя обсуждаются точки перегиба, точки возврата, кривизна кривой, эволюты, производные высшего порядка.

До смерти Лопиталя Бернулли, получивший за свои лекции весьма большую оплату, молчал. Но потом он утверждал, что учебник этот, по сути дела, его. Найденная в 1921 году рукопись лекций Бернулли подтверждает его слова.

5.39. Иоганн Бернулли (1667-1748)

Иоганн Бернулли был учеником своего брата Якоба и в какой-то степени Лейбница (переписка с Лейбницем началась, когда Иоганн Бернулли уже сложился как математик, но оказалась чрезвычайно плодотворной). В свою очередь, он был учителем Эйлера.

Первой математической работой Иоганна Бернулли был вывод уравнения цепной кривой. Эту задачу поставил его брат Якоб в 1691 году; одновременно её решили также Лейбниц и Гюйгенс.

Иоганн Бернулли открыл правило вычисления предела дроби, у которой числитель и знаменатель стремятся к нулю. Его ученик маркиз Лопиталь изложил это правило в своём учебнике по анализу (1696), и теперь это правило известно как *правило Лопиталя*. Учебник Лопиталя, составленный на основе лекций, которые читал ему Иоганн Бернулли, долгое время был единственным употребительным учебником дифференциального исчисления.

В 1692 году Иоганн Бернулли изучал огибающие семейств кривых. В частности, он нашёл параболу безопасности (ранее её геометрически нашёл Торричелли). В статьях 1692 и 1694 годов Лейбниц получил общий метод нахождения огибающих семейств кривых.

В 1694 году Иоганн Бернулли вывел ряд
$$\int_0^z n\,dz = nz - \frac{z^2}{2!}\frac{dn}{dz} + \frac{z^3}{3!}\frac{d^2n}{dz^2} - \frac{z^4}{4!}\frac{d^3n}{dz^4} + \ldots$$

В 1695 году Иоганн Бернулли поставил задачу о нахождении кривых, сумма или разность дуг которых равна дуге окружности или отрезку прямой, и показал, что этим свойством обладают некоторые дуги кубической параболы $3a^2y = x^3$. Эти дуги выражаются эллиптическими интегралами.

В 1696 году Иоганн Бернулли поставил задачу о брахистохроне, послужившую исходным пунктом создания вариационного исчисления. Формулировка этой задачи такова: «среди всех проходящих через две данные точки кривых найти ту, падая по которой тяжёлая точка пройдёт дугу между обеими точками в кратчайшее время». Помимо самого Иоганна эту задачу решил Лейбниц, предложивший объявить конкурс по её решению. Решение этой задачи представили Лопиталь, Якоб Бернулли и автор анонимной статьи в Philosophical Transaction. (Иоганн Бернулли сразу же узнал в нём Ньютона: «Льва узнают по когтям.») Решением этой задачи оказалась уже известная циклоида.

В связи с решением этой задачи напряжённые отношения между братьями Бернулли перешли в открытую ссору, продолжавшуюся до смерти Якоба.

В 1697 году Иоганн Бернулли поставил задачу о нахождении на выпуклой поверхности кратчайшей кривой, соединяющей две данные точки (задачу о нахождении геодезической). При этом он овладел методом координат в пространстве и нашёл дифференциальное уравнение геодезической, но не смог его решить. В следующем году его брат дал решение для поверхностей вращения. Именно при решении этой задачи Иоганн Бернулли ввёл понятие соприкасающейся плоскости пространственной кривой как плоскости, проходящей через три соседние точки кривой (он установил, что в любой точке геодезической соприкасающаяся плоскость перпендикулярна к касательной поверхности).

В 1715 году Иоганн Бернулли написал Лейбницу о задании точки в пространстве тремя координатами x, y, z, представляющими собой три перпендикулярных отрезка, проведённых к трём взаимно перпендикулярным плоскостям.

Совместно с Лейбницем Иоганн Бернулли разработал алгоритм интегрирования рациональных функций (Бернулли использовал метод неопределённых коэффициентов).

После долгих обсуждений с Лейбницем дал в 1718 году следующее определение: «Функцией переменной величины называется количество, составленное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных.»

Иоганн Бернулли рассматривал интегрирование просто как обратную к дифференцированию операцию. Такой подход позволил ему добиться больших успехов в решении дифференциальных уравнений. Иоганн Бернулли вывел теоремы сложения для тригонометрических и гиперболических функций с помощью дифференциальных уравнений, которым они удовлетворяют.

В 1713 году Иоганн Бернулли был вовлечён в спор между Ньютоном и Лейбницем. Он решительно поддержал Лейбница, приводя в качестве агрумента решение методами Лейбница некоторых задач, не поддающихся методам Ньютона.

Литература

[1] Бурбаки Н. *Очерки по истории математики*, М.: ИЛ, 1963.

[2] Вилейнтнер Г. *История математики от Декарта до середины XIX столетия*, М.: ГИФМЛ, 1960.

[3] *История математики с древнейших времен до начала XIX века*, в трех томах. Под редакцией А.П.Юшкевича.

Том первый. *С древнейших времен до начала Нового времени*, М.: Наука, 1970.

Том второй. *Математика XVII столетия*, М.: Наука, 1970.

[4] Лейбниц Г.В. *Избранные отрывки из математических сочинений*, Успехи математических наук, 1948. Т. 3. Вып. 83, с. 165–204.

[5] Ньютон И. *Математические начала натуральной философии*, М.: Наука, 1989.

[6] Ньютон И. *Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе*, Издательство АН СССР, 1948.

[7] Ньютон И. *Математические работы*, М.-Л.: Главная редакция технико-теоретической литературы, 1937.

[8] Цейтен Г.Г. *История математики в древности и в Средние века*, М.-Л.: ГОНТИ, 1938.

[9] Цейтен Г.Г. *История математики в XVI и XVII веках*, М.-Л.: ГОНТИ, 1938.

[10] Юшкевич А.П. *История математики в Средние века*, М.: ГИФМЛ, 1961.

[11] Christianson G.E. *Isaac Newton*, Oxford Univ. Press, 2005.

[12] Kline M. *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York: Oxford Univ. Press, 1972.

[13] *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*, Editor I. Grattan-Guinnes, Amsterdam: Elsevier, 2005.

[14] Weil A. *Number Theory. An approach through history from Hammurapi to Legendre*, Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1984.

Предметный указатель