Оглавление

6. 18 век **3**

6.1. Абрахам де Муавр (1667–1754) . . . 3
6.2. Джироламо Саккери (1667-1773) . . . 4
6.3. Джакопо Франческо Риккати (1676-1754) . . . 5
6.4. Джон Мечин (1680-1751) . . . 5
6.5. Роджер Коутс (1682-1716) . . . 5
6.6. Джулио Карло де Тоски ди Фаньяно (1682-1766) . . . 6
6.7. Джордж Беркли (1685-1753) . . . 6
6.8. Брук Тейлор (1685-1731) . . . 6
6.9. Николай Бернулли (1687-1759) . . . 7
6.10. Христиан Гольдбах (1690-1764) . . . 7
6.11. Джеймс Стирлинг (1692-1770) . . . 7
6.12. Пьер Луи де Мопертюи (1698-1759) . . . 8
6.13. Колин Маклорен (1698-1746) . . . 8
6.14. Даниил Бернулли (1700-1782) . . . 9
6.15. Томас Байес (1702-1761) . . . 9
6.16. Габриэль Крамер (1704-1752) . . . 9
6.17. Винченцо Риккати (1707-1775) . . . 11
6.18. Леонард Эйлер (1707-1783) . . . 11
6.18.1. Биография . . . 11
6.18.2. Анализ . . . 12
6.18.3. Дифференциальные уравнения . . . 14
6.18.4. Вариационное исчисление . . . 16
6.18.5. Комплексные числа . . . 16
6.18.6. Теория чисел . . . 16
6.18.7. Геометрия . . . 18
6.18.8. Многочлены . . . 20
6.18.9. Исчисление конечных разностей . . . 20
6.18.10Комбинаторика. Логика . . . 20
6.19. Жорж-Луи Леклерк де Бюффон (1707-1788) . . . 21
6.20. Томас Симпсон (1710-1761) . . . 21
6.21. Жан Поль де Гюа де Мальв (1712-1785) . . . 21
6.22. Алексис Клод Клеро (1713-1765) . . . 21
6.23. Джованни Франческо де Тоски ди Фаньяно (1715-1797) . . . 22
6.24. Мэтью Стюарт (1717-1785) . . . 22
6.25. Жан ле Рон Даламбер (1717-1783) . . . 22
6.26. Джон Ланден (1719-1790) . . . 23
6.27. Жан Этьен Монтюкла (1725-1799) . . . 23
6.28. Иоганн Ламберт (1728-1777) . . . 24
6.29. Этьен Безу (1730-1783) . . . 24
6.30. Джиан Франческо Малфатти (1731-1807) . . . 25
6.31. Александр-Теофиль Вандермонд (1735-1796) . . . 26
6.32. Эдвард Варинг (1736-1798) . . . 27
6.33. Эрланд Самуэль Бринг (1736-1798) . . . 27
6.34. Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) . . . 27
6.35. Андрей Иванович Лексель (1740-1784) . . . 29
6.36. Каспар Вессель (1745-1818) . . . 30
6.37. Гаспар Монж (1746-1816) . . . 30

6.38. Шарль Тенсо (1749-1822) 31
6.39. Пьер Симон Лаплас (1749-1827) 31
6.40. Лоренцо Маскерони (1750-1800) 32
6.41. Симон Антуан Жан Люилье (1750-1840) 32
6.42. Адриан-Мари Лежандр (1752-1833) 35
6.43. Лазар Карно (1753-1823) 36
6.44. Жан Батист Менье (1754-1793) 36
6.45. Марк-Антуан Парсеваль (1755-1836) 37
6.46. Паоло Руффини (1765-1822) 37
6.47. Иоганн Фридрих Пфафф (1765-1825) 37
6.48. Джон Фарей (1766-1826) 38
6.49. Жан Батист Жозеф Фурье (1768-1830) 38
6.50. Жан Робер Арган (1768-1822) 39
6.51. Вильям Уоллес (1768-1843) 39
6.52. Жозеф Диаз Жергонн (1771-1859) 39
6.53. Карл Брандон Молльвейде (1771-1859) 39
6.54. Мишель Анже Ланкре (1774-1807) 39
6.55. Фаркаш Бойяи (1775-1856) 40
6.56. Луи Пуансо (1777-1859) 40

Глава 6.

18 век

Восемнадцатый век в математике — это век Эйлера и французских математиков: Лагранжа, Лежандра, Лапласа.

Восемнадцатый век в математике был веком активной разработки и исследования обширных новых территорий анализа. Математики не справлялись с наплывом новых идей и не могли должным образом заботиться о строгости доказательств. Развивались новые области, возникшие из анализа: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, вариационное исчисление, дифференциальная геометрия.

Поначалу при работе с бесконечными рядами (даже расходящимися) не соблюдались никакие предосторожности. Получаемые при этом неверные результаты считались парадоксами и никак не объяснялись. Неверные результаты получались не только для расходящихся рядов, но и для условно сходящихся. Очень много дискусий и споров вызвал ряд $1-1+1-1+1-1+\dots$ С одной стороны, его сумма равна 0, поскольку она равна $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots$ С другой стороны, она равна 1, поскольку $1-(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots$ А если эту сумму мы обозначим S, то получим $S=1-S$, поэтому $S=\frac{1}{2}$. По-другому последний результат можно получить, положив $x=1$ в разложении $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots$ Гвидо Гранди (1671-1742) полагал, что эти рассуждения доказывают, что мир мог быть создан из ничего.

В 18 веке было много попыток геометрической интерпретации комплексных чисел, но они не пользовались успехом — комплексные числа не становились более приемлемыми. В 18 веке никто всерьёз не заботился о логической обоснованности действительных и комплексных чисел.

В начале 18 века интенсивно обсуждался вопрос о форме Земли. Ньютон на основании своих теоретических рассуждений сделал вывод, что экваториальный радиус на $\frac{1}{230}$ больше полярного. (В действительности это на 30% больше правильного значения.) Затем в 1720 году Жак Кассини сделал измерения и пришёл к обратному выводу: полярный радиус на $\frac{1}{95}$ больше экваториального. В 1730-е годы Французская Академия Наук отправила две экспедиции, одну в Лапландию, под руководством Пьера Мопертюи (в этой экспедиции был также Алексис-Клод Клеро), а другую в Перу. Мопертюи пришёл к выводу, что экваториальный радиус на $\frac{1}{178}$ больше полярного. Этот результат был менее точен, чем результат Ньютона.

6.1. Абрахам де Муавр (1667–1754)

После отмены Нантского эдикта, когда во Франции возобновились преследования протестантов, Муавр вынужден был покинуть Францию и с 1688 года жил в Лондоне.

В 1697 году Муавр опубликовал рекуррентное правило образования коэффициентов разложения в бесконечный ряд выражения $(az+bz^2+cz^3+\dots)^n$, в том числе и для рациональных n. Но доказательство он привёл только для натуральных n.

Формула Муавра впервые появилась в статье 1707 года, посвящённой решению некоторых специальных уравнений. Формулу из этой статьи можно записать в виде

$$\sin\alpha=\frac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\alpha+i\cos n\alpha}+\frac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\alpha-i\cos n\alpha}.$$

Эта формула легко выводится из формулы $(\sin\alpha+i\cos\alpha)^n=\sin n\alpha+i\cos n\alpha$, которую сейчас обычно называют *формулой Муавра*. Сам Муавр формулу $(\sin\alpha+i\cos\alpha)^n=\sin n\alpha+i\cos n\alpha$ не получил; впервые её получил Эйлер.

Муавр обратил внимание, что уравнение деления дуги гиперболы на n равных частей чрезвычайно похоже на уравнение деления на n равных частей дуги окружности.

С 1718 года Муавр опубликовал несколько работ по теории вероятностей. Развивая закон больших чисел Якоба Бернулли, он получил локальную и интегральную предельные теоремы. Впоследствии эти теоремы снова открыл Лаплас, и их называют *предельные теоремы Муавра-Лапласа*. Муавр вывел *нормальный закон*

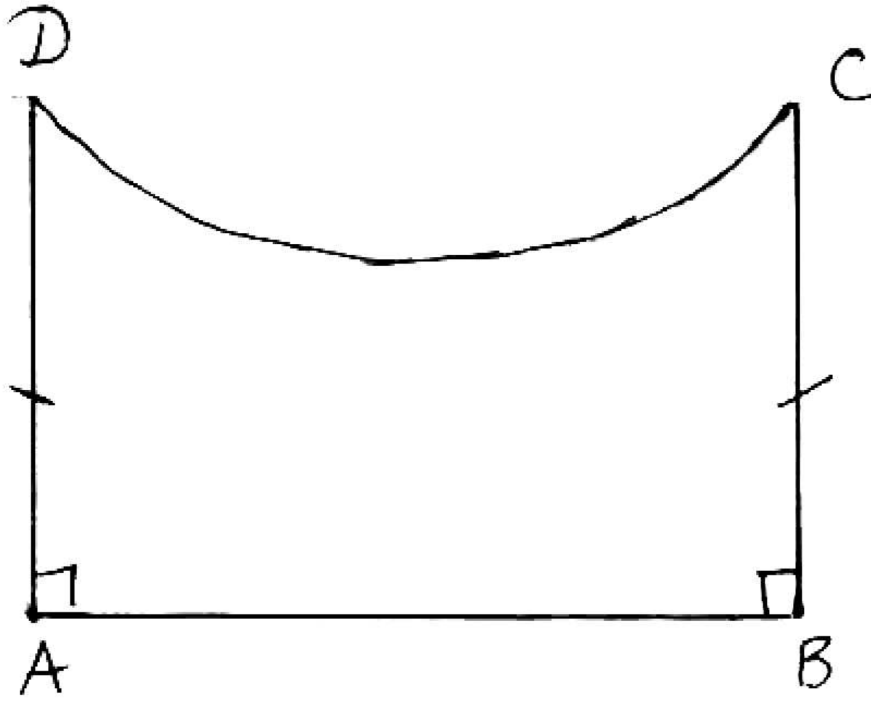

Рис. 6.1.

распределения. В связи с исследованиями азартных игр Муавр подробно изучил свойства рекуррентных последовательностей в нескольких работах (1718-1730). В частности, Муавр строил общее решение однородного линейного разностного уравнения с помощью корней соответствующего алгебраического уравнения; он разобрал примеры, когда это уравнение имеет равные действительные корни и даже два комплексных корня.

Муавр разработал метод производящих функций для решения следующей задачи: какова вероятность того, что на n рулетках с f секторами (с номерами от 1 до f) в сумме получится $p+1$. Мономы функции $f(r) = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{f-1} = \frac{1-r^f}{1-r}$ соответствуют f различным секторам рулетки, а искомый ответ — это коэффициент при мономе степени $p+1-n$ функции $g(r) = (f(r))^n$.

В 1730 году Стирлинг сообщил Муавру о найденном им ряде для $n!$, и в том же году Муавр дал более простой вывод этого ряда, причём впервые указал закон образования его коэффициентов, в которые входят числа Бернулли. Муавр также привёл асимтотическое равенство $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, которое получается, если ограничиться первыми тремя членами ряда. Это равенство часто называют *формулой Стирлинга*, хотя у Стирлинга её нет.

6.2. Джироламо Саккери (1667-1773)

В 1773 году, незадолго до смерти, итальянский монах-иезуит Саккери опубликовал книгу «Евклид, очищенный от всех пятен, или же геометрическая попытка установить самые первые начала всей геометрии». Сначала он доказал три утверждения:

- если сумма углов одного треугольника меньше 180°, то сумма углов любого треугольника меньше 180°;
- если сумма углов одного треугольника равна 180°, то сумма углов любого треугольника равна 180°;
- если сумма углов одного треугольника больше 180°, то сумма углов любого треугольника больше 180°.

В исследованиях Саккери важную роль играл четырёхугольник $ABCD$, в котором углы A и B прямые, $AD = BC$ (рис. 6.1). Четырёхугольник такого вида получил название *четырёхугольник Саккери*, хотя идея рассмотрения такого четырёхугольника восходит к ат-Туси. Можно доказать, что $\angle C = \angle D$. Если оба эти угла прямые, то получаем пятый постулат. Саккери рассматривает два случая: 1) эти углы тупые; 2) эти углы острые.

При гипотезе тупого угла Саккери быстро приходит к противоречию. При этом он использует другие аксиомы Евклида, в частности, аксиому о том, что прямую можно сколь угодно продолжать. (В сферической геометрии такой аксиомы нет, и в сферической геометрии гипотеза тупого угла выполняется.) Он показывает, что в случае гипотезы тупого угла любые две прямые пересекаются, поэтому выполняется пятый постулат Евклида (действительно, пятый постулат заключается в том, что при определённых условиях прямые пересекаются). А если выполняется пятый постулат, то справедлива гипотеза прямого угла.

При гипотезе острого угла Саккери доказывает, что две прямые расположены одним из трёх способов:

- они пересекаются;
- они имеют общий перпендикуляр, по обе стороны от которого они удаляются друг от друга;
- в одном направлении они бесконечно сближаются, а в другом бесконечно расходятся.

Третий случай показался ему странным и противоречащим природе прямой линии, и он сделал (неверный) вывод, что гипотеза острого угла ложна. Такое доказательство не удовлетворило и его самого, поэтому он продолжил рассуждения. Саккери рассмотрел множество точек, равноудалённых от прямой (эквидистанту). Он понимал, что в случае гипотезы острого угла эта линия не является прямой. Но он ошибся в вычислении дуги эквидистанты: у него получилось, что она меньше расстояния между основаниями перпендикуляров, проведённых к прямой. А с другой стороны, эти перпендикуляры расходятся, поэтому получилось противоречие.

Саккери получил гораздо больше следствий из гипотезы острого угла, чем его предшественники. Но он не понимал, что доказал важные теоремы новой геометрии (геометрии Лобачевского).

6.3. Джакопо Франческо Риккати (1676-1754)

В 1715 году предложил подстановку $y'' = y'\frac{dy'}{dy}$ (т.е. $\frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy'}{dy}$) для понижения порядка дифференциального уравнения.

В 1723 году впервые поставил вопрос: найти все m, при которых уравнение

$$dy + y^2 dx = ax^m dx$$

допускает разделение переменных. Как выяснилось, переменные разделяются, если $m = \frac{-4k}{2k-1}$, где k — целое число. Эти значения нашли сам Риккати и несколько других математиков; первым этот результат опубликовал Даниил Бернулли (1724). Это уравнение обычно называют *специальным уравнением Риккати*. Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

называют *общим уравнением Риккати*.

6.4. Джон Мечин (1680-1751)

Астроном из Лондона Джон Мечин предложил оригинальный способ вычисления числа π. Этот способ основан на использовании дуги, тангенс которой рационален и в то же время некоторое её кратное мало отличается от $\frac{\pi}{4}$. Пусть $\operatorname{tg}\varphi = p$ и $\operatorname{tg} n\varphi = q$. Тогда

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - n\varphi\right) = \frac{1-q}{1+q} \text{ и } \frac{\pi}{4} = n\varphi + \operatorname{arctg}\frac{1-q}{1+q}.$$

В частности, если $n = 4$ и $p = \frac{1}{5}$, то $q = \frac{120}{119}$ и

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

Последняя формула получила название *формула Мечина*. С её помощью Мечин быстро вычислил 100 десятичных знаков числа π.

6.5. Роджер Коутс (1682-1716)

В 1709-1713 годы Коутс помогал Ньютону в подготовке второго издания «Математических начал натуральной философии». Ньютон доверил ему написать обширное предисловие к новому изданию.

Коутс опубликовал только одну статью. Эта статья в Philosophical Transactions за 1714 год (вышла из печати в 1717 году) посвящена логарифмической функции, которую он вводит как решение функционального уравнения $f(x^n) = nf(x)$. В этой статье содержится также соотношение $\ln(\cos x + i \sin x) = ix$, равносильное знаменитой формуле Эйлера. В этой же статье Коутс приводит метод нахождения рациональных приближений как подходящих дробей цепных дробей.

Из-за преждевременной смерти Коутса многие его важные результаты остались неопубликованными. В частности, он получил разложение $a^n - x^n$ на квадратичные множители вида $a^2 - 2a\cos\frac{2k\pi}{n} + x^2$ и аналогичное разложение $a^n + x^n$. Коутс первым получил разложение числа e в цепную дробь. Он первым сформулировал и геометрически обосновал правила дифференцирования тригонометрических функций (синуса, тангенса, секанса). Коутс заметил, что когда прямая вращается вокруг точки, среднее гармоническое точек пересечения этой прямой с кривой степени n движется по прямой.

6.6. Джулио Карло де Тоски ди Фаньяно (1682-1766)

В 1695 году Иоганн Бернулли поставил задачу о нахождении кривых, сумма или разность дуг которых равна дуге окружности или отрезку прямой. Этой задачей заинтересовался любитель математики граф Фаньяно. Он исследовал дуги эллипсов, гипербол и лемнискат и открыл формулы сложения этих дуг (1716); это были первые теоремы сложения эллиптических интегралов. Фаньяно нашёл алгебраический способ деления на n частей квадранта лемнискаты Бернулли для $n = 2 \cdot 2^m$, $n = 3 \cdot 2^m$ и $n = 5 \cdot 2^m$, где m — натуральное число. В память об этих открытиях на надгробии Фаньяно изображена лемниската.

Фаньяно известен также своими исследованиями геометрии треугольника. Он доказал, что если X — центр масс треугольника ABC, то $XA^2 + XB^2 + XC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

В 1750 году Фаньяно собрал свои работы и издал их в двухтомной книге «Produzioni matematiche». Эйлера в 1751 году попросили написать рецензию на эту книгу. Эйлер заинтересовался результатами Фаньяно о сложении эллиптических интегралов и разработал общую теорию таких интегралов.

6.7. Джордж Беркли (1685-1753)

В 1734 году Беркли выпустил памфлет «Аналист» с остроумной и во многом справедливой критикой принципов анализа; он подверг критике как подход Ньютона, так и подход Лейбница. Метод анализа он считал несогласным с логикой: его можно рассматривать только как некую догадку, но не как метод научного доказательства. Невозможно понять, что такое приращение текущих величин в самом начале их зарождения или исчезновения: «Это ни конечные величины, ни бесконечно малые, ни даже ничто. Не могли бы мы их назвать призраками почивших величин?» Невозможно представить себе мгновенную скорость, т.е. скорость в данное мгновение и в данной точке. В предложенном Ньютоном выводе флюксии степенной функции x^n Беркли усматривал нарушение логики: сначала составляется отношение приращения функции $(x + o)^n - x^n$ к приращению аргумента o, а затем принимается, что приращение исчезает. Но если при выводе предложения принималось некое допущение, а в конце это допущение отвергается или заменяется противоположным, то всё рассуждение теряет силу. И как вообще можно говорить об отношении между вещами, не имеющими величины?

Правильность результатов, получаемых с помощью анализа, Беркли объясняет наличием в аналитических рассуждениях двух противоположных и взаимно уничтожающихся ошибок. Такое же мнение высказал Лагранж в 1761 году.

Критику Беркли приходилось учитывать, и многие пытались применить в анализе строгие методы древнегреческих математикой.

6.8. Брук Тейлор (1685-1731)

Основное сочинение Тейлора — «Прямой и обратный метод приращений» (1715). В нём получена общая теорема о разложении функции в степенной ряд. За три года до этого Тейлор сообщал её в письме Джону Мечину. Специальный вид своего ряда, ошибочно называемый *рядом Маклорена*, Тейлор тоже привёл, но не дал ему никакого применения.

Тейлор исходит из интерполяционной формулы Ньютона, выведенной для конечного приращения $h = n\Delta x$:

$$f(a+h) - f(a) = h\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2} + \dots$$
$$\dots + \frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)\dots(h-(n-1)\Delta x)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\frac{\Delta^n f(a)}{\Delta x^n},$$

где $\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$, $\Delta^2 f(a) = \Delta(\Delta(f(a)) = f(a + 2\Delta x) - 2f(a + \Delta x) + f(a)$ и т.д. Тейлор делает предельный переход $\Delta x \to 0$ и, не заботясь о том, что число членов разложения неограниченно возрастает, делает вывод, что для любой функции $f(x)$ имеет место разложение

$$f(a+h) = f(a) + h\frac{df(a)}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2f(a)}{dx^2} + \dots$$

Книга Тейлора привлекла внимание к дальнейшей разработке теории конечных разностей. В этой же книге получены правило дифференцирования обратной функции и формула замены переменных, введено интегрирование по частям, на языке механики и геометрии получено дифференциальное уравнение малых колебаний струны. Тейлор нашёл решение уравнения малых колебаний струны и получил выражение основной частоты колебания струны через натяжение и линейную плотность. Тейлор ввёл также понятие особого решения дифференциального уравнения. Так он назвал решение, которое не получается подстановкой некоторого значения константы в выражение для общего решения дифференциального уравнения. Особое решение — это огибающая семейства общих решений.

В том же 1715 году издана книга Тейлора «Линейная перспектива», в которой разработаны основные принципы перспективы.

6.9. Николай Бернулли (1687-1759)

Николай Бернулли — племянник Якоба и Иоганна Бернулли. Переписываясь с Лейбницем в 1712-1716 годы, он показал, что последовательность $(1+x)^n$ расходится при $x > 0$.

В письме 1743 году к Эйлеру Николай Бернулли пишет, что с рядами нельзя обращаться как с многочленами бесконечной степени; в частности, нельзя рассматривать суммы корней этих «многочленов», как делал Эйлер. Он также обращал внимание, что для вычислений нельзя использовать расходящиеся ряды. Эйлер же настаивал, что расходящийся ряд имеет определённое значение, соответствующее значению того алгебраического выражения, из которого этот ряд получен. (Эйлер здесь подразумевал степенные ряды.) Эйлер утверждал, что такое определение суммы расходящегося ряда ещё ни разу не привело его к противоречию. Николай Бернулли на это возражал, что двум разным выражениям может соответствовать один и тот же ряд, поэтому сумма ряда может быть не единственной. Но это не убедило Эйлера, поскольку Бернулли не привёл конкретного примера. Такой пример был найден лишь 40 лет спустя после этого спора. Пусть $n > m$. Тогда при $x = 1$ степенной ряд

$$\frac{1 + x + \dots + x^{m-1}}{1 + x + \dots + x^{n-1}} = \frac{1 - x^m}{1 - x^n} = 1 - x^m + x^n - x^{n+m} + x^{2m} + \dots$$

превращается в $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$.

Николай Бернулли изучал ортогональные траектории и построил ортогональные траектории к некоторым семействам кривых. В 1721 году он обнаружил равенство смешанных частных производных второго порядка. Внёс существенный вклад в изучение уравнения Риккати.

6.10. Христиан Гольдбах (1690-1764)

В письме к Эйлеру (1742) Гольдбах высказал следующую до сих пор не доказанную гипотезу: любое чётное натуральное число, начиная с 4, можно представить в виде суммы двух простых чисел (*гипотеза Гольдбаха*). Гольдбах высказал также гипотезу, что любое нечётное натуральное число, начиная с 7, является суммой трёх простых чисел. Эта гипотеза слабее, поскольку любое нечётное натуральное число, начиная с 7, можно представить в виде суммы числа 3 и чётного числа, которое не меньше 4. Слабая гипотеза Гольдбаха доказана в 2013 году Харальдом Гельфготтом.

В 1752 году также в письме к Эйлеру Гольдбах предположил, что любое нечётное натуральное число можно представить в виде $2n^2 + p$, где p — простое число. В том же году Эйлер проверил эту гипотезу вплоть до 1000, а в следующем — до 2500. Но в 1856 году эта гипотеза была опровергнута: числа 5777 и 5993 нельзя представить в таком виде.

6.11. Джеймс Стирлинг (1692-1770)

В 1717 году при содействии Ньютона Стирлинг опубликовал книгу «Ньютоновы кривые третьей степени», в которой он не только снабдил доказательствами теоремы Ньютона, но и внёс существенные дополнения общего характера. Стирлинг нашёл, что число коэффициентов уравнения кривой степени n (рассматриваемых с точностью до пропорциональности) равно $\frac{1}{2}(n^2 + 3n)$, а затем указал, что это число равно числу точек, определяющих кривую степени n. Стирлинг определил возможное число бесконечных ветвей кривых чётной и нечётной степени, а также асимптот. К 72 видам кривых третьей степени, найденных Ньютоном, он добавил 4 новых.

В 1719 году, также при содействии Ньютона, опубликовал статью «Ньютонов метод разностей». В ней он применил интерполяционный метод Ньютона к улучшению сходимости некоторых рядов. С высокой точностью произвёл суммирование ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, но не заметил, что полученный им результат соотвествует $\frac{\pi^2}{6}$. Дал вывод одной из интерполяционных формул Ньютона, которую Ньютон привёл без доказательства.

В 1730 году опубликовал «Метод разностей, или трактат о суммировании и интерполяции», где предложил ряд (расходящийся) для $n!$, но не указал закон образования его коэффициентов. Из этого ряда легко выводится *формула Стирлинга*, впервые полученная Муавром (у самого Стирлинга этой формулы нет). Стирлинг, занимаясь интерполяцией ряда для $n!$, вычисляет 10 десятичных знаков числа $\left(\frac{3}{2}\right)!$.

В комбинаторике известны числа Стирлинга первого и второго рода. Числа Стирлинга зависят от двух параметров — n и k. Число первого рода — это количество перестановок множества из n элементов, имеющих k циклов. Число второго рода — количество неупорядоченных разбиений множества из n элементов на k непустых подмножеств. Эти числа возникли у Стирлинга при работе с рядом для факториала.

6.12. Пьер Луи де Мопертюи (1698-1759)

В 1729 году Мопертюи в статье «О некоторых особенностях кривых» исследовал особые точки алгебраических кривых.

В 1736-1737 годы он возглавлял экспедицию в Лапландию, целью которой было выяснить, каким эллипсоидом вращения является Земля: вытянутым или сплющенным. Ньютон считал, что сплющенным, а последователи Декарта — что вытянутым. Экспедиция подтвердила мнение Ньютона.

В 1746 году (в этом же году он стал первым президентом Берлинской академии) Мопертюи сформулировал и высказал принцип наименьшего действия и опубликовал его в 1750 году. Он надеялся, что этот принцип может объединить все законы природы.

6.13. Колин Маклорен (1698-1746)

Почти 30 лет спустя после Тейлора (в 1742 году) Маклорен по-новому вывел ряд Тейлора. Доказательство Маклорена основано на методе неопределённых коэффициентов. Вопросы сходимости его не беспокоят. Ещё до Маклорена эту теорему опубликовал Стирлинг: в 1717 году для многочленов, а в 1730 году для общих функций. Маклорен с помощью своего ряда получил уже известные в то время разложения для a^x, $\sin \frac{x}{a}$ и $\cos \frac{x}{a}$.

Маклорен в книге «Органическая геометрия или общее описание кривых линий» (1720), которую он написал в 19 лет, доказал, что наибольшее число двойных точек кривой степени n равно $(n-1)(n-2)/2$. Он также ввёл понятие deficiency (позднее это стало называться родом кривой): наибольшее число двойных точек минус настоящее число двойных точек. Когда эта разность равна нулю, кривую называют уникурсальной. В той же книге сказано, что кривая степени n и кривая степени m пересекаются не более чем в mn точках. Современный вид этому утверждению придал Эйлер, включивший в рассмотрение мнимые и бесконечно удалённые точки. Это утверждение в 1748 году пытались доказать Эйлер и Крамер, но без особого успеха. В 1764 году доказательство получил Безу, но только для случая простых (некратных) точек пересечения. Полное доказательство, включающее и кратные пересечения, получил в 1873 году Альфан.

Маклорен встретился со следующим затруднением. С одной стороны, $\frac{1}{2}n(n+3)$ точек определяют кривую степени n, поэтому естественно ожидать, что две разные кривые степени n не могут иметь $\frac{1}{2}n(n+3)$ общих точек. С другой стороны, две кривые степени n пересекаются в n^2 точках, т.е. общие n^2 точек могут принадлежать разным кривым степени n. Но $n^2 > \frac{1}{2}n(n+3)$ при $n > 3$, а при $n = 3$ оба эти числа совпадают.

«Трактат о флюксиях» (1742) был отчасти ответом на критику Беркли. Маклорен предложил строгое обоснование метода флюксий с помощью классического метода исчерпывания, не используя бесконечно малых. Маклорен предложил также новый вывод ряда Тейлора: подразумевая возможность почленного дифференцирования ряда, применил метод неопределённых коэффициентов. Маклорен при этом отметил, что это только новый вывод, а сама теорема уже доказана Тейлором. В этой же книге Маклорен привёл новое доказательство формулы для суммирования рядов, уже ранее доказанной Эйлером и получившей название *ряд Эйлера–Маклорена*. Кроме того, в этой книге содержится интегральный признак сходимости рядов.

Уже после смерти Маклорена в качестве приложения к его «Трактату об алгебре» (1748) был издан его труд «Об общих свойствах геометрических линий». Там он доказал следующую теорему, ставшую ему известной (без доказательства) из посмертного наследия Коутса. Пусть прямая, вращающаяся вокруг точки P, пересекают кривую степени n в точках $A_1, \ldots, A_n$. Тогда точка M, для которой

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{PA_1} + \cdots + \frac{1}{PA_n},$$

перемещается по прямой. Для коники эта прямая — поляра точки P. Если точка P выбрана в качестве начала координат на вращающейся прямой, то координата точки M — это среднее гармоническое координат точек

$A_1, \ldots, A_n$. Маклорен доказал также, что если вершины четырёхугольника и две точки пересечения его противоположных сторон движутся по кубической кривой, то касательные, проведённые через две противоположные вершины, пересекаются в точке, лежащей на кривой. Кроме того, если n-угольник движется так, что каждая из его сторон проходит через некоторую фиксированную точку, а все вершины, кроме одной, движутся по кривым, степени которых равны $m_1, \ldots, m_{n-1}$, то свободная вершина движется по кривой степени $2m_1m_2\ldots m_{n-1}$, а если все фиксированные точки лежат на одной прямой, то степень кривой уменьшается до $m_1m_2\ldots m_{n-1}$.

6.14. Даниил Бернулли (1700-1782)

Даниил Бернулли — сын Иоганна Бернулли. С 1725 года по 1733 год работал в Санкт-Петербурге. В это время он ввёл определение частоты осцилляций системы и показал, что движение струны раскладывается в композицию бесконечного числа гармонических колебаний. В отношении математики эти годы были наиболее продуктивными, потому что в Базеле, куда Бернулли вернулся, он сначала преподавал ботанику, потом психологию и лишь с 1750 года он смог преподавать физику.

В 1729 году в письме к Гольдбаху Даниил Бернулли ввёл число e как предел $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Он получил его как значение x, при котором достигаем максимума функция $x^{1/x}$. В том же письме приведено представление числа e в виде ряда:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

В 1738 году Бернулли опубликовал трактат «Гидродинамика», где вывел *уравнение Бернулли*, выражающее зависимость между давлением и скоростью идеальной жидкости на данной глубине. Дифференциальных уравнений в этой книге ещё нет (их позднее получил Эйлер).

В 1747-48 годы Бернулли представил решение уравнения колебаний струны в виде тригонометрического ряда.

С 1738 го 1778 годы Бернулли опубликовал 7 мемуаров, содержащих решения важных проблем теории вероятностей и статистики. Впервые в теории вероятностей применил дифференциальное уравнение. Опубликовал первую таблицу нормального распределения.

В 1755 году Бернулли предложил решение уравнения струны в виде тригонометрического ряда. Он утверждал, что любая плоская кривая может быть выражена тригонометрическим рядом, с чем не согласились ни Даламбер, ни Эйлер.

6.15. Томас Байес (1702-1761)

В посмертно изданной статье (1764) Байеса содержатся идеи, которые впоследствии привели к понятиям *априорной* и *апостериорной* вероятности. В этой статье Байес изучает следующий воображаемый опыт. Точка падает на квадрат $ABCD$ со стороной, равной 1 (рис. 6.2). Опыт производится n раз, и p раз точка падает правее случайной прямой so и q раз левее (положение точки o на отрезке AB равновероятно). Предполагается, что вероятность падения точки в любую точку квадрата одна и та же. Тогда вероятность того, что точка o лежит на отрезке bc ($0 < c < b < 1$), равна

$$\frac{\int_c^b x^p(1-x)^q dx}{\int_0^1 x^p(1-x)^q dx}.$$

Сейчас *формулой Байеса* обычно называют дискретный вариант этой формулы:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)}.$$

Такой формулы у Байеса нет. Но у него есть формула $P(B) = P(A)P(B|A)$.

6.16. Габриэль Крамер (1704-1752)

Крамер первым разработал общий алгоритм решения систем линейных уравнений. Он изложил свой метод в мемуаре «Об исчезании неизвестных величин» и в 1744 году представил его в Парижскую академию наук. Этот мемуар не был опубликован.

Затем Крамер подробно описал свой метод в книге «Введение в анализ алгебраических кривых», изданной в Женеве в 1750 году. Крамер замечает, что кривая степени n определяется $\frac{n^2+3n}{2}$ параметрами. Поэтому через $\frac{n^2+3n}{2}$ данных точек можно провести кривую степени n. При $n=2$ получаем, что конику можно провести через 5 данных точек. Для нахождения коэффициентов уравнения коники, проходящей через 5 данных точек, получем 5 линейных уравнений для 5 неизвестных. В приложении к книге приведено *правило Крамера* решения этой

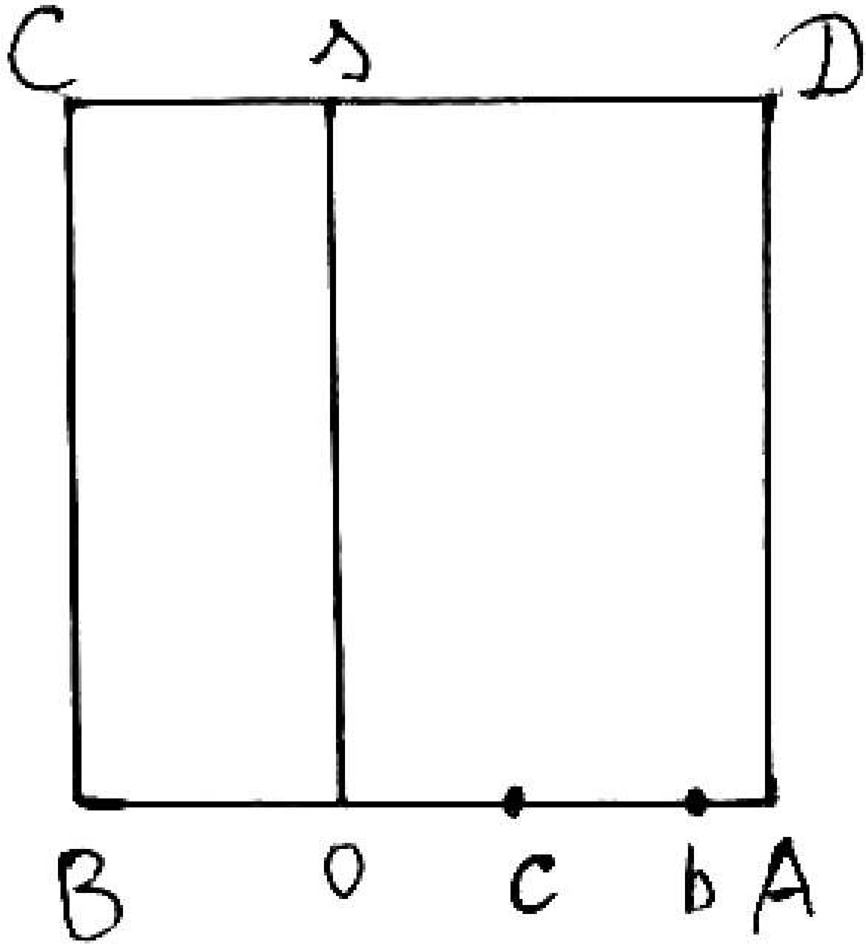

Рис. 6.2.

системы уравнений. В приложении приводится также доказательство (с помощью исключения неизвестных) того, что две кривые степени m и n пересекаются не более чем в mn точках.

При изучении особых точек Крамер использует параллелограмм Ньютона. Так же, как и Маклорен, Крамер обратил внимание на парадокс, связанный с числом точек пересечения двух кривых и числом точек, определяющих кривую (см. с. 8). Этот парадокс часто называют *парадоксом Крамера*.

В письме к Кастильону Крамер поставил задачу: вписать треугольник в данную окружность так, чтобы его стороны проходили через три данные точки (*задача Крамера–Кастильона*). Кастильон решил эту задачу через 25 лет после смерти Крамера. У этой задачи есть обобщения, связанные с многоугольниками, вписанными в конику.

6.17. Винченцо Риккати (1707-1775)

Сын Джакопо Риккати. Между 1757 и 1767 годами опубликовал несколько работ, в которых исследовал гиперболические функции и применил их для решения кубического уравнения. Нашёл формулы сложения для них, их производные и их связь с экспонентой.

6.18. Леонард Эйлер (1707-1783)

6.18.1. Биография

Леонард Эйлер родился в Швейцарии, недалеко от Базеля. В 1720 году он начал обучение в университете в Базеле. Эйлер изучал книги по математике, следую советам Иоганна Бернулли, который по субботам в домашней обстановке пояснял ему трудные места. В 1725 году старшие сыновья Иоганна Бернулли, Николай (1695-1726) и Даниил(1700-82), получили приглашение в только что основанную Санкт-Петербургскую Академию Наук. В 1727 году Эйлер переехал в Петербург, получив приглашение по рекомендации братьев Бернулли. В 1733 году Даниил Бернулли вернулся на родину и Эйлер занял его место на кафедре математики, вскоре ему поручили также руководство отделом географии. Эйлер сразу же начал учить русский язык, в отличие от большинства его коллег по Академии.

В 1736 году опубликовано двухтомное сочинение Эйлера «Механика». Основой для развития механики Эйлер считал систематическое применение дифференциального и интегрального исчисления. Его предшественники (в том числе и Ньютон) использовали подход на основе синтетической геометрии. Во втором томе Эйлер решает ряд задач из дифференциальной геометрии, относящихся к поверхностям и геодезическим. Спустя почти 30 лет опубликована вторая книга Эйлера по механике, «Теория движения». В ней Эйлер выводит уравнения движения твёрдого тела и рассматривает один случай, когда решение этих уравнений можно выразить в эллиптических интегралах; ещё два случая интегрируемости нашли Лагранж (1788) и Софья Ковалевская (1888). Большой труд Эйлера посвящён кораблестроению. В первом томе Эйлер исследует общую теорию равновесия и устойчивости плавающих тел. Во втором томе общая теория применяется к частному случаю — к кораблям. Эйлер изобрёл лопастное колесо и гребной винт, которые в то время воспринимались чисто теоретически, потому что не было необходимых для их использования двигателей. Эйлер вывел основные уравнения гидростатики и гидродинамики. Он написал несколько трактатов по теории музыки.

В 1738 году Эйлер ослеп на правый глаз (из-за инфекционной болезни; рассказ Фусса о том, что Эйлер заболел из-за перенапряжения неправдоподобен).

После смерти Анны Иоановны, недолгого царствования младенца Ивана IV и дворцового переворота, приведшего к власти Елизавету Петровну, для иностранцев в России ситуация была неблагоприятная. В 1741 году по приглашению прусского короля Фридриха Великого Эйлер переехал в Берлин, где оставался до 1766 года, но и в это время он посылал сотни своих работ в Санкт-Петербургскую Академию. Среди причин переезда Эйлер указывал также на страх перед частыми в Санкт-Петербурге пожарами (Эйлер жил в деревянном доме). Этот страх был обоснованным. В 1771 году, после возвращения в Россию, во время страшного пожара, уничтожившего более 500 домов, слепой Эйлер едва не погиб; его спас из горящего дома, рискуя собственной жизнью, ремесленник из Базеля. Президентом Берлинской Академии наук с 1746 года был Мопертюи. В Берлине Эйлер разработал основы вариационного исчисления (уравнения Эйлера–Лагранжа). В 1748 году опубликовано «Введение в анализ бесконечно малых». В 1757 году в письме Гольдбаху Эйлер рассказывает своём о решении задачи, связанной с шахматами: «Найти обход конём всех клеток шаматной доски (по одному разу), начинающийся в любой заданной клетке.» Эйлер строит для этого замкнутый обход, заканчивающийся там же, где начинается. В оптике Эйлер предложил идею исправления хроматической аберрации в телескопах рефракторного типа посредством использования линз из стекла и воды (имеющих разное преломление); эта идея была реализована посредством использования линз из стекла двух разных видов.

В 1766 году по просьбе Екатерины II вернулся в Петербург, хотя и опасался, что суровый климат повредит его зрению (в Берлине на его левом глазе появилась катаракта). И действительно в 1771 он полностью ослеп в результате осложения после операции катаракты. По-видимому, одной из существенных причин отъезда из Берлина послужило то, что прусский король так и не назначил его президентом Академии, хотя его научные заслуги были гораздо выше, чем у Мопертюи, в 1752 году попросившего об отставке, потому что его престиж упал в ходе диспута о принципе наименьшего действия (отставку он получил в 1759 году). Но король обожал французов (место Эйлера в Академии после его отъезда занял Лагранж[1]) и не хотел, чтобы президентом Академии стал швейцарец. Эйлер с 1753 года исполнял обязанности президента Академии. В 1763 году по приглашению короля приехал Даламбер, которого король очень хотел сделать президентом Академии. Но у Даламбера была совсем другая цель: он приехал в Берлин, чтобы убедить короля назначить Эйлера президентом Академии. С королём-франкофилом у Эйлера были непростые отношения. Эйлер долго не мог получить обещанное королём возмещение расходов по переезду из Петербурга в Берлин; король запретил офицеру своей армии жениться на дочери Эйлера; на просьбу назначить 29-летнего сына Эйлера профессором, король ответил, что тот слишком молод, и назначил на это место 18-летнего сына Кастилльона. (Сын Эйлера Иоганн Альберт был талантливым математиком, он получил 8 международных академических премий — всего в полтора раза меньше своего отца.) Но отъезд Эйлера для короля был весьма нежелателен. Он с презрением относился к простым и прямым манерам Эйлера, но не мог не ценить заслуг Эйлера в поднятии уровня Берлинской Академии. На неоднократые письма Эйлера с просьбами разрешить ему уехать в Петербург, король ответил только, чтобы он перестал ему их писать. И даже согласившись в конце концов на отъезд Эйлера, он мелочно запретил отъезд одного из его сыновей как военнообязанного.

В 1768-1769 годы выходит «Алгебра для начинающих» в русском переводе, а в 1770 году публикуется оригинальная немецкая версия.

В 1769-1771 годы выходит «Диоптрика» в трёх томах, в основном написанная ещё в Берлине. Эта книга надолго стала основным учебником по геометрической оптике. Эйлер излагает оптику посредством дифференциального и интегрального исчисления.

Последние 17 лет своей жизни Эйлер интенсивно работал слепым; в этом ему помогала феноменальная память, позволявшая проделывать в уме сложные вычисления. За это время он написал более 400 статей.

Работы Эйлера по физике столь же многочисленны и фундаментальны, как и работы по математике. Написанные им учебники использовались в течение столетий. Помимо учебников Эйлер ежегодно издавал 800 страниц оригинальных исследовательских статей.

В начале сентября 1783 года Эйлер занимался математическим обоснованием полёта братьев Монгольфье на воздушном шаре, совершённого и июне того года. 7 сентября, обсудив рассчёт орбиты планеты Уран, открытой двумя годами ранее, Эйлер, как сказал Кондорсе, «перестал вычислять и жить» в возрасте 76 лет.

От большинства знаменитых математиков того времени Эйлер отличался тем, что никогда не ввязывался в споры, связанные с приоритетом.

Помимо необычайной памяти Эйлер отличался и редкостной способностью сосредотачиваться: «Ребёнок на коленях, кошка на плече — так он обычно писал свои бессмертные сочинения.»

6.18.2. Анализ

По написанным Эйлером учебникам анализа учились несколько поколений математиков. Значительная часть изложенных в них результатов принадлежала самому Эйлеру. Сначала в 1748 году было издано «Введение в анализ бесконечных» (в двух томах), затем «Дифференциальное исчисление» (1755) и наконец «Интегральное исчисление» (1768-1770) в трёх томах. Эти книги содержат огромное количество сложнейших примеров различных преобразований функций, рядов, интегралов, дифференциальных уравнений; Эйлер виртуозно обращался с такими преобразованиями. Эйлер выделил понятие аналитической функции как функции, представимой рядом, но не выделил понятие непрерывной функции: он ошибочно полагал, что разрывные функции — это те, которые нельзя представить одним аналитическим выражением. Но у Эйлера иногда уже встречается представление о функции как просто некотором соответствии.

В 1729 году, обобщая полученное в 1722 году Гольдбахом выражение для $\left(\frac{3}{2}\right)!$, Эйлер пришёл к интегралу $\int_0^1(-\ln x)^n dx = \Gamma(n+1)$. Этот интеграл (*гамма-функция*) равен $n!$ при натуральном n. Эйлер ввёл также *бета-функцию* $B(p+1,q+1) = \int_0^1 x^p(1-x^q)dx$ и доказал соотношения $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ и $\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin(n\pi)}$. В той же статье 1729 года Эйлер обратился к вопросу о дифференциалах дробного порядка, которым занимался в своё время Лейбниц. Исходя из формулы $\frac{d^n z^m}{dz^n} = \frac{m!}{(m-n)!}z^{m-n}$, верной для натуральных n и m, Эйлер положил по определению $\frac{d^n z^m}{dz^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}z^{m-n}$. В 1765 году Эйлер получил другое интегральное представление гамма-функции: $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$.

В 1734 году Эйлер доказал, что результат дифференцирования по нескольким переменным не зависит от порядка дифференцирования. (Этот факт обнаружил Николай Бернулли в 1721 году.)

В том же году Эйлер рассмотрел ряд для синуса как многочлен бесконечной степени и записал выражение сумм степеней корней этого «многочлена» через коэффициенты, применив те же самые формулы, что и для

[1]Место одноглазого геодезиста занял геодезист с двумя глазами — так шутил прусский король.

обычных многочленов. В результета он получил (правильные) формулы для сумм $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^5}$, ... Это доказательство вызвало справедливые возражения Даниила и Николая Бернулли. В той же статье Эйлер получил бесконечное произведение для $\sin x$, рассматривая синус как многочлен и раскладывая этот многочлен на линейные множители, соответствующие его корням:

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

В 1732 году Эйлер привёл следующую формулу суммирования рядов (в том числе и расходящихся). Пусть X — общий член ряда, S — сумма первых x членов. Тогда

$$S = \int X\,dx + \frac{X}{2} + \frac{1}{12}\frac{dX}{dx} - \frac{1}{720}\frac{d^3X}{dx^3} + \frac{1}{30240}\frac{d^5X}{dx^5} - \dots$$

В частности, для гармонического ряда $X = \frac{1}{x}$, поэтому

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x} = \gamma + \ln x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \dots,$$

где γ — константа (*постоянная Эйлера*), которую можно определить следующим образом:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right);$$

эта постоянная затем неоднократно встречалась в его исследованиях. Положив $x = 10$, Эйлер вычислил 16 десятичных знаков этой постоянной. В 1736 году Эйлер сообщил эту формулу суммирования Стирлингу. Тот ответил, что его формула для суммы логарифмов является частным случаем этой формулы и что эта формула есть в уже печатающейся книге Маклорена. Книга Маклорена «Трактат о флюксиях» была опубликована в 1742 году; в ней содержался новый вывод этой формулы, получившей название *ряд Эйлера–Маклорена*. Общее выражение для коэффициентов этого ряда Эйлер получил не сразу. Он привёл его в книге «Дифференциальное исчисление» (1755), несколько глав которой посвящено этому ряду; коэффициенты выражаются через числа Бернулли. В этой книге Эйлер применяет ряд Эйлера–Маклорена, чтобы вычислить ещё одним способом сумму ряда $\sum \frac{1}{n^{2k}}$.

Ряд Эйлера–Маклорена, вообще говоря, расходится, но он может давать очень хорошие приближения, если ограничиться частными суммами с подходящим числом членов. Этот ряд возникает следующим способом. Пусть надо вычислить сумму $S(n) = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$. Ясно, что $f(n) = S(n) - S(n-1)$. Воспользуемся разложением в ряд:

$$S(x-1) = S(x) - \frac{S'(x)}{1!} + \frac{S''(x)}{2!} - \frac{S^{(3)}(x)}{3!} + \dots,$$

т.е.

$$f = S' - \frac{S''}{2!} + \frac{S^{(3)}}{3!} - \frac{S^{(n)}}{4!} + \dots$$

Введя оператор $D = \frac{d}{dx}$, это выражение можно записать в следующем виде:

$$f = \left(D - \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} - \frac{D^4}{4!} + \dots\right) S,$$

т.е. $\left(1 - e^{-D}\right) S = f$, откуда $S = \left(1 - e^{-D}\right)^{-1} f$. Но

$$\frac{1}{1 - e^{-z}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}.$$

Поэтому, интерпретируя $D^{-1}f$ как $\int f(x)dx$, получаем:

$$S(x) = \int^x f(t)dt + \frac{1}{2} f(x) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x).$$

Это нужно понимать следующим образом:

$$S(n) - S(r) = \int_r^n f(t)dt + \frac{1}{2}[f(n) - f(r)] + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!} [f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(r)].$$

Полагая $r = 0$, получаем формулу Эйлера–Маклорена:

$$\sum_{r=0}^{n} f(r) = \int_0^n f(t)dt + \frac{1}{2}[f(n) - f(0)] + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!}[f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(0)].$$

В 1735 году Эйлер вычислил сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, которую до него пытались вычислить многие математики. Его доказательство основано на равенстве

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Эйлер также вычислил суммы $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ для $n = 4$, 6, 8, 10 и 12. В 1739 году он получил общую формулу $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = C\pi^{2n}$, где C — рациональное число, выражающееся через числа Бернулли.

В 1736 году в книге «Механика» Эйлер высказал и применил теорему о дифференцировании однородной функции f: $\sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf$, где n — степень функции.

В 1737 году Эйлер доказал, что числа e и e^2 иррациональны. В том же году Эйлер установил тождество для дзета-функции $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$: $\zeta(n) = \prod \left(1 - \frac{1}{p^n}\right)^{-1}$, где произведение берётся по всем простым p. Для ряда $\sum \frac{1}{p}$ Эйлер получил асимптотическое равенство $\sum_{p \leq m} \frac{1}{p} \approx \ln\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\right)$ и тем самым доказал, что этот ряд расходится. В 1749 году Эйлер обнаружил следующее функциональное уравнение для дзета-функции:

$$\zeta(1-n) = 2^{1-n}\pi^{-n} \cos\frac{n\pi}{2}\Gamma(n)\zeta(n).$$

Доказательство Эйлера было неполным. Полное доказательство получил Риман в 1859 году, не зная об открытии Эйлера.

Между 1743 и 1746 годами Эйлер разработал представление о логарифме в комплексной области как о бесконечнозначной функции (в современных обозначениях эта функция имеет вид $z \mapsto \ln|z| + i(\arg(z) + 2\pi n)$, где n — любое целое число).

В 1744 году в письме к Гольдбаху Эйлер привёл первое разложение функции в тригонометрический ряд:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots$$

В 1751 году Эйлера попросили написать рецензию на книгу Фаньяно «Produzioni matematiche». Он заинтересовался результатами Фаньяно о сложении эллиптических интегралов и разработал общую теорию таких интегралов. Эллиптический интеграл — это интеграл вида $\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$, где R — рациональная функция, а P — многочлен степени 3 или 4 без кратных корней. Общую теорему сложения эллиптических интегралов Эйлер получил в 1768 году. Для эллиптического интеграла $\alpha(u) = \int_0^u \frac{dz}{\sqrt{1+mz^2+nz^4}}$ теорема сложения, доказанная Эйлером, выглядит так. Пусть $\alpha(w) = \alpha(u) + \alpha(v)$, т.е. интеграл от 0 до w равен сумме интеграла от 0 до u и интеграла от 0 до v. Тогда w следующим образом выражается через u и v:

$$w = \frac{u\sqrt{1 + mv^2 + nv^4} + v\sqrt{1 + mu^2 + nu^4}}{1 - nu^2v^2}.$$

При $n = 0$ и $m = -1$ мы получаем формулу $\sin(u + v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$, поскольку $\int_0^u \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin u$.

Числа Эйлера E_{2k} — это коэффициенты разложения $\frac{1}{\cos z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_{2k} z^{2k}}{(2k)!}$. Эйлер исследовал это разложение в книге «Дифференциальное исчисление» (1755). Он установил связь этих чисел с вычисленными им суммами $1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{7^{2k+1}} + \frac{1}{9^{2k+1}} - \dots$

В 1775 году Эйлер ввёл дзета-функцию от двух переменных: $\zeta(s_1, s_2) = \sum_{n_1 > n_2 > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}}$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$, $s_1 \geq 2$, $s_2 \geq 1$. Он доказал для неё несколько тождеств, в частности, $\zeta(2, 1) = \zeta(3)$.

Эйлер получил разложения в непрерывные дроби чисел e и $\frac{e^2-1}{e}$ (первое из них было получено ещё Коутсом).

Эйлер ввёл обозначение e для числа e сначала в 1731 году в письме к Гольдбаху, затем в книге «Механика» (1736) и в других книгах.

6.18.3. Дифференциальные уравнения

В первой своей работе по дифференциальным уравнениям «Новый метод сведения бесчисленных дифференциальных уравнений второго порядка к дифференциальным уравнениям первого порядка» (1728) Эйлер обобщил понятие однородности. В этой работе Эйлер применил замену с помощью показательной функции.

Особенно много результатов по интегрированию дифференциальных уравнений Эйлер получил с помощью метода интегрирующего множителя, который он разрабатывал с начала 1730-х годов.

В мемуаре «Об интегрировании дифференциальных уравнений высших порядков» (1743) Эйлер изложил приём решения линейного однородного уравнения любого порядка n с постоянными коэффициентами

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + \dots + N\frac{d^n y}{dx^n} = 0.$$

Положив $y = e^{px}$, Эйлер пришёл к *характеристическому уравнению*

$$A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \dots + Np^n = 0.$$

Если все корни характеристического уравнения некратные, то общее решение исходного уравнения является линейной комбинацией функций вида $e^{p_1 x}, \dots, e^{p_n x}$, где $p_1, \dots, p_n$ — корни характеристического уравнения. В мемуаре «Дальнейшее развитие метода интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков» (1753) Эйлер изложил способ решения неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами, основанный на применении интегрирующего множителя. Но уже ранее (1750) Даламбер опубликовал другой метод, основанный на сведении неоднородного уравнения к системе линейных уравнений первого порядка.

В 1747 году Эйлер перенёс свой метод решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами на системы уравнений.

В 1752 году Эйлер вывел уравнения движения твёрдого тела с неподвижной точкой (точкой опоры). В матричном виде эти уравнения можно записать так: $L = I\dot{\omega} + \omega \times I\omega$, где L — скорость изменения момента вращения, I — тензор инерции, ω — вектор угловой скорости. Тензор инериции симметричен и положительно определён, поэтому его можно привести к диагональному виду, и это упрощает запись уравнений. Но Эйлер ещё не владел этой техникой, и он записывает уравнение в общем виде, не занимаясь их упрощением. Эйлер получил решение уравнений инерционного (т.е. без силы тяжести) движение твёрдого тела, в случае, когда центр тяжести тела совпадает с точкой опоры (*случай Эйлера* интегрируемости уравнений движения твёрдого тела).

В 1755 году Эйлер вывел уравнение движения жидкости (как несжимаемой, так и сжимаемой). Это — система уравнений с частными производными. Эйлер не учитывал вязкость; соответствующее исправление внесли Навье и Стокс 70 лет спустя.

В трёхтомной книге «Интегральное исчисление» Эйлер изложил много разных методов интегрирования отдельных классов нелинейных дифференциальных уравнений. В то время интегральное исчисление включало не только вычисление интегралов, но и решение (интегрирование) дифференциальных уравнений. Основная часть этой книги посвящена именно дифференциальным уравнениям.

В первом томе (1768) Эйлер занимается интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений, прежде всего разделением переменных (т.е. приведением уравнения к виду $f(x)dx = g(y)dy$).

Во втором томе (1769) Эйлер рассмотрел, в частности, гипергеометрическое дифференциальное уравнение

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [c - (a+b+1)x]\frac{dy}{dx} - aby = 0$$

и получил его решение в виде гипергеометрического ряда

$$y = 1 + \frac{a\cdot b}{1\cdot c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots$$

Эйлер также получил некоторые соотношения для гипергеометрической фунции, задаваемой гипергеометрическим рядом.

В третьем томе (1770) содержится первый систематический обзор теории дифференциальных уравнений в частных производных. В 1766 году Эйлер предложил новый метод решения уравнения колебаний струны $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Сделав замену $u = x + at$, $v = x - at$, он получил уравнение $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0$. Для сведения нелинейных уравнений первого порядка к линейным Эйлер использовал преобразование

$$d(z - px - qy) = -x\,dp - y\,dq \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\, q = \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

получившее название *преобразование Лежандра*, хотя Лежандр рассматривал его позже Эйлера. Эйлер решает уравнение

$$(x+y)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + m(x+y)\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + nz = 0,$$

получившее впоследствии название *уравнение Эйлера–Пуассона*.

В работах, изданных посмертно, Эйлер применил цепные дроби к решению уравнения Риккати.

6.18.4. Вариационное исчисление

Эйлер разработал общий метод решения вариационных задач в 1726–1744 годы. В 1726 году он поставил задачу о брахистохроне в сопротивляющейся среде. В 1728 году Эйлер вывел дифференциальное уравнение геодезической линии на поверхности. В статье «Общее решение изопериметрической проблемы, поставленной в самом широком смысле» (1732) впервые появляется общая постановка вариационной задачи.

В 1744 году Эйлер в отдельном издании собрал почти все свои исследования о вариационном исчислении. Эйлер свёл решение задачи об экстремуме интеграла $\int Z(x, y, y')dx$ к решению дифференциального уравнения $Z_y - \frac{d}{dx}Z_{y'} = 0$ (*уравнение Эйлера–Лагранжа*). До Эйлера уже было рассмотрено несколько частных задач, но именно Эйлер разработал общую теорию вариационного исчисления.

Пытаясь упростить решение вариационных задач, Эйлер искал метод, который позволил бы непосредственно применить к ним аппарат дифференциального исчисления. При этом он пришёл к необходимости доказать соотношение $f'_y dy' + y' df_{y'} = 0$. Лагранж доказал это соотношение, применив интегрирование по частям, и написал об этом Эйлеру в 1755 году. В письмах Лагранжа Эйлер нашёл то, что уже давно искал. Эйлер сразу же подготовил две работы, но не спешил их публиковать, чтобы не лишить заслуг 20-летнего Лагранжа.

6.18.5. Комплексные числа

В 18 веке правила обращения с отрицательными и особенно с комплексными числами ещё не были полностью выяснены, возможность использования отрицательных чисел оспаривали многие математики. Даже Эйлер делал ошибки при обращении с комплексными числами. Например, в книге «Аглебра» он писал, что произведение двух мнимых чисел может быть положительным, например, $\sqrt{-1}\sqrt{-4} = \sqrt{4} = 2$; затем он, правда, добавил, что $\sqrt{4} = \pm 2$.

Изучая логарифмы комплексных чисел, Эйлер не сразу понял, что в комплексной области логарифм — многозначная функция. Но постепенно он построил теорию логарифмов в комплексной области.

В письме к Николаю Бернулли в 1742 году Эйлер впервые высказал общее утверждение, что любой многочлен с действительными коэффициентами раскладывается на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами, т.е. корни такого многочлена имеют вид $a + bi$, где a и b — действительные числа.

В 1714 году Рождер Коутс опубликовал теорему, которая в современных обозначениях формулируется так: $i\varphi = \ln(\cos\varphi + i \sin\varphi)$. Много лет спустя это соотношение переоткрыл Эйлер — знаменитая *формула Эйлера*. В письме Иоганну Бернулли в 1740 году Эйлер сообщал, что функции $2\cos x$ и $e^{ix} + e^{-ix}$ — решения одного и того же дифференциального уравнения, поэтому они должны совпадать. В 1743 году Эйлер опубликовал это наблюдение вместе с аналогичным выражением для синуса.

В 1776 году Эйлер разработал метод вычисления определённых интегралов с помощью комплексной переменной.

В 1777 году Эйлер вывел так называемые условия (соотношения) Коши–Римана, но их уже ранее (в 1752 году) открыл Даламбер.

6.18.6. Теория чисел

Долгое время теоремы из теории чисел, сформулированные Ферма, оставались без доказательств и без приложений. Лишь Эйлеру удалось доказать многие из этих теорем, что пробудило интерес других математиков к теории чисел.

Интерес Эйлера к теории чисел во многом связан с Христианом Гольдбахом (1690-1764), который в то время тоже работал в России, но не в Петербурге, а Москве. Именно в письме к Эйлеру (1742) Гольдбах высказал свою знаменитую гипотезу о том, что любое натуральное число $n \geq 6$ можно представить в виде суммы трёх простых чисел (*проблема Гольдбаха*). В 1729 году Гольдбах в письме спрашивает Эйлера, что он думает по поводу утверждения Ферма о том, что все числа вида $2^{2^n} + 1$ являются простыми. Эйлер отвечает, что сомневается в этом (в 1732 году он доказал, что число $2^{2^5} + 1$ делится на 641). Ещё через полгода Эйлер пишет, что на него произвело большое впечатление утверждение Ферма о том, что любое натуральное число является суммой четырёх квадратов (а также трёх треугольных чисел, пяти пятиугольных и т.д.). После этого интерес Эйлера к различным задачам из теории чисел уже не пропадал. Эйлер доказал утверждение Ферма, что любое простое число вида $4n + 1$ представляется в виде суммы двух квадратов, причём единственным образом.

В 1736 году Эйлер получил доказательство малой теоремы Ферма: если число p простое и a не делится на p, то $a^{p-1} - 1$ делится на p. Эйлер применяет метод математической индукции: он доказывает, что если $a^p - a$ делится на p, то $(a+1)^p - (a+1)$ делится на p; это следует из того, что если число p простое, то биномиальные коэффициенты C_p^k делятся на p при $0 < k < p$. В 1758 году Эйлер обобщил малую теорему Ферма, введя так называемую *функцию Эйлера* $\varphi(n)$ (количество чисел, взаимно простых с n и меньших n); он доказал, что если числа a и n взаимно простые, то $a^{\varphi(n)} - 1$ делится на n.

В 1737 году Эйлер написал статью о цепных дробях, в которой указал на связь периодических цепных дробей с квадратными уравнениями и квадратичными иррациональностями. Например, если

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \dots}},$$

то $x - a = \frac{1}{b+x-a}$, поэтому $x = a - \frac{b}{2} + \sqrt{1 + \frac{b^2}{4}}$. В той же статье Эйлер получил непрерывную дробь для числа e:

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \dots}}}}}.$$

Эйлер активно применял математический анализ (особенно бесконечные ряды) для решения задач теории чисел. В 1737 году он получил знаменитое тождество

$$\prod_p \frac{1}{1 - p^{-n}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n},$$

лежащее в основе всей аналитической теории чисел.

Исходя из замечания Ферма, Эйлер воссоздал метод бесконечного спуска и доказал великую теорему Ферма сначала для $n = 4$ (1738), а затем и для $n = 3$ (1755). Случай $n = 3$ потребовал новых идей, Эйлеру пришлось изучить арифметику чисел вида $a + b\sqrt{-3}$, где a и b — целые числа.

В 1744 году Эйлер дал первую, ещё не полную, формулировку *квадратичного закона взаимности*. Полную формулировку он дал в 1772 году. Доказать квадратичный закон взаимности Эйлер не смог.

В 1747 году в письме Гольдбаху Эйлер сообщил, что нашёл доказательство того, что любое простое число вида $4n + 1$ является суммой двух квадратов целых чисел. В 1749 году Эйлер представил это доказательство Берлинской Академии.

В 1747 году Эйлер доказал рекуррентную формулу для суммы делителей числа n, сначала по индукции, а затем методами математического анализа.

В первом томе «Введения в анализ бесконечно малых величин» (1748) целая глава отведена цепным дробям. Там, в частности, показано, что любая периодическая цепная дробь (с числителями, равными 1) есть корень квадратного уравнения с целыми коэффициентами. Двадцать лет спустя Лагранж доказал, что верно и обратное: любая квадратичная иррациональность выражается цепной дробью такого вида. В этой же книге Эйлер продолжил исследование с помощью бесконечных произведений представлений натуральных числе в виде суммы слагаемых и доказал, что количество разбиений числа k на различные слагаемые равно количеству разбиений числа k на нечётные слагаемые.

В 1751 году (опубликовано в 1754 году) Эйлер доказал, что любое положительное рациональное число является суммой квадратов четырёх рациональных чисел. Он хотел доказать это для целых чисел, а не для рациональных, но это у него не получилось. Доказательство для целых чисел получил Лагранж в 1770 году, а в 1773 году Эйлер существенно упростил это доказательство.

В 1752 году Эйлер доказал, что многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами не может при всех целых x принимать простые значения. При этом он указал многочлен $x^2 - x + 41$, принимающий простые значения при $x = 1, 2, 3, \dots, 40$.

В статье 1765 года Эйлер назвал уравнение $y^2 = ax^2 + 1$ *уравнением Пелля*. Сам Джон Пелль (1611-1685) ничего не публиковал об этом уравнении, но это уравнение исследуется в книге швейцарского математика Иоганна Рахна (1622-1676). Пелль обучал его математике и принимал участие в написании книги. По-видимому, Эйлеру была известна степень участия Пелля в исследовании этого уравнения. Эйлер дал решение уравнения Пелля с помощью цепных дробей. Он также рассмотрел общее неопределённое уравнение второй степени и свёл его к уравнению $y^2 = ax^2 + b$.

В 1773 году Эйлер определил понятие *первообразного корня* (независимо от Ламберта, сделавшего это в 1769 году). Эйлер ввёл этот термин и дал первое доказательство существования первообразного корня для любого простого числа (в доказательстве были пробелы). Первообразный корень по модулю p — это число a, степени которого дают все возможные ненулевые остатки при делении на p.

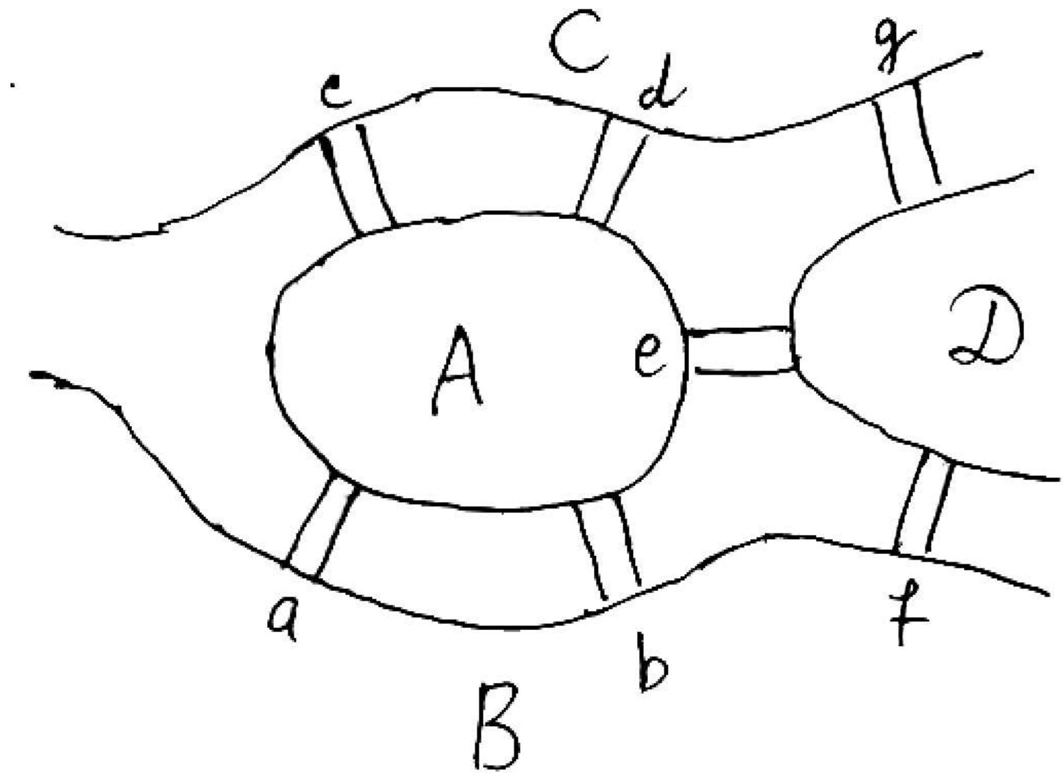

Рис. 6.3.

6.18.7. Геометрия

В 1728 году Иоганн Бернулли поставил перед Эйлером задачу об уравнении геодезической и в следующем году получил от Эйлера письмо с дифференциальным уравнением геодезической. В ответном письме Бернулли привёл найденное им уравнение, по форме отличное от уравнения Эйлера. Однако Бернулли подготовил и опубликовал изложение своего метода лишь в 1742 году. Эйлера первым опубликовал в 1732 году дифференциальное уравнение геодезической линии на поверхности. Эйлер разработал вариационное исчисление, но его методам недоставало общности. Общие методы разработал Лагранж (1762).

В 1736 году Эйлер решил задачу о семи кёнигсбергских мостах. В этой задаче требуется выяснить возможность пройти по всем семи мостам (рис. 6.3), проходя по каждому мосту только один раз. Эйлер пишет, что эта задача относится к тому, что Лейбниц называл geometriam situs (или analysis situs) — геометрия положения, т.е. область геометрии, изучающая только взаимное расположение, и не использующая расстояния и вычисления с расстояниями. Эйлер рассмотрел также более общую задачу, когда река разделяется на несколько русл и мосты расположены произвольным образом. Задачу о кёнигсбергских мостах Эйлер решал следующим образом. Помимо мостов он рассмотрел области A, B, C и D (рис. 6.3; попасть из одной области в другую можно только по мосту). Обход можно записать в виде последовательности, в которой чередуются области и мосты. В обходе, при котором каждый мост проходится ровно один раз, область, в которую ведёт k мостов, где k — нечётное число, должна встречаться $(k+1)/2$ раз (если число k чётное, то область должна встречаться $k/2$ раз, но в задаче о кёнигсбергских мостах есть области только с 3 и 5 мостами). В область A ведёт 5 мостов, а в области B, C и D — по 3 моста, поэтому область A должна встретиться 3 раза, а области B, C и D — по 2 раза. Всего области встречаются 9 раз, поэтому между ними 8 мостов. Получено противоречие, потому что мостов у нас 7. Эйлер показал, что если областей с нечётным числом мостов не больше двух, то требуемый обход возможен, а если больше двух, то невозможен.

В 1744 году в книге, посвящённой вариационному исчислению, в качестве первого примера минимальной поверхности привёл катеноид (поверхность, полученная при вращении цепной линии).

В первом томе «Введения в анализ» (1748) Эйлер впервые внёс полную ясность в вопрос о знаках тригонометрических функций любого аргумента (до него ошибки с этими знаками в учебниках были очень частыми). Во втором томе он разработал аналитическую геометрию конических сечений. В этой книге Эйлер вывел также формулу для радиуса кривизны кривой (формула для радиуса кривизны в полярных координатах содержалась ещё в учебнике Лопиталя). Эйлер изучает аффинные преобразования, которые ввёл Клеро. Он записывает формулы ортогонального преобразования одной прямоугольной системы координат в другую; в этих формулах появляются так называемые *углы Эйлера*. Эти углы играют важную роль в книге Эйлера «Теория движения твёрдого тела» (1765) при описании вращательного движения.

Во втором томе «Введения в анализ» Эйлер нашёл следующее условие того, что алгебраическая кривая имеет n осей симметрии. Пусть $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\cos s = \frac{x}{z}$. Рассмотрим, например, случай $n = 5$. Легко проверить, что $\cos 5z = \frac{x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4}{z^5}$. Чтобы алгебраическая кривая имела 5 осей симметрии, она должна задаваться уравнением $f(x, y) = 0$, где f рационально выражается через $x^2 + y^2$ и $x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$.

«Приложение о поверхностях» во «Ведение в анализ» было первым систематическим изложением аналитической геометрии в пространстве. Эйлер исследовал квадратичные поверхности. При этом он открыл гиперболический параболоид.

В 1750 году Эйлер в письме Гольдбаху сообщил теорему о том, что сумма числа вершин V выпуклого многогранника и числа его граней F превышает на две число рёбер E: $V + F = E + 2$; опубликована эта теорема в 1758 году. В формулировке и доказательстве этой теоремы у Эйлера были существенные пробелы. Он не описывает чётко, к какому классу объектов применима эта теорема, а говорит просто о телах, ограниченных плоскими гранями. Понятия выпуклого многогранника в то время ещё не было. Доказательство Эйлер проводит по индукции, удаляя на каждом шаге одну вершину. Но если действовать так, то для некоторых многогранников могут возникнуть ситуации, когда ход рассуждений Эйлера нарушается. При этом, однако, можно доказать, что всегда можно выбрать вершину, для которой рассуждения Эйлера применимы, но этих дополнительных рассуждений у Эйлера нет. Первое строгое доказательство теоремы Эйлера получил Лежандр в 1794 году; он спроецировал многогранник на сферу и воспользовался формулой площади сферического многоугольника.

Около 1620 года очень близкие к теореме Эйлера утверждения обнаружил Декарт. (Они остались в неопубликованных записках, с которыми познакомился Лейбниц, а затем они были утеряны.) Декарт знал выражение $2\pi(V - 2)$ для суммы всех плоских углов многогранника и соотношение между числом плоских углов P, вершин и граней многогранника: $P = 2F + 2V - 4$. Из того, что знал Декарт, теорема Эйлера легко выводится (но сам Декарт этого не сделал). Если просуммировать углы всех граней многогранника, то для суммы плоских углов многогранника получаем выражение $2\pi(E - F)$. Приравнивая $2\pi(E - F)$ и $2\pi(V - 2)$, получаем теорему Эйлера. А для того, чтобы получить теорему Эйлера из равенства $P = 2F + 2V - 4$, достаточно заметить, что $P = 2E$.

Эйлер нашёл формулы, выражающие объём тетраэдра через его рёбра или через три ребра с общей вершиной и углы между ними.

В 1750 году Эйлер доказал следующее тождество для четырёхугольника $ABCD$:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2,$$

где P и Q — середины диагоналей.

В 1755 году Эйлер при исследовал движения жидкости применил те же конформные отображения, что и Даламбер. В 1769 году он показал, что семейства кривых, пересекающихся под прямым углом, можно получить как линии уровня вещественной и мнимой части комплексной аналитической функции. Далее Эйлер показал, что дробно-линейные преобразования переводят окружности и прямые в окружности и прямые. Конформные отображения Эйлер применил и в картографии.

В работе о кривизне поверхностей (1760 год, опубликована в 1767 году) Эйлер изучил кривизны сечений, проходящих через нормаль к поверхности. Он доказал, что сечения с наибольшим и наименьшим радиусами кривизны взаимно препендикулярны. Эйлер получил следующее выражение для радиуса r кривизны произвольного сечения через наибольший радиус сечения f, наименьший радиус сечения g и угол φ между плоскостью произвольного сечения и плоскостью наибольшего сечения:

$$r = \frac{2fg}{f + g - (f - g)\cos 2\varphi}.$$

В 1813 году Дюпен преобразовал эту формулу к более удобному виду:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{f}\cos^2\varphi + \frac{1}{g}\sin^2\varphi.$$

В 1765 году доказал аналитически, что ортоцентр, центр масс и центр описанной окружности треугольника лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*).

В 1770 году (опубликовано в 1772 году) ввёл и изучил понятие развёртывающейся поверхности, т.е. поверхности, которую можно наложить на плоскость без складок и разрывов.

В 1775 году (опубликовано в 1782 году) ввёл соприкасающийся репер пространственной кривой и доказал первую из формул Френе.

В 1776 году доказал, что любое движение сферы с неподвижным центром (сохраняющее ориентацию) является вращением вокруг оси.

В работе, представленной Петербургской Академии Наук в 1777 году, но опубликованной лишь в 1795 году, Эйлер находит эллипс наименьшей площади, содержащий вершины треугольника, и вычисляет его площадь. Впоследствии этот эллипс получил название *эллипс Штейнера*.

6.18.8. Многочлены

В 1732 году Эйлер показал, что решение уравнений второй, третьей и четвёртой степеней сводится к решению уравнений первой, второй и третьей степеней, которые он назвал aequatio resolvents (разрешающие уравнения), откуда происходит название *резольвента*. Эйлер получил резольвенту кубического уравнения $x^3 = ax + b$ с помощью подстановки $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$, а уравнения четвёртой степени $x^4 = ax^2 + bx + c$ — с помощью подстановки $x = \sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B} + \sqrt[4]{C}$. В 1762 году для уравнений пятой Эйлер использовал подстановку

$$x = w + A\sqrt[5]{v} + B\sqrt[5]{v^2} + C\sqrt[5]{v^3} + D\sqrt[5]{v^4};$$

он считал весьма правдоподобным, что уравнение любой степени можно решить с помощью подстановки аналогичного вида. Впоследствии Абель доказал, что если уравнение пятой степени разрешимо в радикалах, то его корни имеют именно такой вид; подстановка Эйлера играет важную роль в доказательстве Абеля.

Эйлер одновременно с Даламбером предложил правильную формулировку основной теоремы алгебры: «Любой многочлен с действительными коэффициентами раскладывается в произведение линейных или квадратичных многочленов с действительными коэффициентами. Почти одновременно с Даламбером Эйлер попытался доказать основную теорему алгебры. В отличие от Даламбера, доказательство которого было аналитическим, Эйлер хотел получить почти чисто алгебраическое доказательство (но он пользовался тем, что многочлен нечётной степени имеет корень). В 1746 году он представил Берлинской академии свои «Теоремы о мнимых корнях уравнений». Впоследствии Гаусс писал об этом доказательстве, что недопустимо предполагать существование каких-то «мнимых величин», отличных от $a + b\sqrt{-1}$, и при этом производить над этими «тенями теней», о которых мы ровно ничего не знаем, арифметические действия по тем же правилам, как с обычными числами. (Другими словами, ошибка Эйлера была в том, что он предполагал, что корни многочлена существуют и с ними можно производить обычные арифметические действия; после этого с помощью арифметических действий он доказывал, что корни имеют вид $a + b\sqrt{-1}$.)

В 1764 году Эйлер разработал следующий метод нахождения общего корня двух уравнений, который он изложил на примере многочленов $x^3 + px^2 + qx + r$ и $x^2 + Px + Q$. Если эти многочлены имеют общий корень α, то $x^3 + px^2 + qx + r = (x - \alpha)(x^2 + ax + b)$ и $x^2 + Px + Q = (x - \alpha)(x + A)$. Поэтому существуют такие многочлены $x + A$ и $x^2 + ax + b$, что $(x^3 + px^2 + qx + r)(x + A) = (x^2 + Px + Q)(x^2 + ax + b)$. Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях даёт систему четырёх линейных уравнений с тремя неизвестными a, b и A. Исключение этих неизвестных даёт многочлен, получивший впоследствии название *результант*.

6.18.9. Исчисление конечных разностей

Интерес Эйлера к исчислению конечных разностей связан с задачами интерполяции, задачами суммирования функций и теорией рекуррентных последовательностей. Эйлер использовал исчисление конечных разностей при разработке методов приближённого интегрирования дифференциальных уравнений (Эйлер заменяет дифференциальное уравнение разностным) и создании основ вариационного исчисления. Эйлер даже пытался построить само дифференциальное исчисление на основе исчисления конечных разностей.

Первые главы книги «Дифференциальное исчисление» (1755) целиком посвящены исчислению конечных разностей; одна глава посвящена приложению конечных разностей к суммированию рядов. В этой книге Эйлер впервые дал последовательное изложение основ исчисления конечных разностей.

6.18.10. Комбинаторика. Логика

В 1741 году Эйлер начал заниматься задачей о разбиении натурального числа n на $m < n$ слагаемых при различных условиях. Этой задаче Эйлер посвятил несколько статей. При этом Эйлер развил метод *производящих функций*, позволяющий определить комбинаторные функции как коэффициенты разложений производящих функций в формальные ряды; первым метод производящих функций применил Муавр. Пусть $p(n)$ — число разбиений числа n, т.е. количество способов записать n в виде суммы натуральных чисел без учёта порядка слагаемых. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots}.$$

Аналогично $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots$ — это производящая функция для числа разбиений на неравные слагаемые.

Очевидное тождество $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots = \frac{1-x^2}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x^2}\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdots = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\dots}$ показывает, что количество разбиений числа n на различные слагаемые равно количеству разбиений числа n на нечётные слагаемые.

В это же время Эйлер заметил, но пока не доказал, что $\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + \ldots$, где степени мономов — пятиугольные числа, т.е. числа вида $(3k^2 \pm k)/2$ (*теорема Эйлера о пятиугольных числах*). Эту теорему Эйлер доказал в 1750 году.

Эйлер в письме Гольдбаху (1751) привёл следующую формулу для количества способов разбиения n-угольника на треугольники диагоналями:

$$P_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1)}.$$

Это — так называемое $(n-2)$-е *число Каталана*; эти числа названы в честь бельгийского математика Эжена Шарля Каталана (1814–1894). В письме Эйлер приводит также производящую функцию для последовательности этих чисел.

Эйлер занимался также задачей о числе способов, какими без повторений можно обойти все клетки шахматной доски (1759).

Во втором томе «Писем к одной немецкой принцессе» (1768) Эйлер изложил интерпретацию силлогистика Аристотеля на схемах с кругами (*круги Эйлера*).

6.19. Жорж-Луи Леклерк де Бюффон (1707-1788)

В 1735 году Бюффон опубликовал отчёт об опыте с бросанием иглы на кафельный пол и подсчётом того, сколько раз игла пересекала края плиток. Он придумал этот опыт с целью доказать преимущество «анализа» над «геометрией» в теории вероятностей. Впоследствии Лаплас заметил, что опыт с бросанием иглы на плоскость, на которой проведены параллельные прямые на одинаковых расстояниях, позволяет экпериментально вычислить число π. Эта задача стала исходным пунктом развития геометрической теории вероятностей.

6.20. Томас Симпсон (1710-1761)

Метод приближённого вычисления интегралов, известный под названием *формула Симпсона*, как пишет сам Симпсон, он узнал от Ньютона. Наоборот, метод Ньютона приближённого вычисления корней в его современном виде ($x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$) предложен Симпсоном в статье 1740 года; сам Ньютон в этом методе не использовал дифференциальное исчисление.

6.21. Жан Поль де Гюа де Мальв (1712-1785)

В 1740 году де Гюа де Мальв выпустил в Париже книгу «Применения анализа Декарта». В ней он высказал и применил идею, что бесконечно удалённые точки и обычные точки равноправны и их можно получать друг из друга проектированием. Де Гюа де Мальв доказал, что если кубическая кривая имеет три точки перегиба, то они лежат на одной прямой. Он риблизился к понятию кривой Гессе, рассматривая «результант», получаемый им для определения точек перегиба, как кривую и находя с её помощью точки перегиба исходной кривой. В этой книге введён термин *особая точка*.

Декарт сформулировал без доказательства следующее утверждение(*правило знаков Декарта*): количество положительных (соответственно, отрицательных) корней многочлена не превосходит числа перемен (соответственно, повторений) знака в последовательности коэффициентов. В 1741 году де Гюа первым опубликовал доказательство правила знаков Декарта, причём он привёл сразу два доказательства. В первом доказательстве он доказывает, что добавление отрицательного корня многочлена, т.е. умножение многочлена на $(x+p)$, где p — положительное число, не изменяет число перемен знака, а число повторений знака увеличивает на 1. Аналогично добавление положительного корня не изменяет число повторений знака, а число перемен знака увеличивает на 1.

6.22. Алексис Клод Клеро (1713-1765)

Клеро написал работу о некоторых кривых четвёртого порядка в 12 лет. Особенно его интересовали кривые в пространстве. В 16 лет он написал о них книгу «Исследования о кривых двоякой кривизны». В 18 лет Клеро был избран в Парижскую Академию Наук.

Книга «Исследования о кривых двоякой кривизны» была опубликована в 1731 году. Она положила начало трём геометрическим дисциплинам: аналитической геометрии в пространстве, дифференциальной геометрии и начертательной геометрии. Клеро свободно и в полном объёме оперирует пространственными координатами. В статье 1731 году Клеро первым получил уравнение плоскости в трёхмерном пространстве, записанное в координатах x, y, z.

В работе «О кривых, которые получают, пересекая какую-либо кривую поверхность плоскостью, известной по положению» (1731) доказал, что все кривые третьей степени можно получить центральным проектированием из пяти расходящихся парабол. Эта теорема о проективной классификации кривых третьей степени была сформулирована Ньютоном, но не доказана им. В этой же работе рассматривается важный класс преобразований плоскости — аффинные преобразования.

В 1733 году Клеро доказал, что для точек геодезической линии на поверхности вращения произведение радиуса параллели на синус угла геодезической с меридианом постоянно (*теорема Клеро*).

В 1734 году изучал дифференциальное уравнение $y = xy' + f(y')$, получившее название *уравнение Клеро*. Это уравнение имеет общее решение вида $y = cx + f(c)$ и особое решение — огибающую семейства общих решений; особое решение получается, если избавиться от c в системе уравнений $y = cx + f(c)$ и $x + f'(c) = 0$.

В 1735-1737 годы Клеро был членом лапландской экспедиции Мопертюи, целью которой было измерение фигуры Земли. Клеро занимался также теоретическим исследованием этой проблемы и посвятил ей книгу «Теория фигуры Земли, извлечённая из принципов гидростатики» (1743).

В 1739 году независимо от Эйлера доказал, что результат дифференцирования по нескольким переменным не зависит от порядка дифференцирования.

В 1739-1740 годы доказал существование интегрирующего множителя для дифференциального уравнения первого порядка.

В «Началах геометрии» (1741) для изложения теории параллельных вместо пятого постулата Евклида принял предположение о существовании прямоугольника. (Из этого предположения и других аксиом Евклида пятый постулат можно вывести.)

В 1745 году начал заниматься задачей трёх тел, в частности, задачей об орбите Луны. При этом он сначала пришёл к выводу, что закон обратных квадратов Ньютона неверен. Расхождение между видимым движением Луны и вычисленным по закону всемирного тяготения было столь значительным, что многие учёные высказывали сомнения в точности этого закона. В ноябре 1747 года Клеро объявил в Парижской академии, что закон обратных квадратов неверен; Даламбер и Эйлер поддержали это мнение. Но уже весной 1748 года Клеро понял, что расхождение связано не с самим законом обратных квадратов, а с приближениями, которые делаются при вычислениях. В мае 1749 года Клеро объявил в Академии, что если использовать более точные приближения, то видимое движение согласуется с законом обратных квадратов. Эйлеру не удалось повторить эти вычисления. Свои результаты Клеро изложил в книге «Теория Луны, выведенная из единственного начала притяжения, обратно пропорционального квадратам расстояний» (1752).

В 1754 году Клеро получил интегральное представление коэффициентов тригонометрического ряда.

6.23. Джованни Франческо де Тоски ди Фаньяно (1715-1797)

Сын Джулио Карло де Тоски ди Фаньяно. В 1775 году поставил задачу (*задача Фаньяно*): в данный остроугольный треугольник вписать треугольник минимального периметра. Аналитически доказал, что это будет треугольник с вершинами в основаниях высот (*ортотреугольник*). Доказал также, что биссектрисы ортотреугольника лежат на высотах исходного треугольника.

6.24. Мэтью Стюарт (1717-1785)

В книге «Общие теоремы, полезные для высших областей математики» (1746) содержится так называемая *теорема Стюарта*: если точка D лежит на стороне BC треугольника ABC, то

$$AD^2 = AC^2\frac{BD}{BC} + AB^2\frac{CD}{BC} - BD\cdot CD.$$

6.25. Жан ле Рон Даламбер (1717-1783)

В 1743 году вышел «Трактат о динамике», в котором Даламбер предложил так называемый *принцип Даламбера*, позволяющий сводить задач динамики к задачам статики. В этом трактате Даламбер доказал также, что собственное движение пространства, имеющее неподвижную точку, является поворотом вокруг некоторой прямой. В том же трактате Даламбер рассмотрел примеры решения систем линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В 1746 году Даламбер выразил механико-геометрическую формулировку уравнения колебаний струны, предложенную Тейлором, следующим уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}.$$

Так впервые было получено одномерное волновое уравнение (*уравнение Даламбера*). Даламбер дал решение этого уравнения в виде $y(t,x) = f(at+x) + g(at-x)$.

По поводу решения этого уравнения между Даламбером, Эйлером и Даниилом Бернулли завязался спор. Бернулли представил общее решение волнового уравнения в виде тригонометрического ряда. Даламбер полагал, что при решении дифференциальных уравнений можно допускать только функции, разлагающиеся в ряд Тейлора, а Эйлер полагал, что дифференциальное и интегральное исчисление можно применять к совершенно произвольным функциям. Кроме того, Эйлер разложил в тригонометрические ряды некоторые рациональные функции. Разгорелся спор по поводу того, любую ли нечётную периодическую функцию можно представить тригонометрическим рядом, состоящим из синусов. Бернулли утверждал, что можно, а Эйлер и Даламбер в это не верили.

Даламбер одновременно с Эйлером предложил правильную формулировку основной теоремы алгебры: «Любой многочлен с действительными коэффициентами раскладывается в произведение линейных или квадратичных многочленов с действительными коэффициентами. В 1746 году Даламбер предложил первое доказательство этой теоремы, но его рассуждения в нескольких местах не были строгими. Например, он без обоснования пользовался тем, что алгебраическая функция раскладывается в сходящийся ряд.

Даламбер в 1747 году показал, что алгебраические операции с комплексными числами не дают ничего нового — получаются комплексные числа, а не какие-то другие числа. Он рассмотрел также выражение $(a+bi)^{h+gi}$.

В 1750 году Даламбер первым опубликовал метод решения неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Это метод основан на сведении неоднородного уравнения к системе линейных уравнений первого порядка. Позднее Даламбер указал, что сумма общего решения однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения с теми же коэффициентами является общим решением неоднородного уранения.

В 1752 году Даламбер исследовал движение тела в однородной невесомой идеальной жидкости. В связи с этим у него возникла следующая задача: найти функции $p(x,y)$ и $q(x,y)$, для которых $dq = M dx + N dy$ и $dp = N dx - M dy$. Из этих уравнений следует, что

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Эти уравнения теперь называют уравнениями Коши–Римана. Даламбер показал, что p и q — вещественная и мнимая часть комплексной функции. Таким образом, он фактически получил так называемые условия Коши-Римана аналитичности функции комплексного переменного. Даламбер показал, что аналитическая функция комплексного переменного задаёт конформное отображение, т.е. отображение, сохраняющее углы между кривыми.

Даламбер предложил основать анализ на понятиях предела и производной. В 1754 году он написал статью о пределах для «Энциклопедии». В этой статье дано более чёткое, чем предыдущие, основание теории пределов, и производная функции определена как предел отношений. Размышления о пределах привели его к признаку сходимости рядов, который теперь называют *признаком Даламбера*.

В 1754 году Даламбер получил интегральное представление первых двух коэффициентов тригонометрического ряда; в том же году Клеро получил такое представление для всех коэффициентов.

Печально знаменита ошибка Даламбера в статье «Орёл и решка» в 4-м томе «Энциклопедии» (1754). По его мнению вероятность выпадения орла два раза подряд при двух бросках монеты равна $\frac{1}{3}$ (а не $\frac{1}{4}$). Даламбер считал, что если при первом броске выпала решка, то второй бросок делать незачем. А ещё возможны броски орёл-орёл и орёл-решка, поэтому всех возможных случаев три, а не четыре.

6.26. Джон Ланден (1719-1790)

В 1775 году Ланден получил соотношение между дугой гиперболы, дугой эллипса и дугой окружности. Для этого он применил преобразование (*преобразование Ландена*), переводящее друг в друга эллиптические интегралы первого рода с различными параметрами (модулями). Это же преобразование позднее независимо от Ландена обнаружил Гаусс. В формулировке Гаусса это преобразование можно записать следующим образом: интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos\varphi + b^2\sin\varphi}}$ не изменится, если заменить a на среднее арифметическое a и b, а b — на среднее геометрическое, т.е. положить $a_1 = \frac{a+b}{2}$ и $b_1 = \sqrt{ab}$.

6.27. Жан Этьен Монтюкла (1725-1799)

Монтюкла известен своими фундаментальными исследованиями по истории математики. Первая его работа, опубликованная в 1754 году, посвящена истории квадратуры круга. В 1758 году он опубликовал «Историю математики» в двух томах. Первый том охватывает историю математики с древности до 1600 года, а второй посвящён 17 веку. Второе издание «Истории математики» вышло в 1799-1802 годы. Монтюкла готовил к публикации третий и четвёртый тома, посвящённые 18 веку (третий — чистой математике, оптике и механике, а четвёртый — астрономии, математической географии и навигации), но не успел их завершить. После смерти Монтюклы их подготовил к публикации Лаланд.

6.28. Иоганн Ламберт (1728-1777)

В 1758 году Ламберт исследовал периодические десятичные дроби: доказал периодичность разложения несократимой дроби, знаменатель которой содержит простые делители, отличные от 2 и 5, а также рациональность любой периодической дроби. Затем, применяя малую теорему Ферма, доказал несколько теорем о числе цифр периода.

В 1759 году Ламберт издал книгу о центральной проекции. Второе издание (1774) дополнено разделом о геометрических построениях с помощью одной линейки и построениях с помощью линейки и неподвижного круга.

В 1766 году Ламберт доказал иррациональность чисел π и e (иррациональность числа e уже была доказана Эйлером в 1737 году, но иррациональность числа π Ламберт доказал первым). Доказанное им утверждение более общее: числа e^x и $\operatorname{tg} x$ иррациональны при рациональных x (так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, то число $\frac{\pi}{4}$ должно быть иррациональным). Доказательство основано на разложении $\frac{e^x+1}{e^x-1}$ и $\operatorname{tg} x$ в цепную дробь. Ламберт высказал предположение, что π и e трансцендентны.

В 1766 году Ламберт написал книгу «Теория параллельных линий», но опубликована она была лишь посмертно в 1786 году, потому что автор не был вполне удовлетворён ей. В этой книге Ламберт был очень близок к построению геометрии Лобачевского. Ламберт исходил из четырёхугольника с тремя прямыми углами и рассматривал для четвёртого угла три гипотезы: 1) угол прямой; 2) угол тупой; 3) угол острый. По поводу гипотезы тупого угла он, как и Саккери, показал, что её можно привести к абсурду. При этом он, по-видимому, первый заметил, что гипотеза тупого угла (если исключить и аксиому Евклида о том, что прямую можно неограниченно продолжать) справедлива на сфере, когда в качестве прямых берутся большие окружности (т.е. сечения сферы плоскостями, проходящими через её центр).

Ламберт не нашёл противоречия в гипотезе острого угла, но остался убеждён в невозможности геометрии, в которой она выполняется. Это не помешало ему обнаружить, что во втором и третьем случае площадь треугольника пропорциональна избытку или соответственно недостатку суммы его улов по сравнению с двумя прямыми углами. Он даже доказал, что при обоих предположениях площадь многоугольника пропорциональна аналогичным образом определяемому угловому дефекту (Саккери сделал это только для треугольника).

Понимая, что вторая гипотеза имеет место на сфере, Ламберт даже высказал предположение, что третья гипотеза может иметь место на мнимой сфере (сфере мнимого радиуса), поскольку при $R = ic$ выражение для площади сферического треугольника $R^2((\alpha+\beta+\gamma)-\pi)$ переходит в выражение для площади треугольника, когда имеет место третья гипотеза: $(ci)^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi) = c^2(\pi-(\alpha+\beta+\gamma))$.

Ламберт заметил, что во втором случае должна существовать абсолютная единица длины. Для этого он взял четырёхугольник $ABGD$ с прямыми углами A, B и D и равными сторонами AB и AD (рис. 6.4). Длине этих сторон можно сопоставить угол G. Абсолютная единица длины получится, если положить, например, $\angle G = 80°$. Некоторое время Ламберт полагал, абсолютная единица длины логически абсурдна, но потом решил, что это не так.

В 1769 году Ламберт сформулировал теорему о существовании *первообразного корня*. Эту теорему доказал Эйлер в 1773 году.

В 1770 году Ламберт обобщил тригонометрию на четырёхугольники.

Гипотеза Ламберта о том, что предположение об остром угле приводит к теоремам, которые будут иметь место для фигур на сфере мнимого радиуса, побудила его написать в 1786 году статью о тригонометрических функциях мнимых углов. Так Ламберт другим путём пришёл к гиперболическим функциям, которые незадолго до этого были уже исследованы Винченцо Риккати.

6.29. Этьен Безу (1730-1783)

Основные иседования Безу связаны с исключением неизвестных из систем уравнений. В четырёхтомном «Курсе математики для гардемаринов» (1764/69) он предложил следующий метод исключения x из уравнений $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ и $g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n = 0$. Рассмотрим разности $b_0f(x) - a_0g(x)$, $(b_0x + b_1)f(x) - (a_0x + a_1)g(x)$, $(b_0x^2 + b_1x + b_2)f(x) - (a_0x^2 + a_1x + a_2)g(x)$ и т.д. Каждая из этих разностей является многочленом степени не выше $n-1$. Приравнивая эти разности нулю, получаем систему линейных уравнений для $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$.

Эйлер надеялся, что с помощью предложенных им резольвент можно решить уравнение пятой степени. Но в 1762 году, продолжая исследования Эйлера, Безу выяснил, что резольвента уравнения степени n имеет степень

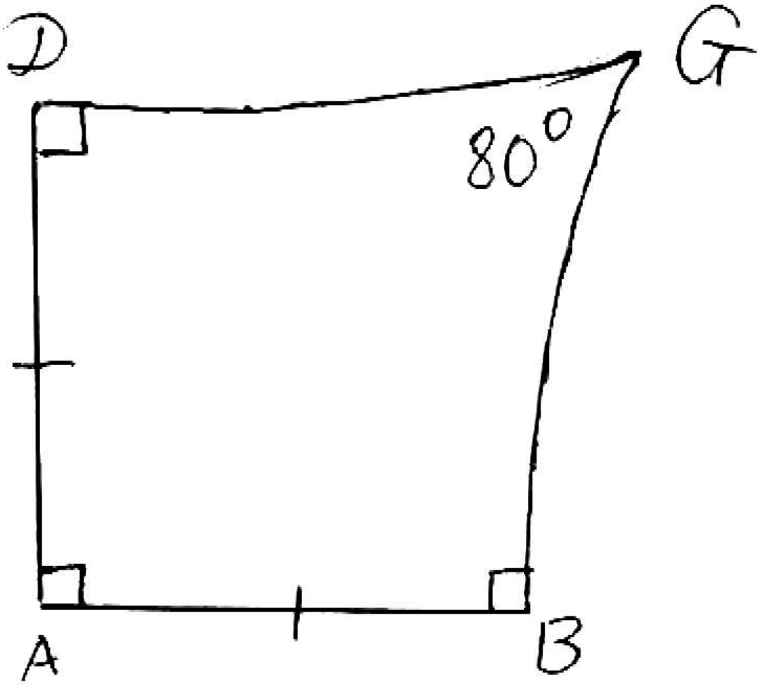

Рис. 6.4.

$2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)$. Это не позволяло надеяться решить с помощью резольвенты уравнение степени $n \geq 5$.

В 1764 году Безу доказал так называемую *теорему Безу*: степень уравнения, полученного при исключении неизвестных из нескольких уравнений, равна произведению степеней этих уравнений. В частности, две кривые степни которых равны n и m, пересекаются в mn точках (включая бесконечно удалённые точки). Печатно первым это утверждение высказал Маклорен (1720), но без учёта бесконечно удалённых точек, т.е. что число точек пересечения не превосходит mn. Это утверждение содержится и в рукописи Ньютона, относящейся к 1667 году, но Ньютон никогда его не публиковал. Эйлер ввёл в формулировку бесконечно удалённые и мнимые точки. Он и Крамер независимо доказали, что две кривые степени m и n пересекаются не более чем в mn точках, но утверждение для нескольких уравнений впервые доказал именно Безу. Разработанные ранее методы решения систем нескольких уравнений основывались на последовательном решении пар уравнений. Это и усложняло вычисления, и давало разные результаты в зависимости от последовательности (к искомому решению добавлялись разные множители). Безу разработал способ позволяющий получать решение сразу, но и при этом способе при исключении неизвестных полученное уравнение может отличаться от искомого некоторым дополнительным множителем.

В 1779 году Безу издал книгу «Общая теория алгебраических уравнений», в которой собрал несколько своих статей, посвящённых решению систем алгебраических уравнений. В этой книге доказана теорема Безу для полных уравнений, т.е. для уравнений, в которых присутствуют мономы всех степеней, не превосходящих степени уравнения. Основная часть книги посвящена исследованию ситуации в случае неполных уравнений, когда отсутвуют некоторые мономы.

6.30. Джиан Франческо Малфатти (1731-1807)

В 1802 году Малфатти первым решил следующую задачу: вписать в треугольник три круга так, чтобы они попарно касались и каждый из них касался двух сторон треугольника (рис. 6.5). Решение Малфатти было аналитическим; в 1826 году Штейнер предложил синтетическое решение.

Малфатти предположил, что эти круги (*круги Малфатти*) имеют максимальную площадь среди троек непересекающихся кругов, расположенных внутри треугольника. В 1930 году выяснилось, что эта гипотеза неверна для некоторых треугольников, а в 1967 году выяснилось, что она неверна для всех треугольников.

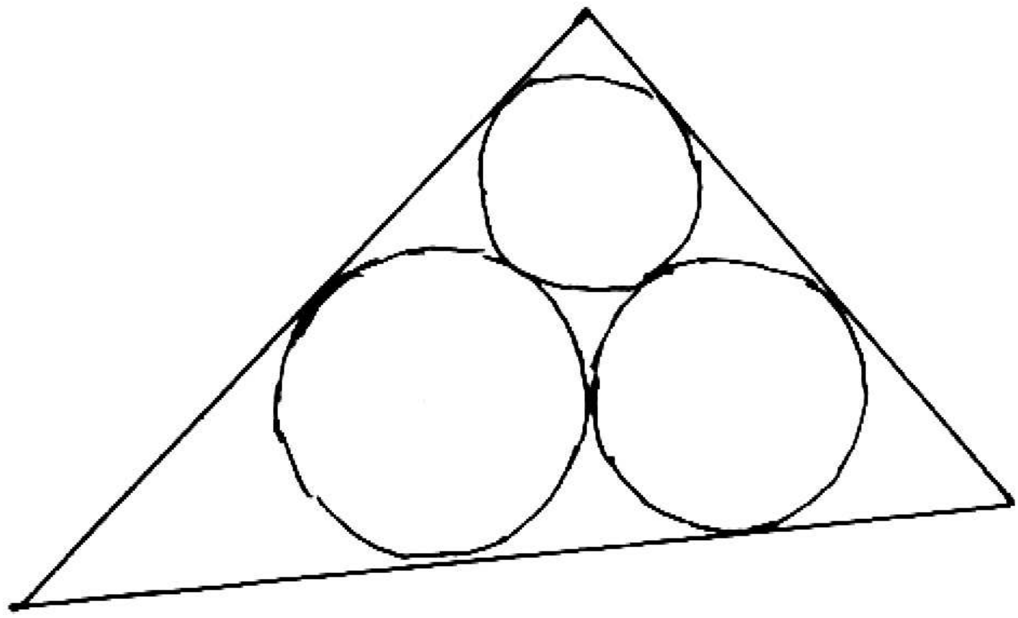

Рис. 6.5.

6.31. Александр-Теофиль Вандермонд (1735-1796)

Математикой Вандермонд начал заниматься в 35 лет (до этого он играл на скрипке), причём все его результаты были получены в течение трёх лет.

В 1771 году Вандермонд рассмотрел определитель порядка 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}.$$

Такого вида определитель порядка n встречается довольно часто; он получил название *определитель Вандермонда*, хотя общий случай рассмотрел лишь Коши (1815).

В «Мемуаре об исключении» (1772) Вандермонд разработал основы теории определителей, которые до него использовались только для решения систем линейных уравнений. Он ввёл двойную индексацию элементов определителя (по сторокам и по столбцам), сформулировал теорему о перемене знака определителя при перестановке двух строк или столбцов и вывел из неё, что определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю.

В 1770 году Вандермонд представил в Парижскую академию наук «Мемуар о решении уравнений», который был опубликован лишь в 1774 году, уже позже «Размышлений об алгебраическом решении уравнений» Лагранжа, в которых та же тема была разработана несколько более подробно. Важным отличием от работы Лагранжа было исследование многочленов деления круга x^n-1. Вандермон показал, как с помощью резольвент Лагранжа (которые он ввёл независимо от Лагранжа) можно решить в радикалах степени меньше 11 уравнение $\frac{x^{11}-1}{x-1}=0$, т.е. $x^{10}+x^9+\dots+x+1=0$. Это был первый нетривиальный случай. Для уравнений меньшей степени можно было воспользоваться подстановкой $y=x+x^{-1}$; решение уравнения $x^6+x^5+\dots+x+1=0$ (т.е. построение правильного 7-угольника) эта подстановка сводит к решению уравнения третьей степени, а решение уравнения $x^8+x^7+\dots+x+1=0$ (построение правильного 9-угольника) — к решению уравнения четвёртой степени. Но в случае правильного 11-угольника такая подстановка приводит к уравнению степени 5.

Пусть $x_0, \dots, x_1$ — корни многочлена $x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$, α_n — корень степени n из единицы. *Резольвентами Лагранжа* называются выражения

$$r(x_0,\alpha_n)=x_0+\alpha_nx_1+\dots+\alpha_n^{n-1}x_{n-1}.$$

Вандермонд упорядочил корни уравнения $x^{10}+x^9+\dots+x+1=0$ (они являются корнями степени 11 из единицы) так, чтобы каждый следующий корень был квадратом предыдущего: $x_0=\alpha_{11}$, $x_1=\alpha_{11}^2$, $x_2=\alpha_{11}^8$,

$x_3 = \alpha_{11}^{16} = \alpha_{11}^5$, ..., $x_9 = \alpha_{11}^6$, и рассмотрел резольвенту Лагранжа, соответствующую такому упорядочению корней:

$$r(\alpha_{11}, \alpha_{10}) = \alpha_{11} + \alpha_{10}\alpha_{11}^2 + \alpha_{10}^2\alpha_{11}^4 + \alpha_{10}^3\alpha_{11}^8 + \alpha_{10}^4\alpha_{11}^5 + \cdots + \alpha_{10}^9\alpha_{11}^6.$$

После некоторых вычислений с резольвентами $r(\alpha_{11}, \alpha_{10})$, $r(\alpha_{11}^2, \alpha_{10})$, ..., $r(\alpha_{11}^{10}, \alpha_{10})$ Вандермонд выразил α_{11} через радикалы степени меньше 11.

Впоследствии Гаусс получил более глубокие результаты о многочленах деления круга.

6.32. Эдвард Варинг (1736-1798)

Опубликованная в 1762 году книга Варинга «Алгебраические размышления» внесла большой вклад в теорию симметрических функций. Варинг выразил явно суммы n-х степеней корней многочлена через его коэффициенты и наоборот (*формулы Варинга*). Ранее Жирар (1629) получил такие выражения при $n \leq 4$. Кроме того, Варинг получил способ выражения любой рациональной симметрической функции через суммы степеней и через элементарные симметрические функции. Он также использовал симметрические функции для нахождения многочленов, корни которых определённым образом выражаются через корни данного многочлена.

В 1770 году Варинг высказал утверждение, что любое натуральное число является суммой не более чем 9 кубов, суммой не более чем 19 четвёртых степеней и т.д. (имеется в виду, что для каждого натурального n существует такое наименьшее $k = k(n)$, что любое натуральное число является суммой n-х степеней в количестве не более k). Доказательство эгого утверждения, получившего название *проблема Варинга* он не привёл.

В 1779 году Варинг опубликовал интерполяционную формулу. Много лет спустя (в 1795 году) эту же формулу опубликовал Лагранж, и теперь она называется *интерполяционной формулой Лагранжа*.

6.33. Эрланд Самуэль Бринг (1736-1798)

В 1786 году шведский любитель математики Бринг (профессор истории) показал, что с помощью преобразования Чирнгауза общее уравнение пятой степени можно привести к трёхчленному виду $x^5 + px + q = 0$, решая при этом только уравнения степени 2 и 3. Непосредственное применение преобразования Чирнгауза в данной ситуации требовало решения уравнения степени 6, но Бринг заметил, что решение этого уравнения сводится к решению уравнений степени 2 и 3.

Сначала открытие Бринга не вызвало интереса, и в 1834 году его повторил английский математик Джеррард. Но после того как математики занялись решением уравнений 5-й степени с помощью трансцендентных функций, выяснилось, что *уравнение пятой степени в форме Бринга* чрезвычайно удобно для этих целей. Именно эту форму использовал Эрмит, в 1858 году получивший решение уравнения пятой степени в эллиптических модулярных функциях.

6.34. Жозеф Луи Лагранж (1736-1813)

Джузеппе Лодовико Лагранжиа, дед отца которого приехал в Турин из Франции, родился в Турине и жил там до переезда в Берлин в 1766 году, где он сменил Эйлера на посту директора математического класса. В 1772 году он был избран иностранным членом Парижской академии наук. В 1787 году Лагранж переехал в Париж. Лагранж с сожалением сказал как-то, что Ньютон — счастливый человек, потому что вселенная только одна, и Ньютон уже открыл её математические законы.

В 1759 году Лагранж получил решение линейного неоднородного разностного уравнения

$$\Delta y + M(x)y = N(x)$$

по аналогии с решением дифференциального уравнения. В 1775 году он исследовал разностное уравнение порядка n (в 1766 году другим способом это уже сделал Лаплас).

В 1759 году указал на ошибку Эйлера, который считал, что если $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, то условия $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$ достаточны для существования локального максимума. В «Теории аналитических функций» (1799) Лагранж показал, что достаточное условие существования локального экстремума такое:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0.$$

При развитии методов вариационного исчисления Эйлер пришёл к необходимости доказать соотношение $f_y' dy' + y' df_{y'} = 0$. Лагранж доказал это соотношение, применив интегрирования по частям, и оно послужило исходным пунктом в его исследованиях по вариационному исчислению. Лагранж изложил свой метод в письме к Эйлеру в 1755 году. Первая работа Лагранжа по вариационному исчислению опубликована в 1762 году. Для решения задачи об экстремуме интеграла Лагранж предлагает по аналогии с теорией экстремума в дифференциальном исчислении найти производную рассматриваемого выражения и приравнять её нулю. Важный шаг состоял в том, что для различия варьирования от дифференцирования он ввёл новый символ δ. Лагранж более просто вывел уравнение Эйлера и получил его обобщение. До Лагранжа удавалось решать только задачи с закреплёнными концами, а он получил соотношение для концов кривой, что дало возможность решать задачи с подвижными концами.

В 1760 году (опубликовано в 1762 году) методом вариационного исчисления получил уравнение в частных производных для минимальных поверхностей.

В серии работ, начиная с 1766 года, Лагранж продолжил исследования Эйлера о решении неопределённых уравнений второй степени. Как и Эйлер, он показал, что решение таких уравнений сводится к решению уравнения $x^2 - ay^2 = b$. Лагранж в 1768 году (опубликовано в 1773 году) первым доказал (используя цепные дроби), что уравнение Ферма–Пелля $x^2 - ay^2 = 1$ всегда имеет решение в натуральных числах (здесь a — натуральное число, не являющееся полным квадратом). При исследовании уравнения $x^2 - ay^2 = b$ он обнаружил, что хотя делитель числа $x^2 - ay^2$ не всегда можно записать в таком же виде, его всегда можно записать в виде $bx^2 \pm 2cxy \pm dy^2$, где $\pm bd - c^2 = a^2$. Гаусс впоследствии назвал выражение $\pm bd - c^2 = a^2$ *дискрминантом* квадратичной формы $bx^2 \pm 2cxy \pm dy^2$. Лагранж ввёл понятие эквивалентности квадратичных форм (в частности, число представляется квадратичной формой тогда и только тогда, когда оно представляется эквивалентной ей формой) и доказал, что число классов эквивалентости форм с одним и тем же дискриминантом конечно.

В 1748 году Эйлер доказал, что любая периодическая непрерывная дробь (с числителями, равными 1) есть корень квадратного уравнения с целыми коэффициентами. В 1768 году Лагранж доказал, что верно и обратное: любая квадратичная иррациональность выражается непрерывной дробью такого вида. В 1767 году Лагранж ввёл в рассмотрение непрерывные дроби со знакопеременными знаменателями.

В 1768 году Лагранж доказал, что сравнение степени n по модулю простого числа p имеет не более n решений, не сравнимых по модулю p. (При этом он не вводил отношение сравнения.)

В 1769 году Лагранж доказал теорему о сложении эллиптических интегралов прямым методом; несколько ранее её доказал Эйлер, но его подход не был прямым и основывался на различных догадках.

В 1770 году (опубликовано в 1772 году) Лагранж доказал, что любое натуральное число представляется в виде суммы четырёх квадратов целых чисел. В 1771 году доказал *теорему Вильсона*: число n простое тогда и только тогда, когда $(n-1)! + 1$ делится на n.

В «Размышлениях об алгебраическом решении уравнений» (1770) Лагранж проанализировал способы решения кубических уравнений и уравнений четвёртой степени, чтобы понять, как работают эти методы, и могут ли они дать ключ к решению уравнений более высокой степени. Лагранж выяснил, что все существовавшие методы решения уравнений в радикалах сводятся к нахождению рациональных функций корней $x_1, \ldots, x_n$, которые принимают при всех перестановках корней $k < n$ различных значений. Он показал, что если функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ при всех перестановках корней принимает ровно k значений, то она удовлетворяет уравнению степени k, коэффициенты которого являются симметрическими функциями от корней исходного многочлена, а потому рационально выражаются через его коэффициенты. Например, пусть, x_1, x_2 и x_3 — корни многочлена $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Составим выражение $t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3$, где $\alpha^3 = 1$ и $\alpha \neq 1$. Легко проверить, что при всех перестановках корней функция $\theta = t^3$ принимает только два значения, поэтому она является корнем квадратного уравнения, коэффициенты которого рационально выражаются через a, b и c. Это даёт решение кубического уравнения. Для уравнения степени n можно составить аналогичное выражение $t = x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha^n x_n$, где α — примитивный корень степени n из единицы. Такое выражение получило название *резольвента Лагранжа*. Исследования Лагранжа показали, что вопрос о решении уравнения в радикалах сводится к изучению группы перестановок корней этого уравнения и её подгрупп. Лагранж показал, что количество различных значений, которые функция от n переменных принимает при перестановках этих переменных, является делителем числа $n!$; на языке групп перестановок эту теорему формулируют так: порядок подгруппы перестановок корней является делителем порядка группы перестановок (*теорема Лагранжа*).

В 1772 году Лагранж обобщил ряд Тейлора на функции многих переменных.

В 1773 году Лагранж получил решение уравнений движения твёрдого тела, подверженного силе тяжести, в случае, когда тело имеет ось вращения и точка опоры лежит на оси вращения. (В уравнениях движения твёрдого тела участвуют только моменты инерции тела, поэтому условие Лагранжа заключается не в том, что тело имеет ось вращения, а лишь в том, что два момента инерции тела равны.)

Работа, написанная в 1773 году, посвящена аналитической геометрии тетраэдра. Лагранж вычисляет длины рёбер, площади граней, высоты и объём тетраэдра, координаты вершин которого заданы. Затем он находит радиус описанной сферы и радиус вписанной сферы. При вычислении площади грани Лагранж воспользовался формулой

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 = (y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (z_1x_2 - x_1z_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2,$$

получившей название *формула Лагранжа*.

В 1773 году решил дифференциальное уравнение в частных производных

$$P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z).$$

Независимо от него это уравнение чуть раньше решил Лаплас (1774). На протяжении 70–90-х годов Лагранж занимался исследованием и нелинейных уравнений первого порядка общего вида $f(x,y,z,p,q)=0$, где $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$. В 1775 году он предложил метод вариации постоянных для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. Свои результаты в области дифференциальных уравнений в частных производных Лагранж изложил в книге «Лекции об исчислении функций».

В предисловии к «Аналитической механике» (1788) Лагранж писал, что в его сочинении совершенно отсутствуют какие бы то ни было чертежи, потому что излагаемые им методы требуют только алгебраических операций. Лагранж намеревался сделать механику разделом анализа. Это была первая книга по механике, в которой интенсивно применялось вариационное исчисление.

В 1795 году в «Элементарных лекциях по математике» опубликовал интерполяционную формулу, которая теперь носит его имя (*интерполяционная формула Лагранжа*), хотя задолго до этого она уже была опубликована Варингом (1779).

Лагранж пытался построить анализ, не опираясь на понятие предела. В «Теории аналитических функций» (1797) он попытался построить анализ на основе разложения функции в ряд Тейлора и алгебраических операций с этим рядом. Для такого подхода он использовал термин *алгебраический анализ*, который после этого надолго стал весьма популярным. Основной объект книги — аналитические функции; Лагранж так называет функции, задаваемые единым аналитическим выражением посредством переменных, констант, а также алгебраических и трансцендентных операций.

В этой книге Лагранж впервые поставил вопрос об оценке точности приближения функции суммой конечного числа членов ряда Тейлора и вывел формулу Тейлора с остаточным членом:

$$f(z+x)=f(z)+xf'(z)+\frac{x^2}{2!}f''(z)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(z)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(z+u),$$

где $0<u<x$. Как частный случай, он получил теорему о конечном приращении, которую записал в следующем виде: $f(z+x)=f(x)+xf'(z+u)$, где $0\le u\le x$. Остаточный член Лагранж рассматривал только как средство оценки приближения: он не сомневался в том, что ряд Тейлора функции к ней, как правило, сходится.

В той же книге Лагранж рассмотрел задачу об условном экстремуме, когда аргументы функции связаны какими-либо дополнительными соотношениями, и применил к её решению метод неопределённых множителей (*метод множителей Лагранжа*).

Лагранж систематически изучил особые решения дифференциальных уравнений и их связь с общими решениями. Он разработал метод нахождения особого решения по общим решениям посредством исключения констант. Если общее решение имеет вид $V(x,y,\alpha)=0$, то метод Лагранжа состоит в том, чтобы вычислить $\frac{dy}{d\alpha}$, положить $\frac{dy}{d\alpha}=0$ и избавиться от α в полученной системе из двух уравнений. То же самое можно сделать, положив $\frac{dx}{d\alpha}=0$.

6.35. Андрей Иванович Лексель (1740-1784)

Андерс Лексель родился в Швеции. В 1768 году он получил приглашение в Санкт-Петербург, где его стали называть Андреем Ивановичем.

В 1774 году Лексель обобщил тригонометрию на произвольные многоугольники, выведя соотношения между углами и сторонами многоугольников. Эти исследования вскоре продолжил Люилье.

В 1781 году Лексель доказал, что геометрическим местом вершин сферических треугольников с общим основанием и фиксированной площадью являются дуги двух малых окружностей.

В 1782 году Лексель доказал аналог теоремы Птолемея для сферического четырёхугольника, вписанного в малую окружность: произведение синусов половин диагоналей равно сумме произведений синусов половин противоположных строн. Он получил формулы для радиуса вписанной и описанной окружностей сферического треугольника. Он также получил формулу, выражающую площадь вписанного сферического четырёхугольника через его стороны. Эта формула является аналогом формулы Брахмагупты.

Лексель произвёл расчёт орбиты небесного тела, обнаруженного в 1781 году Гершелем, и показал, что это тело — планета, а не комета, как думали сначала. Это была планета Уран. Расчёты Лекселя показали, что на движение Урана что-то оказывает дополнительное влияние, и он решил, что это влияние обусловлено какой-то другой, ещё более удалённой от Солнца планетой.

6.36. Каспар Вессель (1745-1818)

Норвежский математик Каспар Вессель первым предложил полное геометрическое истолкование комплексных чисел и основных действий над ними. В 1797 году он выступил в Датской Королевской Академии с изложением своих идей, а его статья на эту тему опубликована в 1799 году. Его целью было создание удобного аппарата для решения геодезических задач. Вессель также первым систематически разработал векторное исчисление на плоскости.

Вессель первым определил сложение и умножение векторов, в том числе и в трёхмерном пространстве. Он попытался обобщить комплексные числа так, чтобы аналитически представить векторы в трёхмерном пространстве. Он заметил связь произведения таких векторов с вращениями пространства, но построить обобщение комплексных чисел ему не удалось.

Работа Весселя, написанная по-датски, оставалась почти неизвестной математикам до того, как в 100 лет спустя был опубликован её перевод на французский язык. Более влиятельной оказалась работа Аргана, повторившего в 1806 году то, что сделал Вессель.

6.37. Гаспар Монж (1746-1816)

В 1777 году Монж написал рабботу о развёртывающихся поверхностях (опубликована в 1785 году), в которой координаты в трёхмерном пространстве описываются уже так, как сейчас. В этой работе он решил несколько задач, простых, но важных для систематического изложения аналитической геометрии в пространстве. Например, он вывел уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой; при этом уравнение плоскости записывается в современном виде. Кроме того, он нашёл длину перпендикуляра, проведённого из данной точки к данной прямой.

В 1785 году Монж независимо от Эйлера ввёл понятие развёртывающейся поверхности.

Монж является творцом начертательной геометрии. В 1795 году он прочитал в основанной им Нормальной школе курс лекций об ортогональном проектировании на две плоскости, стенографическая запись которого была опубликована в том же году. В 1799 году эти лекции были опубликованы в виде книги под названием «Начертательная геометрия». Монж решил все основные задачи на точки, прямые и плоскости, и даже систематически применил этот метод к пространственным кривым и поверхностям. Цель Монжа — изобразить некоторым способом положение точки в пространстве, а затем таким же способом изобразить прямые и кривые в пространстве. Для этого он рассматривает проекции на две взаимно перпендикулярные плоскости. Монж разрабатывает также способы нахождения длины отрезка, заданного двумя проекциями. Благодаря лекциям Монжа проекции и геометрические преобразования начали играть важную роль в геометрии.

Разрабатывая в этой книге способы построения касательных плоскостей, Монж попутно доказал, что пары внешних касательных к трём окружностям (лежащим в одной плоскости) пересекаются в трёх точках, лежащих на одной прямой (*теорема Монжа*). Для доказательства Монж рассматривает шары, экваторами которых служат данные окружности, и проводит плоскость, касающуюся этих шаров внешним образом. Эта плоскость касается трёх конических поверхностей, касающихся пар шаров.

Монж разработал основы геометрической теории уравнений в частных производных. Этой теории посвящены «Мемуар об интегральном исчислении уравнений в частных дифференциалах» (1784) и две книги «Листы анализа, приложенного к геометрии» (1795) и «Приложения алгебры к геометрии» (1805), которые впоследствии вошли в книгу «Приложение анализа к геометрии» (1807). В работах, законченных к 1784 году, Монж выводил дифференциальные уравнения семейств поверхностей, а затем обратными рассуждениями получал интегралы дифференциальных уравнений. В них же Монж разработал метод характеристик и, опираясь на геометрические соображения, показал, что интегрирование уравнений в частных производных первого порядка сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для дифференциального уравнения первого порядка $F(x, y, z, p, q) = 0$, где $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, полный интеграл (т.е. семейство решений этого уравнения) $f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ представляет собой двухпараметрическое семейство поверхностей. Например, для уравнения $z^2(p^2 + q^2 + 1) = a^2$, т.е.

$$z^2\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right) = a,$$

полный интеграл имеет вид $(x - \alpha)^2 + (y - \beta^2) + z^2 = a^2$. Действительно, дифференцируя последнее уравнение по x, находим $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\alpha - x}{z}$. Аналогично $q = \frac{\alpha - y}{z}$. Следовательно, $z^2(p^2 + q^2 + 1) = a^2$.

Поверхности, для которых $\beta = \varphi(\alpha)$, где φ — произвольная функция, Монж назвал огибаемыми. Уравнение огибающей поверхности получается исключением параметра α из уравнений $f(x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$. Кривые, по которым пересекаются две бесконечно близкие поверхности семейства, т.е. кривые, вдоль которых огибаемые касаются огибающей, Монж назвал *характеристиками*. Они лучше всего характеризуют огибающую интегральную поверхность, являясь её образующими. Огибающую семейства характеристик Монж назвал ребром возврата огибающей поверхности. Для нахождения уравнений характеристик Монж получил систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Монж исследовал уравнения поверхностей с различными свойствами радиусов кривизн. В частности, он получил уравнение поверхности, радиусы кривизны которой равны и противоположны по знаку. Он обратил внимание, что это уравнение совпадает с уравнением минимальной поверхности, которое получил ранее Лагранж методом вариационного исчисления. Поэтому поверхность такого вида обладает следующим свойством: если на данной поверхности взять любой контур, то из всех поверхностей, проходящих через этот контур, именно данная поверхность имеет минимальную площадь.

6.38. Шарль Тенсо (1749-1822)

Ученик Монжа Тенсо доказал, что углы α, β, γ наклона плоскости к координатым плоскостям связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Он доказал также пространственное обобщение теоремы Пифагора: квадрат площади плоской фигуры равен сумме квадратов площадей её ортогональных проекций на три взаимно перпендикулярные плоскости. (В случае, когда фигура — треугольное сечение этих взаимно перпендикулярных плоскостей, такая теорема встречается в записках Декарта, относящихся к 1619-1621 годам.)

6.39. Пьер Симон Лаплас (1749-1827)

Наполеон в 1799 году назначил Лапласа министром внутренних дел, но этот пост он занимал недолго, так как, по мнению Наполеона, внёс в управление дух бесконечно малых (т.е. мелочность).

Для Лапласа математика была лишь средством решения задач из физики. В своих работах математические рассуждения он обычно пропускал, говоря лишь «легко видеть, что ...».

Лаплас очень много занимался теорией вероятностей. Основные его работы на это тему относятся к 1744-1786 годам. В мемуаре 1774 года повторил и развил результаты Байеса (по-видимому, не зная их). Лаплас исследовал задачу о вероятности того, что сумма независимых случайных величин с заданным законом распределения находится в заданных пределах. В 1773-1774 годы ввёл уравнения в конечных разностях с двумя переменными и применил их к решению задач теории вероятностей. В 1779 году разрабатывал теорию производящих функций.

В 1766 году исследовал разностное уравнение порядка n.

В статье 1772 года получил теорему о выражении определителя в виде суммы произведений миноров на их алгебраические дополнения (*теорема Лапласа*).

Лаплас рассматривал *вековое уравнение*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = 0$$

для симметрической матрицы ($a_{ij} = a_{ji}$). Такое название связано с тем, что это уравнение возникло при изучении вековых неавенств в движении планет.

В 1773 году решил дифференциальное уравнение в частных производных

$$P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y)\partial z\partial y = R(x,y,z).$$

Независимо от него это уравнение чуть позже решил Лагранж (1774).

Лаплас предложил названия *определённый интеграл* (1779) и *пределы интегрирования* (1783).

В цикле работ, начавшемся в 1782 году и завершившемся «Аналитической теории вероятностей» (1812), Лаплас разработал метод решения линейных разностных и диффернциальных уравнений, основанный на замене неизвестной функции $y(s)$ интегралами вида $\int \varphi(x)x^s dx$ или $\int \varphi(x)e^{-sx}dx$, где $\varphi(x)$ — новая неизвестная функция. Это — знаменитое *преобразование Лапласа*. Применение этого преобразования основано на том, что задача сначала решается для образа функций при преобразовании Лапласа, а затем применяется обратное преобразование.

В двухтомном сочинении «Изложение системы мира» (1796) Лаплас без формул и чертежей описал результаты своих исследований, которые потом он подробно изложил в пятитомной «Небесной механике» (1799-1825). Излагая картину мира, Лаплас ни разу не упоминает о Боге. Говорят, что на замечание Наполеона по этому поводу, Лаплас ответил: «Государь, я не нуждался в этой гипотезе.» Лаплас дал глубокий анализ всех известных движений тел Солнечной системы на основе закона всемирного тяготения и доказал её устойчивость. Это опровергало мнение (его разделял и Ньютон), что для поддержания устойчивого состояния Солнечной системы требуется вмешательство посторонних сверхъестественных сил. Лаплас часто пропускал сложные математические рассуждения, заменяя их словами «Очевидно, что ...». Во втором томе (1799) исследуется форма Земли и других планет. Там впервые появился термин *геодезическая линия* применительно к земной поверхности, чем и объясняется такое название. В этой же книге появилось *уравнение Лапласа*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

которому удовлетворяет потенциал вне притягивающего тела. Там же впервые появились многочлены Лежандра (их часто называли *коэффициентами Лапласа*).

После доклада Коши, посвящённого сходимости рядов, Лаплас поспешил домой и тщательно проверил сходимость всех рядов, встречающихся в его «Небесной механике». К счастью, все они оказались сходящимися.

В 1812 году он издал «Аналитическую теорию вероятностей» в двух книгах, подытожив в ней свои предыдущие результаты и результаты своих предшественников. В первой книге изучаются производящие функции и различные аппроксимации выражений, встречающихся в теории вероятностей. Во второй книге приведено определение вероятности как отношения количества благоприятных случаев к общему количеству равновозможных случаев. Там же содержится правило Байеса, определение математического ожидания, предельные теоремы Муавра–Лапласа о сходимости биномиального распределения к нормальному. Лаплас впервые ввёл в теорию вероятностей уравнения в частных производных.

В предисловии ко второму изданию «Аналитической теории вероятностей» (1814) Лаплас писал, что будущее мира полностью определяется настоящим и, обладая математическими познаниями о состоянии мира в данный момент, можно предсказать будущее.

В 1814 году Лаплас издал «Опыт философии теории вероятностей».

Лаплас распространил понятие особого решения дифференциального уравнения на уравнения высшего порядка и на уравнения от трёх переменных.

6.40. Лоренцо Маскерони (1750-1800)

В 1790 году представил изученный Эйлером интегральный логарифм бесконечным рядом

$$\int_0^x \frac{dz}{\ln z} = \gamma + \ln(-\ln x) + \frac{\ln x}{1} + \frac{(\ln x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \dots$$

и показал, что постоянная γ, входящая в это разложение, — это постоянная Эйлера. Для γ Маскерони получил также выражение $\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k}$ и показал, как эта постоянная возникает в разложениях в ряд интегралов типа $\int \frac{e^x\,dx}{x}$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int \frac{dx}{\ln(\ln x)}$. В связи с этим γ иногда называют *постоянной Эйлера–Маскерони*.

Ввёл в рассмотрение *интегральный синус* $\int_0^x \frac{\sin z\,dz}{z}$ и *интегральный косинус* $\int_x^\infty \frac{\cos z\,dz}{z}$.

В книге «Геометрия циркуля» (1797) разработал общую теорию построений одним циркулем, повторив забытую работу датского математика Георга Мора. Маскерони доказал, что все задачи на построение, решаемые с помощью циркуля и линейки, можно решить с помошью одного циркуля. В книге «Задачи для землемеров» (1793) решил многие задачи на построение с помощью одной линейки.

6.41. Симон Антуан Жан Люилье (1750-1840)

В 1786 году в книге «Элементарное изложение начал высших исчислений Люилье ввёл обозначение предела lim. Эта книга получила премию на конкурсе Берлинской академии. В ней вводятся стандартные ныне понятия производной и предела. Впервые символ $\frac{df}{dx}$ рассматривается не как дробь, а как единое целое.

В 1789 году Люилье существенно дополнил результаты Лекселя, относящиеся к обобщению тригонометрии на произвольные многоугольники. Он распространил эти результаты на пространственные многоугольники.

В 1799 году Люилье доказал (в терминах площадей граней и углов между плоскостями граней) утверждение, равносильное тому, что сумма векторов внешних нормалей к граням многогранника, равных по модулю площадям граней, равна нулю.

В 1809 году в книге «Начала геометрического и алгебраического анализа» Люилье впервые привёл уравнение прямой в виде $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.

В 1811 году Люилье обратил внимание на то, что теорема Эйлера о многогранниках не всегда верна. Он указал три типа многогранников, для которых она неверна:

- многогранники, у которых есть неодносвязные грани (т.е., например, грани в виде кольца, рис. 6.6);

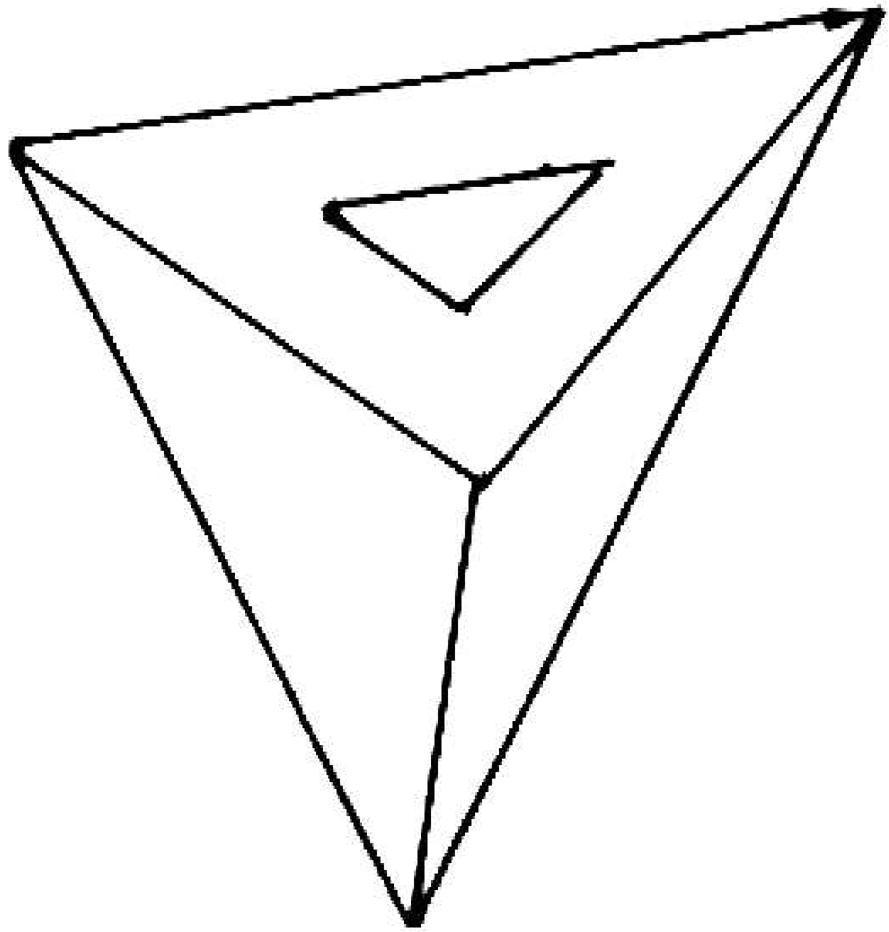

Рис. 6.6.

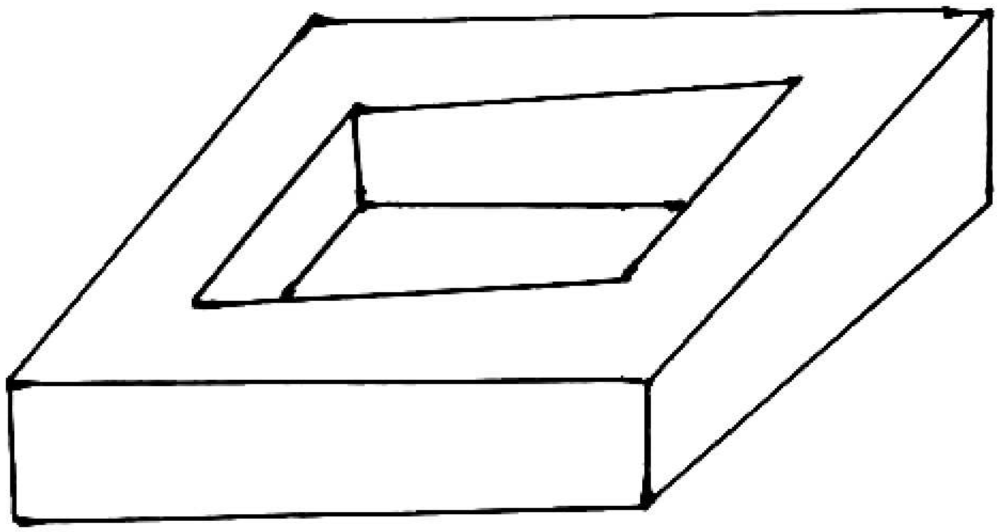

Рис. 6.7.

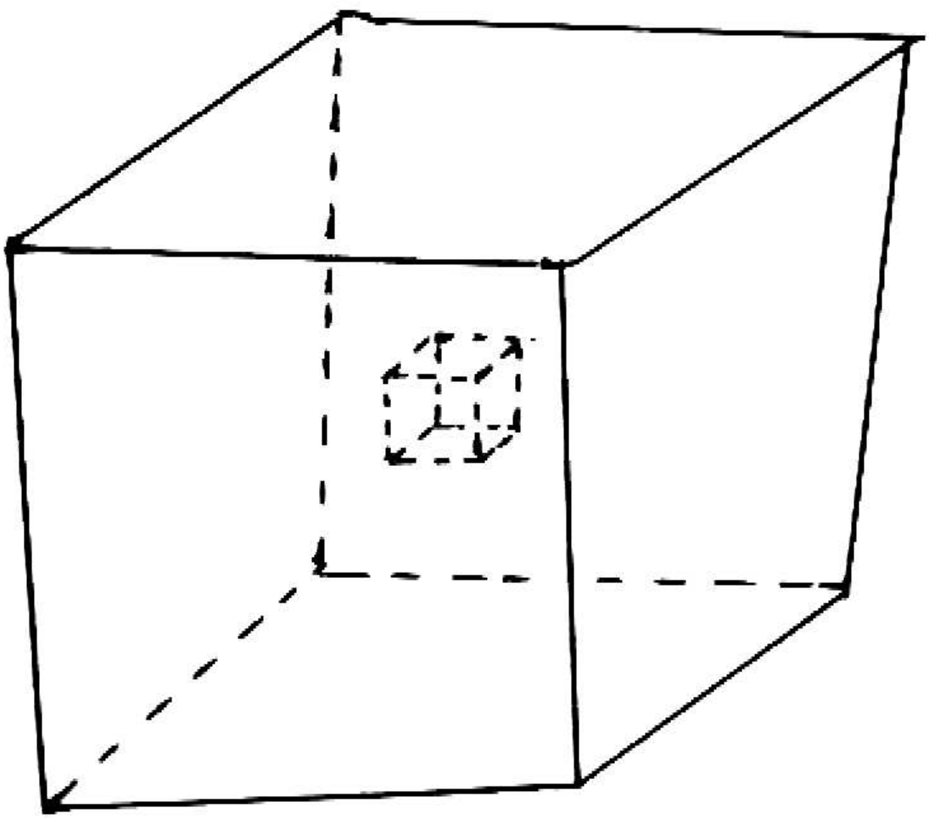

Рис. 6.8.

- многогранники с тоннелями, т.е. имеющие форму не сферы, а, например, тора (рис. 6.7);
- многогранники, внутри которых есть другие многогранники (рис. 6.8).

Люилье установил, что если многогранник имеет C кольцевых граней, T тоннелей и содержит внутри P многогранников, то $V-E+F=2-2T+P+2C$, где V, E, F — число вершин, рёбер, граней.

Люилье получил формулу, выражающую площадь сферического треугольника через его стороны. Эта формула является аналогом формулы Герона. *Формула Люилье* является частным случаем формулы, выражающей площадь вписанного сферического четырёхугольника через его стороны, доказанной Лекселем.

6.42. Адриан-Мари Лежандр (1752-1833)

Многочлены Лежандра $P_{2n}(x)$ появились в статье, написанной в 1782 году и опубликованной в 1785 году; эта статья посвящена притяжению тел вращения. Многочлены $P_{2n+1}(x)$ появились в его статье 1790 года на ту же тему. В статье, написанной в 1784 году, Лежандр получил некоторые свойства этих многочленов, в частности, их ортогональность: $\int_0^1 P_{2n}(x)P_{2m}(x)dx=0$ при $n\neq m$. Формулу

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)}{dx^n}$$

получил Олинд Родриг в 1816 году.

В статье 1785 года по теории чисел сформулировал теорему о том, что любая арифметическая прогрессия, первый член которой взаимно прост с разностью, содержит бесконечно много простых чисел; эту теорему позже доказал Дирихле. В этой же статье он пытался доказать квадратичный закон взаимности, но в его доказательстве были пробелы, устранить которые он смог только в 1808 году, уже после того, как появилось доказательство Гаусса.

Лежандр много занимался изучением эллиптических интегралов, т.е. интегралов вида $\int R(x,y)dx$, где R — рациональная функция, а $y=\sqrt{G(x)}$, где G — многочлен степени 3 или 4. Основные результаты его исследований опубликованы в 1792 году. Прежде всего он показал, что любой эллиптический интеграл можно привести к так называемой *форме Лежандра*, т.е. можно считать, что $y=\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}$. Затем он показал, что любой эллиптический интеграл можно выразить через интегралы следующих трёх родов: $F=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ (эллиптический интеграл первого рода), $E=\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi$ (второго рода) и $H=\int\frac{d\varphi}{(1+c\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ (третьего рода). Для интегралов первого рода Лежандр получил теорему сложения: $F(\varphi)\pm F(\psi)=F(\mu)$, где $\cos\varphi\cos\psi\mp\sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\mu}=\cos\mu$ (для μ Лежандр получил и явное выражения). Лежандр получил теорему сложения и для интегралов второго рода. Кроме того, Лежандр рассмотрел различные преобразования эллиптических интегралов и, в частности, обобщил преобразование Ландена.

Лежандр занимался преобразованием математического образования во Франции. Он хотел возродить преподавание евклидовой геометрии, и в связи с этим ему пришлось заняться пятым потулатом. Он пытался доказывать его разными способами. Различные «доказательства» пятого постулата он включал в многочисленные издания своего учебника по геометрии, впервые вышедшего в 1794 году. Одно из доказательств было следующим. Рассмотрим треугольник ABC с угловым дефектом $\delta=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$. Отразим точку A относительно середины отрезка BC. Треугольник $A'BC$ имеет такие же углы, как и треугольник ABC, поэтому его угловой деффект также равен δ. Проведём через точку A' прямую, которая пересекает лучи AB и AC в точках B' и C'. (Ошибка Лежандра была в том, что в геометрии Лобачевского такую прямую не всегда можно провести.) Легко проверить, что угловой деффект треугольника, составленного из нескольких треугольников, равен сумме угловых деффектов этих треугольников. Поэтому угловой деффект треугольника $AB'C'$ больше 2δ. Продолжая такие же построения треугольников, получим, что угловой деффект может быть сколь угодно большим, но он не может быть больше π.

В другом доказательстве Лежандр исходил из предположения, что данный треугольник всегда можно преобразовать в треугольник с такой же суммой углов, но меньшей площади.

Лежандр занимался проблемой пятого постулата 20 лет. Он ввёл понятие углового дефекта треугольника и пытался использовать его для доказательства пятого постулата. Лежандр доказал, что если сумма углов какого-либо треугольника равна двум прямым, то это верно и для любого треугольника, и в этом случае верен пятый постулат.

В учебнике Лежандра по геометрии (1794) впервые была строго доказана теорема Эйлера о выпуклых многогранниках. Лежандр расположил многогранник так, чтобы он содержал центр сферы, и спроецировал его вершины и рёбра на сферу. Затем он записал выражение для площади каждого из полученных сферических многогранников: $(a_1+\dots+a_n-(n-2)\pi)$, где a_1, …, a_n — углы сферического n-угольника (предполагается, что радиус сферы равен 1). После этого он приравнял сумму площадей этих многогранников площади сферы: $\sum a_i-\sum(n_j-2)\pi=4\pi$. Ясно, что $\sum a_i=2V\pi$ и $\sum n_j=2E$, поэтому $2\pi(2V-2E+2F)=4\pi$, т.е. $V-E+F=2$.

В 1798 году опубликовал «Опыт теории чисел» — первое полное изложение результатов по теории чисел, полученных как его предшественниками, так и отчасти им самим. В этой книге приведена современная формулировка квадратичного закона взаимности, введён *символ Лежандра*. Во втором издании этой книги (1808) Лежандр исследовал функцию $\pi(x)$ (число простых чисел, не превосходящих x) и предложил следующую асимптотическую формулу:

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - 1,08366}.$$

Он пытался доказать эту формулу аналитическими методами.

Независимо от Гаусса Лежандр разработал метод наименьших квадратов, и именно ему принадлежит первая публикация этого метода (1806), но Гаусс, опубликовавший его в 1809 году, применял этот метод раньше Лежандра.

Лежандр издал свои исследования эллиптических интегралов в трёх томах «Упражнений по интегральному исчислению» (1811, 1817 и 1819). Второе издание этой книги вышло также в трёх томах под названием «Трактат об эллиптических функциях» (1825, 1826 и 1830). Терминология в то время ещё не установилась, и под эллиптическими функциями Лежандр подразумевал эллиптические интегралы. Лежандр исследует дуги кривых, выражающихся эллиптическими интегралами (эллипса, лемнискаты и гиперболы) и доказывает для этих дуг различные теоремы сложения. Лежандр излагает своё решение задачи о геодезических на эллипсоиде вращения, полученное им в 1806 году (для произвольного эллипсоида эту задачу решил Якоби). Ко времени публикации второго издания Якоби и Абель уже более глубоко проникли в теорию элиптических интегралов и особенно эллиптических функций, чем Лежандр, посвятивший 40 лет изучению элиптических интегралов. Их заслуги Лежандр отметил в предисловии к третьему тому.

В 1823 году Лежандр доказал, что уравнение $x^5 + y^5 = z^5$ не имеет решений в натуральных числах.

Лежандр сформулировал понятие трансцендентного числа.

6.43. Лазар Карно (1753-1823)

Карно возродил классические результаты Паппа о двойном отношении и о гармонических четвёрках точек, впервые дополнив их введением знака (у Паппа двойное отношение не имело знака). Он доказал инвариантность этого отношения для четвёрок точек, полученных при сечениях четырёх прямых пучка различными секущими, и использовал это для доказательства гармонических свойств полного четырёхсторонника.

В геометрии известны следующие теоремы, доказанные Карно.

- Алгебраическая сумма расстояний от центра описанной окружности треугольника до сторон равна $R + r$ (сумме радиусов описанной и вписанной окружностей).

- Перпендикуляры, проведённые из точек A_1, B_1 и C_1 к сторонам BC, CA и AB треугольника ABC, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $A_1B^2 + B_1C^2 + C_1A^2 = A_1C^2 + C_1B^2 + B_1A^2$.

- Пусть кривая степени n пересекает каждую из сторон треугольника ABC в n точках, и пусть A_1 (B_1 и C_1) — произведения расстояний от точки A (B и C) до точек пересечения кривой со стороной AB (BC и CA), A_2 (B_2 и C_2) — произведения расстояний от точки A (B и C) до точек пересечения кривой со стороной CA (AB и BC). Тогда $A_1B_1C_1 = A_2B_2C_2$.

6.44. Жан Батист Менье (1754-1793)

Менье был учеником Монжа. В работе о кривизне поверхностей (1776 год, опубликована в 1785 году) он доказал, что радиус кривизны сечения, проходящего через касательную к поверхности, равен $R\sin\varphi$, где R — радиус нормального сечения, а φ — угол между данным сечением и нормальным сечением. В этой же работе он рассмотрел задачу об отыскании среди всех поверхностей, проходящих через данный контур, поверхности наименьшей площади. Сейчас такие поверхности называют *минимальными*. Для минимальных поверхностей Менье получил условие, что сумма главных кривизн равна нулю, и вывел из него геометрически дифференциальное уравнение в частных производных, которое ранее (в 1760 году) Лагранж получил методом вариационого исчисления. Интегрируя это уравнение, в качестве примера минимальных поверхностей Менье получил геликоид (винтовую поверхность) и катеноид.

Менье решил задачу о нахождении всех поверхностей, для которых в каждой точке радиус r наибольшего нормального сечения равен радиусу ρ наименьшего нормального сечения. Решая соответствующее дифференциальное уравнение, доказал, что любая такая поверхность сферическая.

6.45. Марк-Антуан Парсеваль (1755-1836)

Первоначальная версия *теоремы Парсеваля* с неполным доказательством появилась в «Мемуаре о рядах и о полном интегрировании уравнения второго порядка с частными производными» (1799); улучшенная версия появилась в 1801 году. Эта теорема утверждает, что если подстановка $x = \cos u + i \sin u$ в ряды $M = \sum a_n x^n$ и $m = \sum b_n x^n$ даёт $M = p + iq$ и $m = r + is$, то

$$2a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 + \cdots = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} pr\, du.$$

6.46. Паоло Руффини (1765-1822)

Руффини, опираясь на разработанный Лагранжем метод, пытался доказать, что общее уравнение степени выше 5 нельзя решить в радикалах. В 1799 году он опубликовал книгу «Общая теория уравнений, в которой доказывается невозможность алгебраического решения общих уравнений выше четвёртой степени». Изложенное в этой книге доказательство он неоднократно пытался улучшить в последующих работах (1801-1813), но полного доказательства он так и не получил. В его доказательстве остался пробел, устранённый впоследствии Абелем. Руффини не доказал, что если уравнение разрешимо в радикалах, то каждый корень этого уравнения можно записать в виде выражения через радикалы от рациональных функций с рациональными коэффициентами от коэффициентов уравнения и корней из единицы. Он доказал лишь то, что уравнение пятой степени нельзя решить с помощью резольвенты с рациональными коэффициентами.

В доказательстве Руффини идеи, связанные с подстановками, уже ранее разработанные Лагранжем, объяснены вполне отчётливо. Руффини, в отличие от Лагранжа, рассматривает композиции подстановок. Он первым ввёл понятия порядка элемента, сопряжённости, разложения подстановки в произведение циклов. Руффини доказал, что порядок подстановки равен наименьшему общему кратному длин непересекающихся циклов, входящих в её разложение; от также доказал несколько теорем о строении группы подстановок из 5 элементов.

Но основные принципы теории полей у Руффини ещё не были разработаны, и именно их и не хватает этому доказательству.

В 1809 году Руффини описал правило деления многочлена на одночлен, в 1819 году переоткрытое Горнером и получившее название *схема Горнера*. В Китае это правило было известно гораздо раньше.

Работа Руффини о неразрешимости уравнения пятой степени была написана очень непонятным языком и не получила признания. В 1810 году была назначена комиссия, которая должна была решить, верно ли его доказательство. В эту комиссию входили Лагранж и Лежандр. Но эта комиссия так ничего и не решила.

6.47. Иоганн Фридрих Пфафф (1765-1825)

В 1815 году Пфафф представил в Берлинскую академию статью, в которой он привёл преобразование дифференциального уравнения первого порядка в частных производных в дифференциальную систему. Эта теория уравнений в полных дифференциалах послужила началом развития теории интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных. На эту важную статью, несмотря на весьма положительный отзыв Гаусса, не обращали внимания до того, как Якоби в 1827 году опубликовал статью о методе Пфаффа.

В своей статье Пфафф решил задачу интегрирования уравнения

$$p_m = F(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}),$$

где $p_i = \partial z / \partial x_i$, для $m > 2$. Пфафф свёл её сначала к задаче интегрирования уравнения в полных дифференциалах

$$dz - \sum_{i=1}^{m-1} p_i dx_i - F(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}) dx_m = 0$$

с $2m$ переменными, а затем к общей задаче интегрирования уравнения в полных дифференциалах

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_i = 0.$$

Пфафф ввёл названия *гипергеометрическое уравнение* и *гипергеометрический ряд*.

В связи с исследованиями Пфаффа по дифференциальным уравнениям Кэли в 1852 году ввёл понятие *пфаффиан* — квадратный корень из определителя кососимметрической матрицы чётного порядка (этот определитель всегда является полным квадратом). У самого Пфаффа описано построение пфаффиана, но без указания на связь с кососимметрическими матрицами.

6.48. Джон Фарей (1766-1826)

По профессии Джон Фарей был геологом. Его имя вошло в историю математики благодаря короткой заметке, опубликованной в 1816 году. В этой заметке определена *последовательность Фарея* для каждого натурального числа n; она получается, если расположить в порядке возрастания все несократимые дроби, заключённые между 0 и 1, знаменатели которых не превосходят n. «Забавное свойство», которое обнаружил Фарей, заключается в том, что каждый член этой последовательности равен дроби, числитель которой равен сумме числителей двух соседних с ним членов, а знаменатель — сумме знаменателей.

Фарей не знал доказательства этого свойства; первое доказательство опубликовал Коши в том же 1816 году.

6.49. Жан Батист Жозеф Фурье (1768-1830)

Фурье не был первым, кто начал заниматься тригонометрическими рядами, которые впоследствии были названы в его честь. Интегральные представления коэффициентов тригонометрических рядов получили в 1754 году Даламбер (первые два коэффициента) и Клеро (в общем случае). В 1777 году интегральное представление коэффициентов разложения в ряд по косинусам получил Эйлер.

В 1807-1811 годы Фурье написал свой классический труд «Аналитическая теория теплоты», который был опубликован лишь в 1822 году. В этой книге Фурье вывел дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=k^2\frac{\partial T}{\partial t},$$

где T — температура, а k — коэффициент, зависящий от свойств тела, и проинтегрировал его при различных граничных условиях. Интегрирование основано на нахождении частных решений, сумма которых даёт решение; для этого применяется разложения функций в ряды.

Фурье сначала рассматривает уравнение $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k^2\frac{\partial T}{\partial t}$ со следующими начальными условиями: $T(0,t) = T(l,t) = 0$ для некоторого фиксированного l и всех $t > 0$ и $T(x,0) = f(x)$ при $0 < x < l$. Он ищет решение с разделяющимися переменными, т.е. $T(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$. Для такой функции уравнение теплопроводности можно записать в виде $\frac{\varphi''(x)}{k^2\varphi(x)} = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)}$. Тогда обе части постоянны; обозначим эту постоянную $-\lambda$. Мы приходим к двум уравнениям: $\varphi''(x) + \lambda k^2\varphi(x) = 0$ и $\psi'(t) + \lambda\psi(t) = 0$. Решения первого уравнения имеют вид $\varphi(x) = b\sin(\sqrt{\lambda}kx + c)$. Из условия $\varphi(0) = 0$ следует, что $c = 0$, а из условия $\varphi(l) = 0$ следует, что $\sqrt{\lambda} = \frac{\pi\nu}{kl}$ для некоторого натурального ν. Таким образом,

$$T(x,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu e^{-(\nu^2\pi^2/k^2l^2)t}\sin\frac{\nu\pi x}{l}.$$

Из начального условия $T(x,0) = f(x)$ следует, что $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin\frac{\nu\pi x}{l}$. Фурье находит выражение коэффициентов b_ν через функцию $f(x)$, что и завершает решение уравнения теплопроводности: $b_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(s)\sin\nu s\,ds$ (аналогичные выражения получали и его предшественники).

В связи с этим решением уравнения теплопроводности возник вопрос: какие именно функции представимы рядом Фурье. Фурье установил некоторые условия, достаточные для представимости функции рядом Фурье. Он утверждал, что любая функция раскладывается в ряд Фурье; своё утверждение он подтвердил многочисленными примерами, но не доказал его.

В случае распространения тепла в бесконечном теле ряды Фурье неприминимы из-за их периодичности; в этом случае Фурье применил предельный переход к ряду Фурье и представил решение интегралом, который впоследствии получил название *интеграл Фурье*. Точно так же, как функцию $f(x)$ можно представить рядом Фурье, её можно представить интегралом Фурье:

$$f(x)=\int_0^\infty (a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\cos\lambda x)d\lambda,$$

где $a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt$ и $b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt$.

Для развития математики наиболее ценным оказалось не решение конкретной физической задачи (распространение тепла), а инструменты, введённые Фурье для решения этой задачи — ряды Фурье и интегралы Фурье.

В работах Фурье встречаются определители и матрицы бесконечного порядка; они были нужны для вычисления коэффициентов ряда Фурье.

Фурье обобщил правило знаков Декарта так, чтобы оно давало возможность оценить количество вещественных корней многочлена $f(x)$, лежащих в данном интервале $[a,b]$. Для этого он рассмотрел знаки членов последовательности $f^{(m)}(x)$, $f^{(m-1)}(x)$, $\ldots$, $f'(x)$, $f(x)$. При $x = -\infty$ знаки в этой последовательности чередуются, а при $x = +\infty$ знаки в этой последовательности не меняются. Фурье показал, что когда x меняется от $-\infty$ до $+\infty$ число перемен знака уменьшается при прохождении вещественного (возможно, кратного) корня или пары комплексных сопряжённых корней, поэтому количество вещественных корней, заключённых между a и b, не превосходит разности перемен знака в последовательности при $x = a$ и при $x = b$. В 1829 году Штурм предложил некоторую другую последовательность, для которой число корней, заключённых между a и b, в точности равно разности перемен знака.

6.50. Жан Робер Арган (1768-1822)

Независимо от Каспара Весселя, работа которого оставалась почти неизвестной, Арган разработал геометрическую интерпретацию комплексных чисел и операций над ними. Работа Аргана, опубликованная анонимно в 1806 году, оставалась незамеченной до тех пор, пока Жергонн не опубликовал её в четвёртом томе основанного им журнала (1813/14). После этого развернулась полемика по поводу истолкования мнимых чисел и сочинение Аргана получило широкую известность; термин *диаграмма Аргана* стал общепринятым.

В 1813 году Арган опубликовал доказательство основной теоремы алгебры, полученное им в 1806 году. В этом доказательстве были некоторые пробелы, но именно Арган первым сформулировал эту теорему для многочленов с комплексными коэффициентами.

Ввёл термин *модуль комплексного числа*.

6.51. Вильям Уоллес (1768-1843)

Открытия Уоллеса хорошо известны в элементарной геометрии, но под другими именами. *Прямая Симсона*, к которой Симсон никакого отношения не имеет, впервые появилась в статье Уоллеса, опубликованной в 1799 году.

Другая теорема, доказанная Уоллесом, такова: «Описанные окружности четырёх треугольников, образованных четырьмя прямыми, пересекаются в одной точке.» Эта точка пересечения получила название *точка Микеля* в честь французского математика Августа Микеля, опубликовавшего эту теорему в 1838 году.

Уоллес был одним из первых английских математиков, принявших распространённый в контитентальной Европе подход к анализу, восходящий к Лейбницу.

Уоллес изобрёл *пантограф* — инструмент для рисования фигур, подобных данной.

6.52. Жозеф Диаз Жергонн (1771-1859)

В 1810 году основал журнал «Annales de mathématiques pures et appliquées», который стал известен как Анналы Жергонна. Жергонн больше всего интересовался геометрией, и в его журнале печаталось много статей по геометрии.

В 1816 году Жергонн получил новое решение задачи Аполлония о построении окружности, касающейся трёх данных окружностей.

С 1824 по 1827 годы Жергонн опубликовал несколько статей, в которых он ввёл принцип двойственности в проективной геометрии. Ввёл термин *поляра*. Термин *полюс* ввёл Ф.Ж.Сервуа (1767-1847).

В геометрии известна точка Жергонна; так называют точку пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания сторон и вписанной окружности.

6.53. Карл Брандон Молльвейде (1771-1859)

В 1808 году Молльвейде опубликовал тригонометрические формулы

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Эти формулы получили название *формулы Молльвейде*. Первая из этих формул несколько в другой форме доказана во «Всеобщей арифметике» Ньютона. Обе формулы Молльвейде содержатся в книге «Анализ треугольников» (1746) Фридриха Вильгельма фон Оппеля (1720-1769).

6.54. Мишель Анже Ланкре (1774-1807)

В 1806 году в «Мемуаре о кривых двоякой кривизны» ввёл кривизну и кручение пространственной кривой, определив их как бесконечно малые углы поворота нормальной и соприкасающейся плоскостей.

6.55. Фаркаш Бойяи (1775-1856)

Отец Яноша Бойяи, друг Гаусса, вместе с которым он учился в Гёттингене.

Книга Фаркаша Бойяи «Опыт введения учащегося юношества в начала чистой математики» (1832) содержит такое определение равенства плоских фигур: две фигуры равны, если их можно разрезать на попарно равные части. Такие фигуры стали называть *равносоставленными*. Пауль Гервин в 1832 году доказал, что два многоугольника равносоставлены тогда и только тогда, когда они равновелики. В приложении к этой книге опубликовано сочинение Яноша по неевклидовой геометрии.

6.56. Луи Пуансо (1777-1859)

В книге «Многоугольники и многогранники» (1809) Пуансо заново открыл два звёздчатых многогранника, обнаруженных ещё Кеплером (Пуансо об этом не знал), а также два новых звёздчатых многогранника, двойственных по отношению к ним, и показал, что для двух из этих многогранников формула Эйлера*формула!Эйлера* неверна.

В 1834 году Пуансо дал геометрическую интерпретацию вращения твёрдого тела в случае Эйлера — одном из случаев, когда уравнения движения можно проинтегрировать. При этом он ввёл понятие эллипсоида инерции и мгновенной оси вращения. В интерпретации Пуансо эллипсоид вращения катится по фиксированной плоскости. Этот случай интегрируемости уравнений вращения тела часто называют *случаем Эйлера–Пуансо*.

Литература

[1] Бурбаки Н. *Очерки по истории математики*, М.: ИЛ, 1963.

[2] Вилейтнер Г. *История математики от Декарта до середины XIX столетия*, М.: ГИФМЛ, 1960.

[3] *История математики с древнейших времен до начала XIX века*, в трех томах. Под редакцией А.П.Юшкевича.

Том третий. *Математика XVIII столетия*, М.: Наука, 1972.

[4] Цейтен Г.Г. *История математики в XVI и XVII веках*, М.-Л.: ГОНТИ, 1938.

[5] Fellmann E.A. *Leonhard Euler*, Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 2007.

[6] Kline M. *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York: Oxford Univ. Press, 1972.

[7] *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*, Editor I. Grattan-Guinnes, Amsterdam: Elsevier, 2005.

[8] *Leonard Euler: Life, Work and Legacy*, Editors Robert E. Bradley, c. Edward Sandifer, Amsterdam: Elsevier, 2007.

[9] Stedall Jacqueline, *From Cardano's Great Art to Lagrange's reflections: filling a gap in the history of algebra*, European Math. Soc., 2011.

[10] Varadarajan V.S. *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, AMS, 2006.

[11] Weil A. *Number Theory. An approach through history from Hammurapi to Legendre*, Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1984.

Предметный указатель

абсолютная единица длины, 24
алгебраический анализ, 29
апостериорная вероятность, 9
априорная вероятность, 9
аффинные преобразования, 22

бета-функция, 12
брахистохрона, 16

вариационное исчисление, 16, 29
вековое уравнение, 31

гамма-функция, 12
геодезическая, 22, 32
геометрия Лобачевского, 5, 24
гиперболические функции, 11, 24
гиперболический параболоид, 19
гипергеометрическая функция, 15
гипергеометрический ряд, 15, 37
гипергеометрическое уравнение, 15, 37
гипотеза
    Гольдбаха, 7
    Малфатти, 25

дзета-функция, 14
диаграмма Аргана, 39
дискриминант квадратичной формы, 28

задача
    Крамера–Кастильона, 11
    Фаньяно, 22
    трёх тел, 22

интегральный
    косинус, 32
    логарифм, 32
    синус, 32
интерполяционная формула Лагранжа, 27, 29

катеноид, 18
квадратичный
    закон взаимности, 17, 35, 36
конформное отображение, 23
конформные отображения, 19
кривизна, 19, 39
круги
    Малфатти, 25
    Эйлера, 21
кручение, 39

малая теорема Ферма, 16
метод
    множителей Лагранжа, 29
    наименьших квадратов, 36
минимальная
    поверхность, 18, 28, 31, 36
многочлены Лежандра, 32
модуль комплексного числа, 39

нормальное распределение, 4

обозначение предела, 32
определённый интеграл, 31
определитель Вандермонда, 26
ортотреугольник, 22
основная теорема алгебры, 20, 23, 39
особая точка, 21
особое решение дифференциального уравнения, 7, 22, 29, 32
остаточный член в форме
    Лагранжа, 29

пантограф, 39
парадокс Крамера, 11
первообразный корень, 17, 24
полюс, 39
поляра, 39
последовательность Фарея, 38
постоянная
    Эйлера, 13, 32
    Эйлера–Маскерони, 32
построения
    одним циркулем, 32
    с помощью одной линейки, 24
правило
    Крамера, 9
    знаков Декарта, 21, 38
пределы интегрирования, 31
предельные теоремы Муавра-Лапласа, 3
преобразование
    Ландена, 23
    Лапласа, 31
    Лежандра, 15
    Чирнгауза, 27
признак Даламбера, 23
принцип
    Даламбера, 22
    наименьшего действия, 8
проблема
    Варинга, 27
    Гольдбаха, 16
производящая функция, 4, 20
производящие функции, 21

прямая
  Симсона, 39
  Эйлера, 19
пфаффиан, 37
пятый постулат Евклида, 22

равносоставленные фигуры, 40
радиус кривизны, 18
разделение переменных, 15
резольвента, 20, 24
  Лагранжа, 26, 28
результант, 20
рекуррентные последовательности, 4
род кривой, 8
ряд
  Маклорена, 6, 8
  Эйлера–Маклорена, 8, 13

символ Лежандра, 36
случай
  Эйлера, 15
  Эйлера–Пуансо, 40
схема Горнера, 37

теорема
  Безу, 25
  Вильсона, 28
  Карно, 36
  Клеро, 22
  Лагранжа, 28
  Лапласа, 31
  Монжа, 30
  Парсеваля, 37
  Пифагора пространственная, 31
  Птолемея, 29
  Стюарта, 22
  Эйлера
    о выпуклых многогранниках, 35
    о многогранниках, 19, 32
    о пятиугольных числах, 21
  о конечном приращении, 29
  сложения эллиптических интегралов, 14
теория конечных разностей, 7
тождество
  Эйлера, 17
точка
  Жергонна, 39
  Микеля, 39

угловой дефект, 24
углы Эйлера, 19
уравнение
  Бернулли, 9
  Даламбера, 23
  Клеро, 22
  Лапласа, 32
  Пелля, 17
  Риккати, 5, 15
  Ферма–Пелля, 28
  Эйлера–Лагранжа, 16
  Эйлера–Пуассона, 15
  колебаний струны, 15
  малых колебаний струны, 7
  пятой степени в форме Бринга, 27
уравнения в частных производных, 15
условия Коши–Римана, 16, 23

формула
  Байеса, 9
  Брахмагупты, 29
  Герона, 35
  Лагранжа, 28
  Люилье, 35
  Мечина, 5
  Муавра, 3
  Симпсона, 21
  Стирлинга, 4, 8
  Эйлера, 6, 16
формулы
  Варинга, 27
  Мелльвейде, 39
  Френе, 19
функция Эйлера, 16

характеристики, 30
характеристическое уравнение, 15

цепная линия, 18
цепные дроби, 6, 15, 17

четырёхугольник Саккери, 4
числа
  Каталана, 21
  Эйлера, 14
число
  e, 9, 14

эквидистанта, 5
эллипс Штейнера, 20
эллиптические
  интегралы, 6, 14, 28, 35
    в форме Лежандра, 35