

НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. ПРАСОЛОВ

НАГЛЯДНАЯ ТОПОЛОГИЯ

Третье издание, стереотипное

Москва
Издательство МЦНМО
2012

УДК 515.1
ББК 22.15
П70

Прасолов В. В.

П70 Наглядная топология. — 3-е изд., стереотип. —
М.: МЦНМО, 2012. — 112 с.: ил.

ISBN 978-5-94057-903-8

Книга представляет собой вводный курс топологии. Основные понятия сначала описываются на интуитивно понятном уровне, а затем постепенно уточняются и становятся вполне строгими. Это позволяет сразу же заняться содержательными топологическими задачами.

Книга снабжена многочисленными иллюстрациями, которые нередко более важны для ее понимания, чем текст. Каждая глава содержит задачи, обдумывание которых поможет лучше усвоить излагаемый материал.

Книга будет интересна всем, кто способен воспринимать изящество и элегантность геометрических конструкций и теорем.

Для школьников, преподавателей математики, руководителей кружков, студентов младших курсов математических специальностей.

Предыдущее издание книги вышло в 2006 г.

ББК 22.15

Научное издание

Виктор Васильевич Прасолов

НАГЛЯДНАЯ ТОПОЛОГИЯ

Подписано в печать 28.12.2011 г. Формат 60 × 90 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 7. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Принт Сервис Групп». 105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.

ISBN 978-5-94057-903-8

© Прасолов В. В., 1995

© МЦНМО, 2006

Предисловие

Предмет изучения топологии — свойства фигур, сохраняющиеся при непрерывных взаимно однозначных преобразованиях или при деформациях. Первоначальное знакомство с топологией затруднено тем, что строгое определение даже простейших топологических понятий весьма громоздко. Поэтому первые содержательные теоремы обычно появляются лишь после большой предварительной работы, причем основная часть этой работы посвящена подробному и аккуратному доказательству интуитивно очевидных утверждений, а это занятие не очень увлекательное.

Эта книга представляет собой вводный курс топологии, структура которого не совсем обычна. Топологические понятия определяются в ней сначала на бытовом, интуитивно очевидном уровне, а затем они по ходу дела уточняются и доводятся до достаточно строгого уровня. Это позволяет с самого начала заниматься вполне содержательными задачами.

Другое существенное отличие книги заключается в том, что значительная ее часть посвящена различным примерам отображений и конструкций для двумерных поверхностей, узлов и зацеплений. Обычно топологи уделяют больше внимания доказательству того, что отображения определенного вида не существуют. Это требует построения различных инвариантов, как правило, достаточно сложных. Мы обсудим лишь наиболее простые, но весьма эффективные инварианты.

Особое значение имеют иллюстрации. Во многих местах книги именно они наиболее важны, а текст служит лишь комментарием к ним.

При изучении математики важную роль играет решение задач. Разбор доказательства теоремы не может заменить попыток доказать ее самостоятельно. Многие утверждения, которые читателю будет полезно обдумать

самостоятельно, сформулированы в виде задач. Эти задачи тесно сплетены с основным содержанием книги, поэтому в конце каждого параграфа их решения подробно обсуждаются.

Список литературы, рекомендуемой для дальнейшего изучения топологии, приведен в конце книги. Среди книг и статей, оказавших влияние на эту книгу, особо следует выделить книгу [Рольфсен, 1976] и статью [Виро, 1981].

Книга основана на цикле лекций, прочитанных автором в 1990/91 учебном году для учащихся средней школы № 57 г. Москвы.

Я благодарен А. Б. Сосинскому и Н. М. Флайшеру за полезные обсуждения рукописи.

1

Деформации эластичных тел

Знакомство с топологией мы начнем с нескольких задач о деформациях эластичных тел и поверхностей. Мы будем считать, что рассматриваемые фигуры можно деформировать, т.е. сминать, сжимать и растягивать, не допуская при этом разрывов и склеек.

Деформации, о которых идет речь в предлагаемых задачах, кажутся на первый взгляд невозможными. Но выполнить их не очень сложно. Прежде чем прочитать описание этих деформаций, попробуйте придумать их сами.

- ▷ **Задача 1.1.** Докажите, что эластичное тело, изображенное на рис. 1.1 (а), можно продеформировать в тело, изображенное на рис. 1.1 (б). Иными словами, если бы человек был достаточно эластичен, то он смог бы разъединить сцепленные пальцы обеих рук, не расцепляя их.
- ▷ **Задача 1.2.** Эластичный *крэндель* надет двумя ручками на бублик (рис. 1.2 (а)). Докажите, что, деформируя крэндель, одну его ручку можно снять с бублика (рис. 1.2 (б)).
- ▷ **Задача 1.3.** На крэнделе нарисована окружность (см. рис. 1.3 (а)). Докажите, что, деформируя крэндель, ее можно перевести в окружность, изображенную на рис. 1.3 (б).

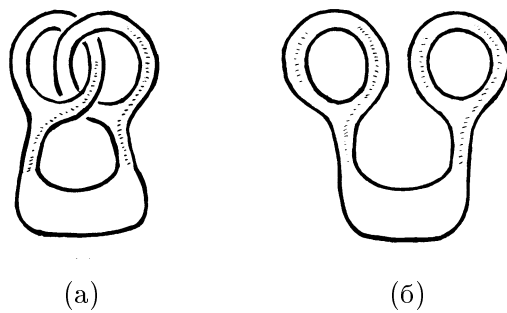


Рисунок 1.1

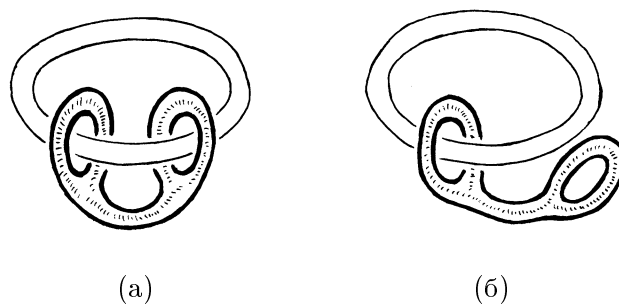


Рисунок 1.2

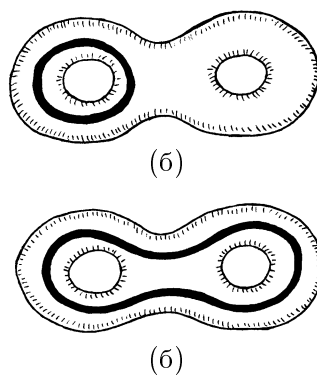


Рисунок 1.3

- **Задача 1.4.** Докажите, что проколотую велосипедную камеру можно вывернуть наизнанку. (Точнее говоря, это можно было бы сделать, если бы резина, из которой изготовлена камера, была достаточно эластична. Вывернуть наизнанку обычную велосипедную камеру с проколом небольшого размера нельзя.)

- **Задача 1.5.** Докажите, что тело, изображенное на рис. 1.4 (а), можно продеформировать в тело, изображенное на рис. 1.4 (б).

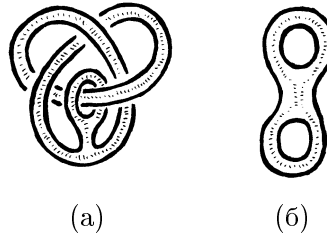


Рисунок 1.4

Решения

Объяснить решения большинства задач из этой книги проще всего с помощью рисунков, причем, как правило, эти рисунки не требуют особых комментариев. Для большей ясности в некоторых случаях стрелками указаны направления движения.

- **1.1.** См. рис. 1.5. К обсуждению этой деформации мы еще вернемся в § 4.

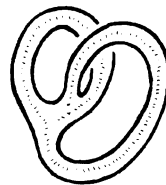


Рисунок 1.5

► 1.2. См. рис. 1.6.

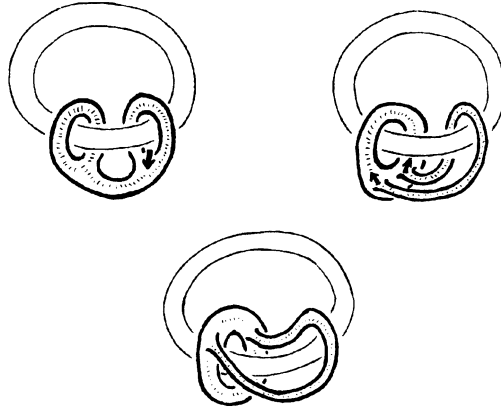


Рисунок 1.6

► 1.3. См. рис. 1.7.

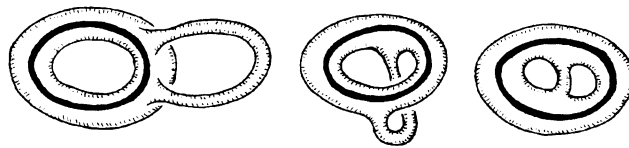


Рисунок 1.7

► 1.4. Выполним сначала деформации, изображенные на рис. 1.8. В результате получим фигуру, которую можно совместить самой с собой движением так, что ее «вну-

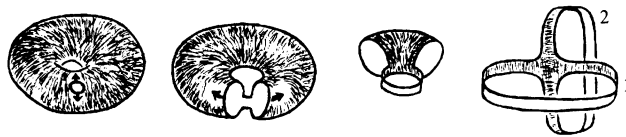


Рисунок 1.8

трения» и «внешняя» стороны поменяются местами. Для этого нужно совместить кольцо 1 с кольцом 2. Затем сделаем те же самые деформации в обратном порядке. В результате внешняя и внутренняя стороны велосипедной камеры поменяются местами.

Обратите внимание, что при таком выворачивании «параллель» переходит в «меридиан» (рис. 1.9.)

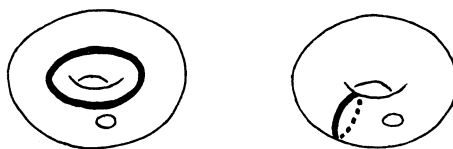


Рисунок 1.9

- 1.5. Выполним сначала деформации, изображенные на рис. 1.10. Полученную в результате фигуру легко продеформировать в фигуру, изображенную на рис. 1.1 (а). После этого остается воспользоваться решением задачи 1.1.

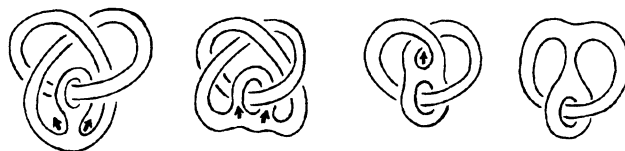


Рисунок 1.10

2

Узлы и зацепления

Важным объектом изучения в топологии являются узлы. Узел можно представить себе как веревку, концы которой соединены. Один из наиболее простых узлов изображен на рис. 2.1 (а). Он называется *трилистник*, а точнее, *правый трилистник*. Есть еще *левый трилистник*; он изображен на рис. 2.1 (б). Можно доказать, что левый трилистник и правый трилистник — разные узлы, т.е. их нельзя продеформировать друг в друга. Под деформацией узла мы подразумеваем деформацию его как эластичного тела.

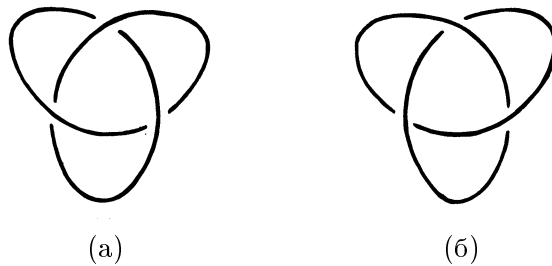


Рисунок 2.1

Проекция одного и того же узла на разные плоскости имеют разный вид.

- ▷ **Задача 2.1.** Нарисуйте проекции на плоскости Oxy и Oxz трилистника, изображенного на рис. 2.2.

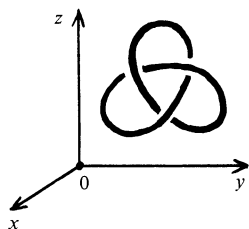


Рисунок 2.2



Рисунок 2.3

▷ **Задача 2.2.** Докажите, что кривая, заданная в координатах $Oxyz$ параметрическими уравнениями

$$x = \cos t(3 \cos t + 2), \quad y = 5 \cos t \sin t, \quad z = \sin t(25 \cos^2 t - 1),$$

является трилистником.

Вслед за трилистником по сложности идет узел *восьмерка*, своей формой напоминающий цифру 8 (рис. 2.3).

Деформируя узел, его можно сильно запутать. А если даже такой простой узел, как трилистник или восьмерка, запутан не очень сильно, то распознать его бывает нелегко. Например, не сразу заметно, что на рис. 2.4 в верхнем ряду изображен один и тот же узел (трилистник) и в нижнем ряду тоже (восьмерка). Более того, некоторые изображения трилистника весьма похожи на изображения восьмерки. Мы разместили такие диаграммы близ друга.

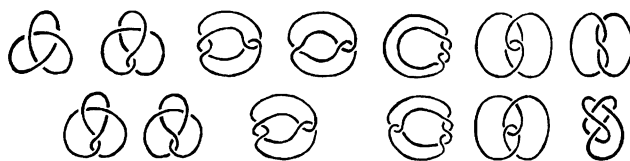


Рисунок 2.4

▷ **Задача 2.3.** а) Докажите, что все узлы, изображенные в верхнем ряду рис. 2.4, можно продеформировать друг в друга.

б) Докажите аналогичное утверждение для узлов нижнего ряда.

Левый трилистник получается из правого трилистника зеркальной симметрией (т.е. симметрией относительно плоскости). Как мы уже говорили, эти узлы нельзя продеформировать друг в друга. Узел восьмерка при зеркальной симметрии ведет себя иначе. Он переходит в узел, который можно продеформировать в исходный узел. В самом деле, на рис. 2.4 в нижнем ряду первые два узла слева зеркально симметричны.

Если взять не одну веревку, а несколько, и у каждой из них соединить концы, то получим *зацепление*. Два примера зацеплений изображены на рис. 2.5. Первое из них (рис. 2.5 (а)) называют *зацеплением Хопфа*, а второе (рис. 2.5 (б)) — *зацеплением Уайтхеда*.

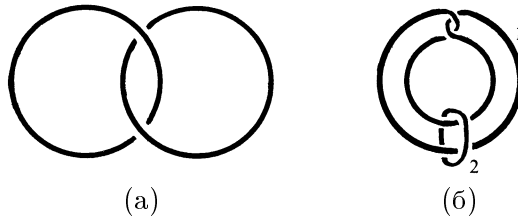


Рисунок 2.5

Для зацепления Хопфа существует симметрия относительно прямой, меняющая местами веревки (или, как сказал бы тополог, меняющая местами *компоненты* зацепления). Симметрия относительно прямой в пространстве является поворотом на 180° относительно этой прямой. Поэтому существует деформация, меняющая местами компоненты зацепления Хопфа. Может показаться, что для зацепления Уайтхеда такой деформации не существует. В самом деле, веревку 1 можно перерезать (в верхней части на нашем рисунке), затем провести через этот разрез ту же самую веревку ровно один раз и вновь соединить концы перерезанной веревки. После этого ве-

ревки, из которых состоит зацепление, можно будет распечатить. Как проделать эту операцию для веревки 1, очевидно. Но разве можно сделать то же самое для веревки 2? Оказывается, что да.

▷ **Задача 2.4.** а) Расположите зацепление Уайтхеда так, чтобы его компоненты были симметричны относительно некоторой прямой.

б) Прodelайте для компоненты 2 зацепления Уайтхеда описанную выше операцию перерезания и соединения концов перерезанной веревки.

Сразу несколькими интересными свойствами обладает зацепление, изображенное на рис. 2.6. Его называют *кольца Борромео*, потому что такие кольца нарисованы на гербе знатного итальянского рода Борромео. Одно из свойств колец Борромео заключается в

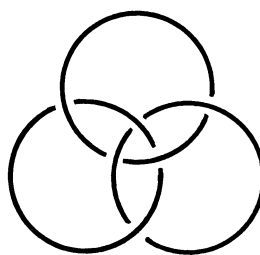


Рисунок 2.6

том, что эти кольца попарно не зацеплены, т.е. после удаления любого кольца остается пара незацепленных колец. Другое свойство колец Борромео еще более удивительно. Если любые два из колец Борромео зацепить простейшим образом (т.е. так, чтобы они образовали зацепление Хопфа), то после этого третье кольцо можно будет снять с этого зацепления (рис. 2.7).

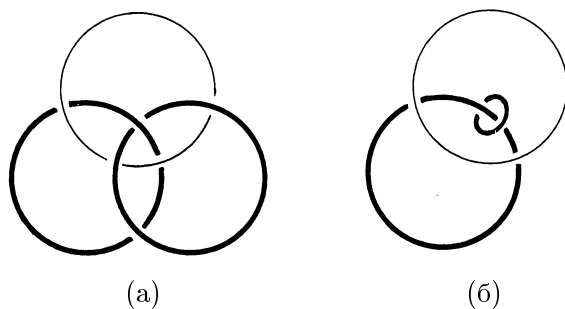


Рисунок 2.7

Это свойство колец Борромео можно сформулировать так, что оно будет выглядеть почти как фокус. Кольца Борромео попарно не зацеплены, поэтому два кольца можно развести в разные стороны. Третье кольцо при этом как-то обовьется вокруг них. Нарисуем, как именно оно будет расположено.

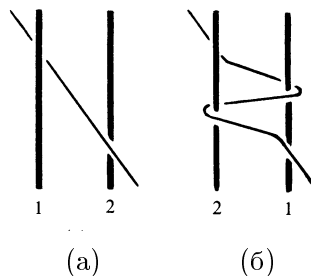


Рисунок 2.8

Для этого выясним сначала, что происходит с веревкой, проходящей между двумя прутами (рис. 2.8 (а)), при перестановке этих прутов, в процессе которой прут 2 проходит над прутом 1. Результат изображен на рис. 2.8 (б). Теперь легко понять, что происходит с третьим кольцом Борромео при разведении двух колец в разные стороны (см. рис. 2.9). Будем считать, что те два кольца, которые мы раздвинули, представляют собой жесткие обручи с какими-либо устройствами, позволяющими при желании сцеплять и расцеплять их (например, с навинчивающимися цилиндрами), а третье кольцо представляет собой веревку (рис. 2.10 (а)). При этом веревку снять с обручей нельзя. Но если мы зацепим обручи (рис. 2.10 (б)), то веревку можно будет снять! В самом деле, на рис. 2.10 (б) изображено то же самое зацепление, что и на рис. 2.7.

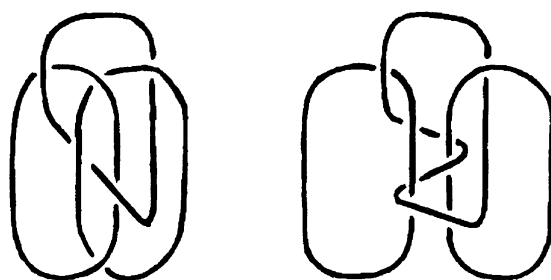


Рисунок 2.9

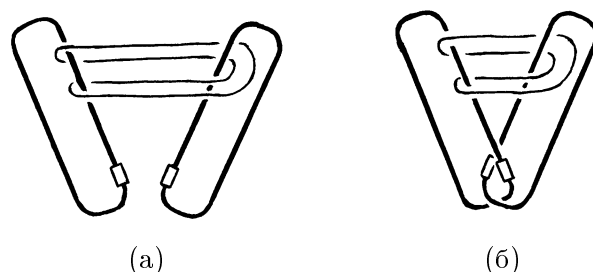


Рисунок 2.10

Этот пример должен предостеречь альпинистов. Им часто приходится пользоваться специальными крючками, которые позволяют сцеплять веревки. Эти крючки называют карабинами, потому что аналогичными крючками снабжались ремни карабинов (огнестрельного оружия), чтобы эти ремни было удобно пристегивать и отстегивать. Альпинистские крючки-карабины устроены так, что расцепиться сами они не могут. А для того, чтобы они не могли сами зацепиться, их нужно устанавливать на предохранитель. Многие альпинисты считают, что опасна лишь ситуация, когда карабины расцепляются, а при зацеплении карабинов ничего страшного случиться не может. Поэтому к установке на предохранитель они иногда относятся небрежно. Это, как мы видели, может привести к трагическим последствиям.

Решения

- **2.1.** Эта задача, конечно, не вполне определенная. Проекция узла на одну координатную плоскость не задает его проекции на другие координатные плоскости. Однако на эти проекции накладываются весьма жесткие ограничения; проекции не могут быть произвольными. Одно из возможных решений изображено на рис. 2.11.

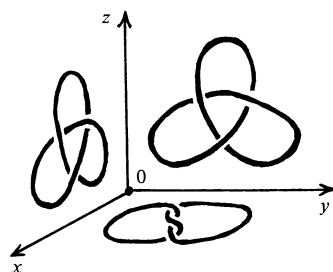


Рисунок 2.11

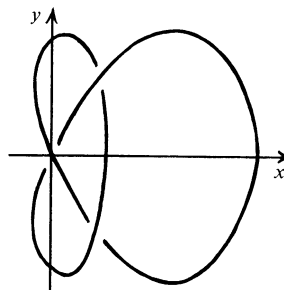


Рисунок 2.12

- **2.2.** Для доказательства удобнее всего рассмотреть проекцию на плоскость Oxy (рис. 2.12). При этом координата z используется для выяснения того, какая часть кривой расположена сверху, а какая снизу.

- **2.3.** Проще всего изготовить трилистник и восьмерку из веревки или шнурка, а затем попытаться получить из этих узлов все узлы, изображенные на рис. 2.4. Выполнить некоторые преобразования узла восьмерка вам поможет рис. 2.13.

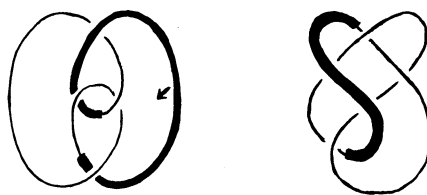


Рисунок 2.13

- **2.4.** а) См. рис. 2.14.

б) Проведем веревку через разрез, как показано на рис. 2.15 (а). Процесс расцепления веревок изображен на рис. (б)–(е).

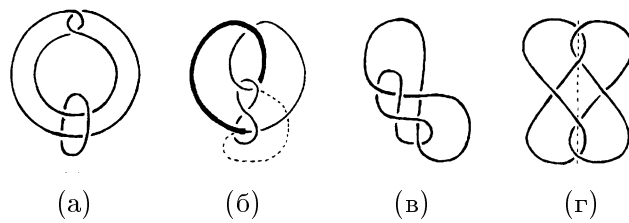


Рисунок 2.14

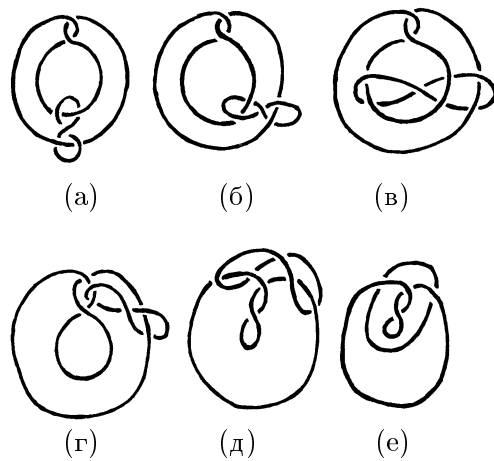


Рисунок 2.15

3

Заклеивание узлов и зацеплений

Мы будем говорить, что узел *заклеен* пленкой, если задана несамопересекающаяся поверхность, краем которой служит этот узел. Два примера заклеивания трилистника пленкой изображены на рис. 3.1. Между этими пленками есть существенная разница: пленка (а) неориентируема, а пленка (б) ориентируема. Объясним, что это означает. Будем считать пленку прозрачной. Пусть по ней перемещается пара перпендикулярных векторов, касающихся пленки, — длинный вектор и короткий. В результате обхода $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ вдоль пленки (а) мы получим пару векторов, которую нельзя совместить поворотом с исходной парой (если обход осуществлять не мысленно, а

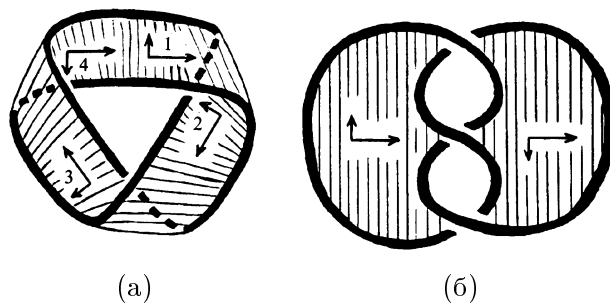


Рисунок 3.1

воспользоваться, например, пластмассовой фигуркой, то она перейдет на другую сторону пленки). Для пленки (б) такого обхода не существует, т.е. при любом обходе, не пересекая край пленки, пара векторов переходит в пару векторов, которую можно поворотом совместить с исходной парой. Пленки типа (а) называют *неориентируемыми*, а пленки типа (б) — *ориентируемыми*.

Плоскую пленку, заклеивающую окружность (т.е. натянутую на нее), легко превратить в неориентируемую пленку (рис. 3.2 (а)). Отметим, что эта конструкция позволяет любую ориентируемую пленку с краем превратить в неориентируемую пленку с тем же самым краем. На рис. 3.2 (а)–(в) показано, как полученную пленку продеформировать в бутылку Клейна, из которой вырезан *диск*, т.е. круг. Здесь мы забегаем несколько вперед; о том, что такое бутылка Клейна, рассказывается в § 9.

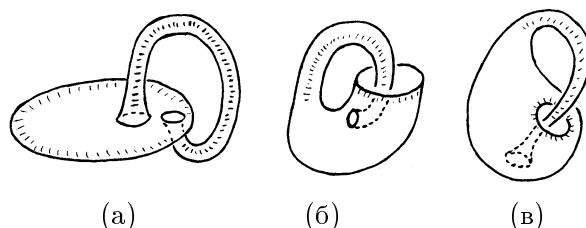


Рисунок 3.2

▷ **Задача 3.1.** Докажите, что окружность можно заклеить также и *листом Мёбиуса* (рис. 3.3), т.е. лист Мёбиуса

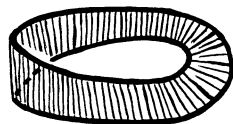


Рисунок 3.3

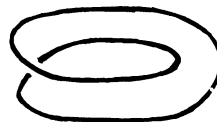


Рисунок 3.4

можно продеформировать так, что его граница станет окружностью, лежащей в некоторой плоскости.

Из рис. 3.3 видно, что кривую, изображенную на рис. 3.4, можно заклеить листом Мёбиуса. Ту же самую кривую можно заклеить бутылкой Клейна с вырезанным диском. Как это сделать, показано на рис. 3.5 (а)–(в); при этом на рис. 3.5 (а) кривая изображена слегка повернутой.

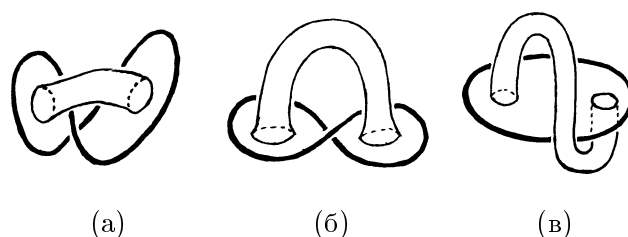


Рисунок 3.5

▷ **Задача 3.2.** а) Докажите, что кривую, изображенную на рис. 3.4, можно заклеить также и ориентируемой поверхностью, а именно, диском.

б) Докажите, что кривую, изображенную на рис. 3.6, тоже можно заклеить диском.

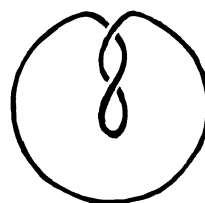


Рисунок 3.6

В 1930 г. была опубликована совместная статья Ф. Франкля и Л. С. Понтрягина, в которой было доказано, что любое зацепление можно заклеить ориентируемой пленкой. Четыре года спустя была опубликована статья Зейферта с другим доказательством этой теоремы. Поэтому ориентируемую поверхность, заклеивающую зацепление (или натянутую на зацепление), обычно называют *поверхностью Зейферта*.

Мы докажем эту теорему методом Зейферта. Но сначала остановимся еще на одной задаче, чтобы показать неочевидность теоремы.

- ▷ **Задача 3.3.** Докажите, что восьмерку можно заклеить ориентируемой поверхностью.

Перейдем к описанию *алгоритма Зейферта*. Будем считать, что узел расположен вблизи своей диаграммы, т.е. он почти весь лежит в плоскости диаграммы и лишь на перекрестках выходит из нее. Зададим направление обхода узла. Будем обходить узел в заданном направлении, перепрыгивая на каждом перекрестке с одной ветви на другую так, чтобы обход продолжался в заданном направлении. Путь может замкнуться до того, как будет обойден весь узел. Получив замкнутый путь, продолжаем обход оставшейся части узла. На рис. 3.7 (а) изображены такие замкнутые пути для трилистника.

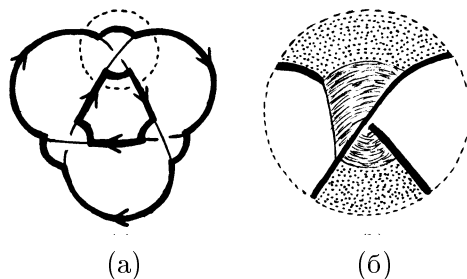


Рисунок 3.7

Заклеим эти пути дисками, расположенными, например, над плоскостью. Участок пути, соответствующий перепрыгиванию, можно при этом расположить как под плоскостью, так и над ней. Поэтому можно добиться того, чтобы на каждом перекрестке один такой участок был расположен под плоскостью, а другой над ней. Тогда на перекрестках полученные пленки можно соединить так, как показано на рис. 3.7 (б).

Аналогичным способом можно заклеить любой узел. В самом деле, заклеивание не двух, а нескольких замкнутых путей дисками особых трудностей не вызывает. Эту заклейку можно начать с любого из внутренних путей, т.е. с пути, не содержащего внутри себя незаклеенных путей. Затем на каждом шаге следует заклеивать путь, не содержащий внутри себя незаклеенных путей. При этом заклеивающий диск всегда можно расположить выше уже имеющихся дисков.

Остается лишь один вопрос, но он очень важен. Почему в результате получается ориентируемая поверхность? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно сначала дать другое определение ориентируемости. Исходя непосредственно из первоначального определения ориентируемости, трудно доказать ориентируемость какой-либо поверхности. В самом деле, для этого нужно рассмотреть все возможные ее обходы, а их слишком много.

Прежде всего докажем, что плоскость представляет собой ориентируемую поверхность. Предположим, что пара скрепленных векторов движется по плоскости, причем движение начинается и заканчивается в одной и той же точке. Нужно доказать, что направление вращения от первого вектора ко второму в исходном положении совпадает с направлением вращения в конечном положении. На плоскости любой замкнутый путь можно стянуть в точку, рассматривая гомотетичные ему пути. При этом в соответственных точках рассматриваемых путей можно приложить векторы, полученные друг из друга параллельным переносом (рис. 3.8). В результате движение векторов по пути, стянутому в точку, сводится к их вращению вокруг этой точки. Ясно, что направление вращения от первого вектора ко второму при этом не изменяется. Таким образом, плоскость ориентируема.

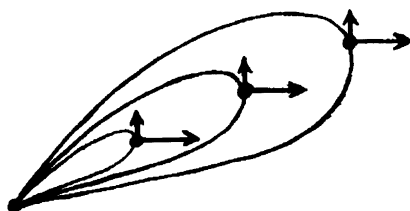
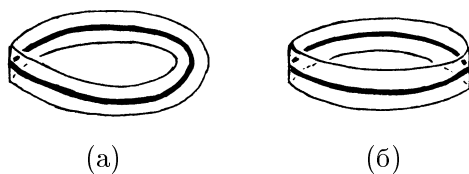


Рисунок 3.8

Нетрудно показать, что на любой поверхности при обходе вдоль пути, который можно стянуть в точку, направление вращения от первого вектора ко второму не изменяется. Дело в том, что если у двух пар векторов их первые векторы мало отличаются друг от друга, и вторые векторы тоже, то эти пары задают одно и то же направление вращения. Поэтому если один обход совершается лишь чуть-чуть иначе, чем другой, то полученное в результате направление вращения будет одно и то же для обоих обходов. Следовательно, в процессе стягивания пути итоговое направление вращения изменяться не будет. Отметим также, что итоговое направление вращения зависит лишь от траектории, по которой движутся векторы; оно не зависит от того, как именно они при этом движутся.



(a)

(б)

Рисунок 3.9

Направление вращения может измениться лишь при обходе вдоль пути, который нельзя стянуть в точку. При обходе листа Мёбиуса вдоль пути, изображенного на рис. 3.9 (а), направление вращения изменяется. Следовательно, этот путь нельзя стянуть в точку.

Отметим, что если путь нельзя стянуть в точку, то обход вдоль него не обязательно изменяет направление вращения. Например, обход цилиндра вдоль пути, изображенного на рис. 3.9 (б), сохраняет направление вращения, хотя и этот путь нестягиваем.



Рисунок 3.10

Два пути γ_1 и γ_2 , идущих из точки A в точку B , можно рассматривать как один путь γ с началом и концом в точке A (рис. 3.10). Для этого нужно один из этих путей рассматривать не как путь из A в B , а как путь из B в A . Легко проверить, что следующие два условия эквивалентны:

1. Обход вдоль пути γ сохраняет направление вращения.
2. Направление вращения, перенесенное из A в B вдоль пути γ_1 , совпадает с направлением вращения, перенесенным из A в B вдоль пути γ_2 .

Теперь определение ориентируемости можно сформулировать в более удобном для применения виде. Будем говорить, что на поверхности задана *ориентация*, если в каждой ее точке задано направление вращения, причем переносы вдоль любого пути переводят эти направления вращения друг в друга. При этом, конечно, можно ограничиться переносами вдоль сколь угодно коротких путей (потому что длинный путь состоит из нескольких коротких). Поверхность, на которой можно задать ориентацию, называют *ориентируемой*. Это определение эквивалентно нашему первоначальному определению ориентируемости.

Еще более удобное определение ориентируемости мож-

но получить, указав явный способ задания ориентации. Разрежем поверхность на криволинейные многоугольники. Чтобы задать ориентацию на многоугольнике, достаточно задать направление обхода его границы. На соседних многоугольниках направления обхода должны быть согласованы так, как показано на рис. 3.11. Поверхность будет ориентируемой, если на всех многоугольниках можно задать согласованные направления обхода.

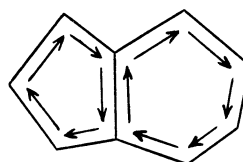


Рисунок 3.11

Используя такое определение ориентируемости, легко доказать ориентируемость поверхности, которая получается с помощью алгоритма Зейферта. В самом деле, полученная поверхность естественным образом разрезана на криволинейные многоугольники, а задать направление их обхода можно в соответствии с направлением обхода узла (рис. 3.12). Легко убедиться, что направления обхода многоугольников согласованы друг с другом.

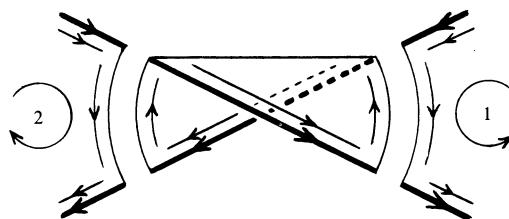


Рисунок 3.12

Если мы отразим относительно плоскости диаграммы диски, заклеивающие замкнутые пути, то новые диски тоже можно будет заклеить пленками, незначительно видоизменив рис. 3.7 (б). В самом деле, заклеивающую пленку можно представить как часть боковой поверхности цилиндра. Новые диски можно заклеить оставшейся частью

этой поверхности (рис. 3.13). В результате узел будет расположен на некоторой ориентируемой поверхности без края, причем узел разбивает ее на две части.

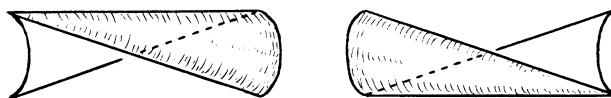


Рисунок 3.13

- ▷ **Задача 3.4.** Докажите, что любой узел можно расположить на некоторой ориентируемой поверхности без края так, что он не будет разбивать ее на части.

Алгоритм Зейферта можно использовать не только для заклеивания узла, но и для заклеивания любого зацепления. При этом на каждой компоненте зацепления ориентация задается независимо от ориентаций остальных компонент. На рис. 3.14 показаны два различных выбора ориентаций одного и того же зацепления. Склеив пары соответствующих им поверхностей Зейферта, получим две разных ориентируемых поверхности без края (рис. 3.15).

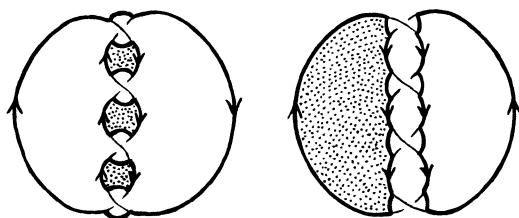


Рисунок 3.14

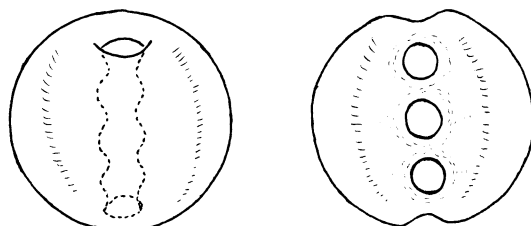


Рисунок 3.15

Применение алгоритма Зейферта для заклеивания зацепления не всегда приводит к связной поверхности. Например, если диаграмма зацепления состоит из двух непересекающихся окружностей, то заклеивающая поверхность состоит из двух непересекающихся дисков. Но из нескольких ориентируемых поверхностей, заклеивающих компоненты зацепления, легко получить одну ориентируемую поверхность, соединив исходные поверхности трубками. *Поверхностью Зейферта* будем называть связную ориентируемую поверхность, краем которой служат все компоненты зацепления.

Для построения поверхности Зейферта достаточно было бы заклеить каждую компоненту зацепления своей ориентируемой поверхностью так, чтобы эти поверхности попарно не пересекались. Но такая заклейка не всегда существует. Например, зацепление Хопфа так заклеить нельзя. Более того, нельзя даже заклеить одну из его компонент ориентируемой поверхностью, не пересекающей вторую компоненту. Доказывать это мы не будем.

- ▷ **Задача 3.5.** Докажите, что кривую 1, изображенную на рис. 3.16, можно заклеить ориентируемой поверхностью, не пересекающей кривую 2.

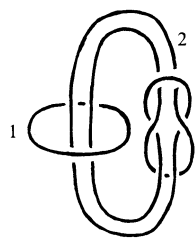


Рисунок 3.16

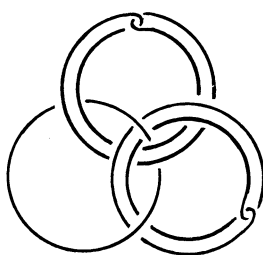


Рисунок 3.17

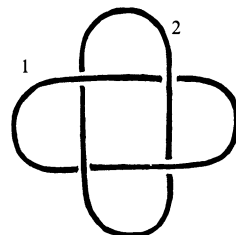


Рисунок 3.18

- ▷ **Задача 3.6.** Докажите, что три кривые, изображенные на рис. 3.17, можно заклеить тремя попарно не пересекающимися ориентируемыми поверхностями.

- **Задача 3.7.** Докажите, что кривую 1, изображенную на рис. 3.18, можно заклеить листом Мёбиуса, не пересекающим кривую 2.

Решения

- **3.1.** С одной стороны, эта задача очевидна: границу листа Мёбиуса можно продеформировать так, что она станет окружностью. При этом лист Мёбиуса тоже как-то деформируется. Соответствующая деформация каркаса листа Мёбиуса изображена на рис. 3.19. К сожалению, этот рисунок не очень нагляден.

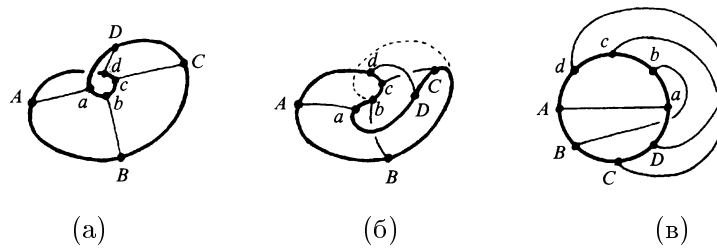


Рисунок 3.19

Лист Мёбиуса с плоской границей можно представить себе более наглядно. Его можно, например, склеить из выкройки, изображенной на рисунке 3.20. Для этого нужно

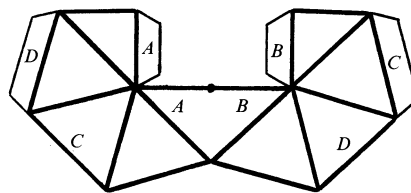


Рисунок 3.20

склеить из нее фигуру в форме октаэдра. В результате получится поверхность октаэдра, из которой вырезаны треугольники ADE и DCF (рис. 3.21 (а)). Кроме того, внутри октаэдра будет расположена фигура, изображенная на рис. 3.21 (б). Границей всей полученной фигуры будет треугольник ACD .

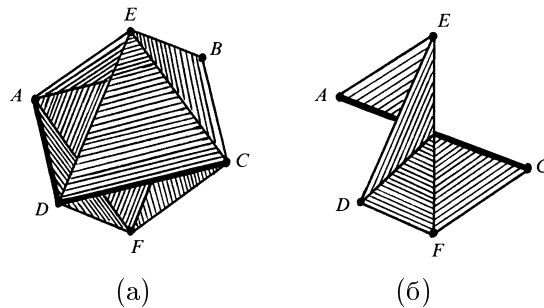


Рисунок 3.21

Другое наглядное представление листа Мёбиуса с плоской границей можно получить следующим образом. Возьмем резиновую пленку $ABCD$. Чтобы получить из нее лист Мёбиуса, нужно склеить стрелки AB и CD (рис. 3.22 (а)). Не будем спешить это делать. Сначала надуем пленку как резиновый шарик. В результате получим сферу с отверстием $ABCD$ (рис. 3.22 (б)). Продеформируем сферу, сблизив отрезки AB и BC , а также отрезки AD и DC (рис. 3.22 (в)). Теперь уже нетрудно представить, что произойдет при склейке стрелок AB и CD (рис. 3.22 (г)).

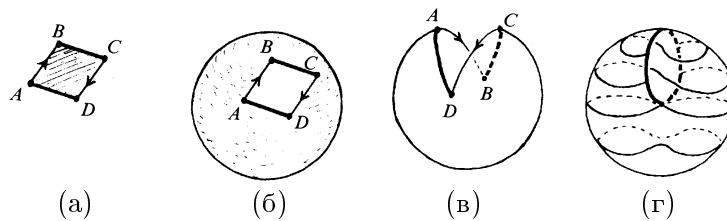


Рисунок 3.22

- **3.2.** Разрежем сферу по меридиану и вдавим внутрь верхнюю часть поверхности одной из полусфер (рис. 3.23 (а)). Вдавленную часть границы полусферы повернем сначала на 180° (рис. 3.23 (б)), а затем еще на 180° (рис. 3.23 (в)).

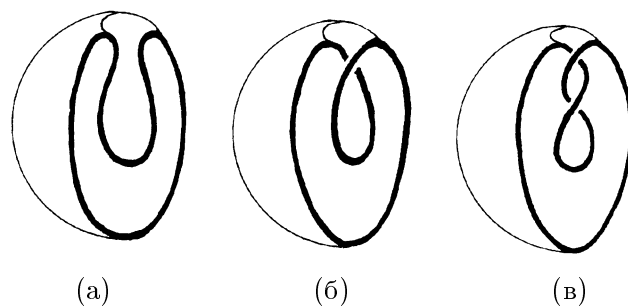


Рисунок 3.23

- **3.3.** Можно, например, воспользоваться диаграммой узла восьмерка, расположенной на рис. 2.4 справа. Заклеивающая поверхность изображена на рис. 3.24. Можно также воспользоваться четвертой слева диаграммой.

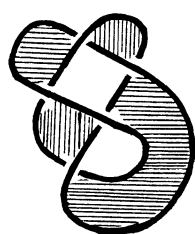
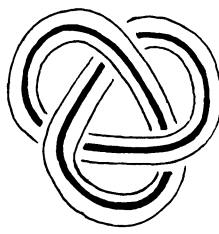
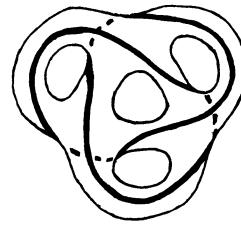


Рисунок 3.24



(а)



(б)

Рисунок 3.25

Для остальных диаграмм узла восьмерка, изображенных на рис. 2.4, построенные аналогичным образом заклеивающие поверхности будут неориентируемыми. Ориентируемые поверхности, построенные для этих диаграмм

с помощью алгоритма Зейферта будут на изображениях многослойными. Рисовать их неудобно.

- ▶ **3.4.** Рассмотрим окрестность данного узла. Узел можно разместить на границе этой окрестности (рис. 3.25 (а)). При этом получается заузленная поверхность. «Сплющив» ее, можно получить незаузленную поверхность.
- ▶ **3.5.** Требуемая поверхность изображена на рис. 3.26.

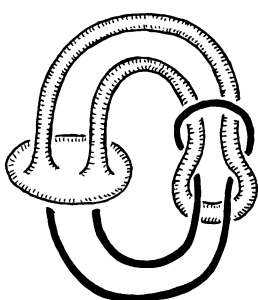


Рисунок 3.26

- ▶ **3.6.** Заклеим сначала обе перекрученные окружности. Для каждой из них рассмотрим пленку, изображенную на рис. 3.27 (а), и приклеим к ее граничным окружностям C_1 и C_2 кольцо (рис. 3.27 (б)). Можно считать, что полученные таким образом пленки целиком лежат

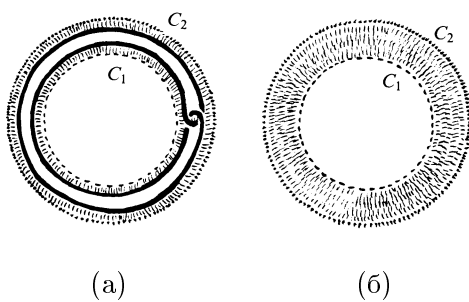


Рисунок 3.27

вблизи окружностей 2 и 3 (рис. 3.28 (а)). Остается заклеить окружность 1 ориентируемой пленкой, не задевающей окружностей 2 и 3. Как это сделать, показано на рис. 3.28 (б).

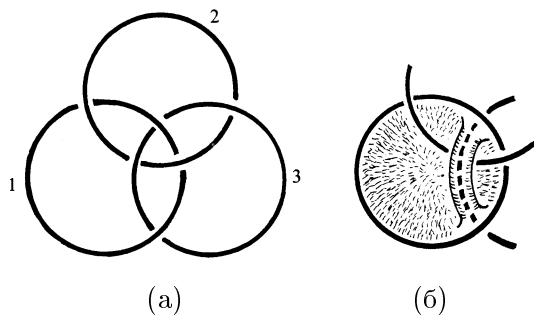


Рисунок 3.28

- 3.7. Обратимся к листу Мёбиуса с плоской границей, изображенному на рис. 3.21. Легко проверить, что окружность 2, изображенная на рис. 3.29, не пересекает его.

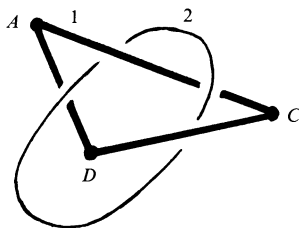


Рисунок 3.29

4

Инвариант узла

Попытки развязать трилистник к успеху не приводят. Но это не дает доказательства, что развязать его нельзя действительно никаким способом.

Получить такое доказательство можно, например, следующим образом. Сопоставим каждой диаграмме узла некоторое число. Если при этом разным диаграммам одного и того же узла сопоставляется одно и то же число, то мы будем говорить, что задан *инвариант узла*. В таком случае для каждого узла однозначно определено значение этого инварианта. Если значения инварианта для двух диаграмм узлов разные, то эти диаграммы соответствуют разным узлам. Но инвариант не обязательно различает все узлы, т.е. для некоторых разных узлов значения инварианта могут совпадать.

Для узлов и зацеплений есть весьма простой инвариант. Он строится следующим образом. Рассмотрим все возможные раскраски узла в три цвета (каждая связанная дуга диаграммы красится одним цветом). При этом на каждом перекрестке сходятся дуги одного, двух или трех цветов. Назовем раскраску *правильной*, если ни на каком перекрестке не сходятся ровно два цвета, т.е. на каждом перекрестке сходятся либо дуги одного цвета, либо сразу всех трех цветов.

Теорема 4.1. *Количество правильных раскрасок диаграммы узла в три цвета является инвариантом узла.*

Доказательство. Рассмотрим все возможные преобразования перекрестков диаграмм узлов при деформациях (рис. 4.1). Требуется доказать, что при этих преобразованиях правильные раскраски переходят в правильные раскраски, причем однозначным образом. Поясним, что мы имеем в виду. Пусть задана правильная раскраска диаграммы. Подвергнем эту диаграмму одному из преобразований, изображенных на рис. 4.1. Оставим без изменений раскраску диаграммы вне той части плоскости, где совершается преобразование. Тогда концы всех дуг на картинке, изображающей преобразование, будут окрашены. Требуется доказать, что эту раскраску можно продолжить до правильной раскраски той части диаграммы, где совершается преобразование, причем это продолжение раскраски определено однозначно. Для одноцветных раскрасок это легко проверить. Для всех существенно различных разноцветных раскрасок преобразования изображены на рис. 4.2.

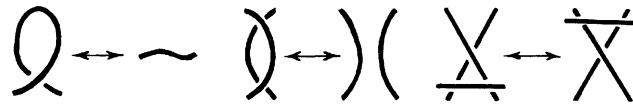


Рисунок 4.1

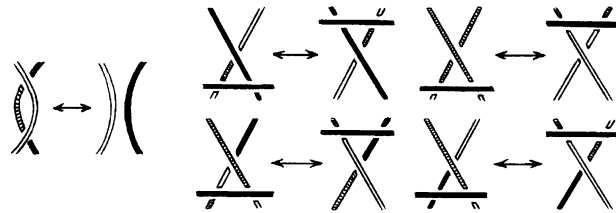


Рисунок 4.2

Теперь можно доказать, что трилистник не развязывается. На рис. 4.3 изображена правильная раскраска диаграммы трилистника, при которой используются все три цвета. Общее количество таких раскрасок этой диаграммы равно 6. В самом деле, одну дугу можно окрасить любым из трех цветов, другую дугу — одним из двух оставшихся цветов, а цвет третьей дуги после этого будет определен однозначно. Помимо шести разноцветных правильных раскрасок диаграммы трилистника есть еще три одноцветных правильных раскраски. Таким образом, для трилистника количество правильных раскрасок равно 9, а у незаузленной окружности есть только три одноцветные раскраски, никаких других раскрасок у нее нет. Следовательно, трилистник нельзя продеформировать в незаузленную окружность.



Рисунок 4.3

К сожалению, построенный инвариант не всемогущ. Он не позволяет даже доказать, что узел восьмерка не развязывается. В самом деле, легко проверить, что любая правильная раскраска диаграммы этого узла одноцветная. Но все же инвариант позволяет отличать друг от друга бесконечно много узлов. На рис. 4.4 изображены две различные правильные раскраски одной и той же диаграммы. Соединив n таких узелков в замкнутую цепочку, получим узел, количество правильных раскрасок которого равно $3 \cdot 2^n + 3$. Следовательно, при разных n количества правильных раскрасок разные.



Рисунок 4.4

Для зацеплений количество правильных раскрасок диаграммы в три цвета тоже инвариант. Доказательство этого утверждения ничем не отличается от доказательства для узлов.

Незаузленные и попарно не зацепленные окружности можно красить независимо друг от друга. Поэтому количество правильных раскрасок для n таких окружностей равно 3^n . Это дает при использовании нашего инварианта для зацеплений новые возможности по сравнению с узлами. В самом деле, если зацепление допускает лишь одноцветные правильные раскраски, то у него количество правильных раскрасок меньше, чем у незаузленных и попарно не зацепленных окружностей. Легко проверить, что все зацепления, изображенные на рис. 4.5, допускают лишь одноцветные правильные раскраски.

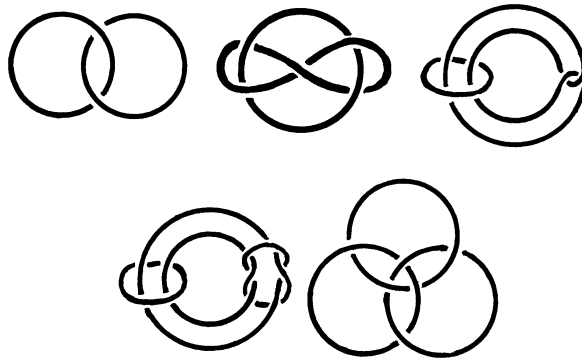


Рисунок 4.5

Доказанная нами невозможность расцепить зацепления, изображенные на рис. 4.5, позволяет продолжить обсуждение задачи 1.1 о расцеплении сцепленных пальцев. Рис. 4.6 показывает, что если на руку надеть жесткий браслет (рис. 4.6 (а)), то расцепить пальцы (рис. 4.6 (б)) уже не удастся. В самом деле, если бы их удалось расцепить, то браслет можно было бы снять (рис. 4.6 (в)).

Но тогда зацепление, изображенное на рис. 4.6 (а), можно было бы расцепить.

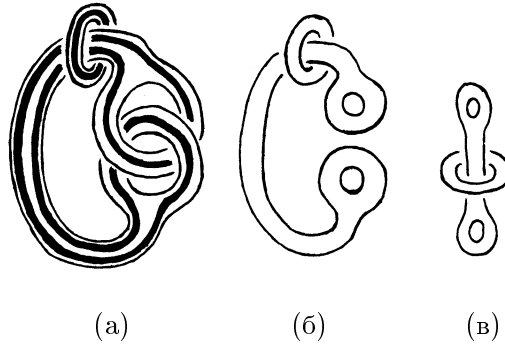


Рисунок 4.6

Помимо раскрасок диаграмм узлов и зацеплений в три цвета можно использовать раскраски в n цветов для произвольного натурального числа n . Соответствующий инвариант определяется следующим образом. Нам будет удобно рассматривать цвета как остатки от деления на n . Будем говорить, что раскраска диаграммы узла или зацепления *правильная*, если на каждом перекрестке выполняется соотношение

$$b + c \equiv 2a \pmod{n},$$

(см. рис. 4.7); это выражение означает, что числа $b + c$ и $2a$ дают одинаковые остатки при делении на n . Проверьте

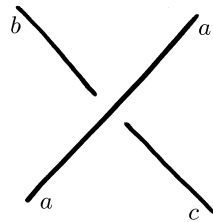


Рисунок 4.7

самостоятельно, что при $n = 3$ мы получаем то же самое определение правильных раскрасок, что и раньше.

С помощью рис. 4.8 легко проверить, что количество правильных раскрасок узла (зацепления) является инвари-

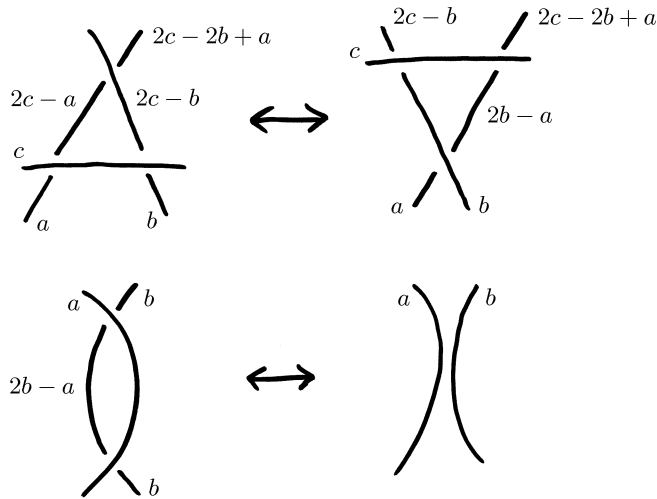


Рисунок 4.8

антом узла (зацепления). Обратите внимание, что в случае $n = 3$ такое доказательство проще предыдущего, потому что теперь не нужно рассматривать разные случаи.

Раскраски диаграммы узла в три цвета не позволяют доказать, что узел восьмерка не развязывается. Но это можно сделать с помощью раскрасок в пять цветов. Рис. 4.9 показывает, что у диаграммы узла восьмерка есть разноцветная правильная раскраска в пять цветов, поэтому узел восьмерка не развязывается.

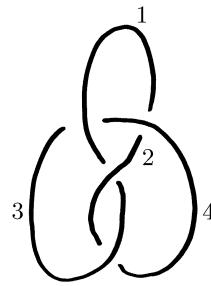


Рисунок 4.9

Несложно проверить, что все правильные раскраски диаграммы трилистника в пять цветов одноцветные. Поэтому трилистник и восьмерка — разные узлы, т.е. их нельзя преобразовать друг в друга.

5

Гомеоморфизмы

В предыдущих параграфах мы часто рассматривали фигуры в пространстве с точностью до деформации, т.е. мы не различали фигуры, которые можно продеформировать друг в друга. Топологи называют такие фигуры *изотопными* (в пространстве). Например, узлы или зацепления, которые можно продеформировать друг в друга, называют изотопными.

Еще более важно в топологии понятие гомеоморфности фигур. Две фигуры X и Y называют *гомеоморфными*, если существует непрерывное взаимно однозначное отображение $f : X \rightarrow Y$, причем обратное отображение $f^{-1} : Y \rightarrow X$ тоже непрерывно. Гомеоморфность фигур, в отличие от изотопности, зависит лишь от самих фигур, а не от их расположения в пространстве. Например, любой узел гомеоморфен окружности.

Все фигуры, которые можно получить из прямоугольного листа бумаги склейкой изображенных на рис. 5.1 (а) стрелок, попарно гомеоморфны. Примерами таких фигур служат цилиндр и перекрученный цилиндр (рис. 5.1 (б)). Эти фигуры гомеоморфны, но они не изотопны. В самом деле, их границы представляют собой попарно не изотопные зацепления (рис. 5.1 (в)).

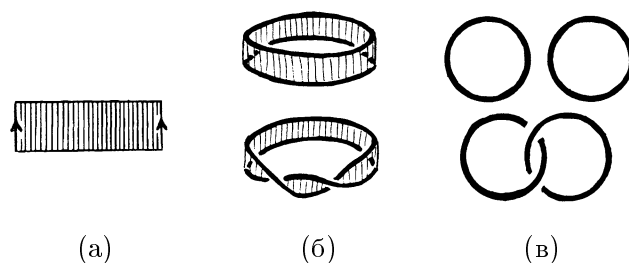


Рисунок 5.1

Если стороны прямоугольника склеивать по-другому (рис. 5.2 (а)), то полученные фигуры будут гомеоморфны листу Мёбиуса. Примеры таких фигур изображены на рис. 5.2 (б). Нижняя фигура изотопна уже знакомой нам поверхности, заклеивающей трилистник (рис. 5.2 (в)).

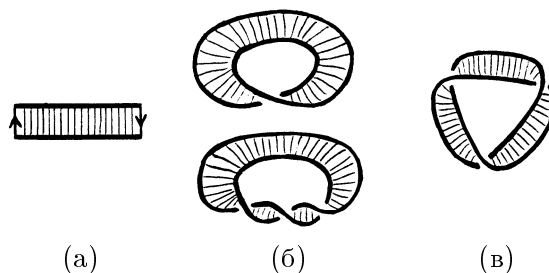


Рисунок 5.2

Обсудим еще некоторые примеры гомеоморфных и не-гомеоморфных фигур.

Пример 1. Интервал (отрезок с исключенными концами) и прямая гомеоморфны. В самом деле, легко построить гомеоморфизм интервала на полуокружность. Гомеоморфизм полуокружности на прямую изображен на рис. 5.3.

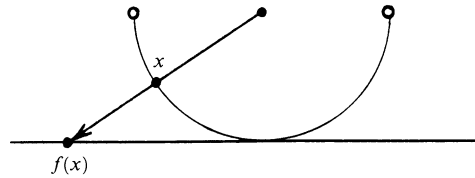


Рисунок 5.3

Пример 2. Круг с выколотой точкой гомеоморфен кольцу. Можно считать, что круг с выколотой точкой состоит из таких точек X , что $0 < AX < 1$, а кольцо состоит из таких точек Y , что $1 < AY < 2$ (A — некоторая фиксированная точка). Гомеоморфизм круга на кольцо можно задать следующим образом. Отобразим точку X в точку Y , которая лежит на луче AX , причем $AY = 1 + AX$. Отметим, что если бы точка A не выкалывалась из круга, то задать отображение круга на кольцо таким образом не удалось бы.

Один из простейших способов доказательства негомеоморфности фигур заключается в выкалывании точки.

Пример 3. Отрезок $I = [0, 1]$ и интервал $J = (0, 1)$ не гомеоморфны. Предположим, что $f : I \rightarrow J$ — гомеоморфизм. Точка 1 не разбивает отрезок I , т.е. после ее выкалывания любые две оставшиеся точки можно будет соединить путем. При гомеоморфизме это свойство сохраняется. Следовательно, точка $f(1)$ не разбивает интервал J . Но любая точка интервала разбивает его. Получено противоречие, поэтому не существует гомеоморфизма $f : I \rightarrow J$.

- ▷ **Задача 5.1.** Докажите, что окружность и интервал не гомеоморфны.
- ▷ **Задача 5.2.** Докажите, что прямая не гомеоморфна фигуре, состоящей из трех лучей, выходящих из одной точки.

Другой способ доказательства негомеоморфности фигур основан на том, что при гомеоморфизме сохраняется свойство стягиваемости всех петель.

Пример 4. Круг и кольцо не гомеоморфны. В самом деле, в круге любая петля стягиваема (рис. 5.4 (а)), а в кольце есть нестягиваемая петля (рис. 5.4 (б)).

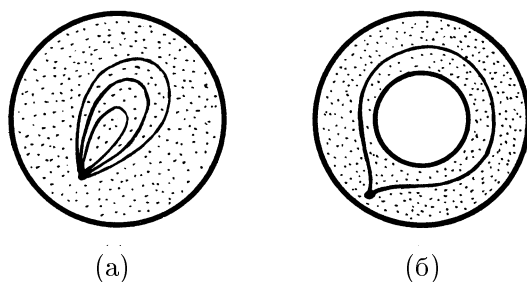


Рисунок 5.4

Обсудим теперь, нельзя ли заменить условие непрерывности отображения f^{-1} каким-либо более слабым условием. Например, нельзя ли в определении гомеоморфизма потребовать просто существования непрерывного взаимно однозначного отображения $f : X \rightarrow Y$ или же ограничиться требованием существования непрерывных взаимно однозначных отображений $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$. Задачи 5.3 и 5.4 показывают, что этих условий не достаточно.

- ▷ **Задача 5.3.** Пусть I — полуинтервал, т.е. отрезок, один из концов которого исключен. Докажите, что существует непрерывное взаимно однозначное отображение $f : I \rightarrow S$, где S — окружность.
- ▷ **Задача 5.4.** Пусть F_1 — круг, F_2 — кольцо, причем некоторые граничные точки этих фигур выколоты, а некоторые оставлены (для решения задачи нужно, в частности, придумать, какие точки выколоты, а какие оставлены).

Докажите, что существуют непрерывные взаимно однозначные отображения $f : F_1 \rightarrow F_2$ и $g : F_2 \rightarrow F_1$.

Обсуждение поверхностей, заклеивающих узлы, мы начали с двух примеров заклеивания трилистника (рис. 3.1). Как мы уже выяснили, одна из поверхностей, заклеивающих трилистник, гомеоморфна листу Мёбиуса (рис. 5.2).

- ▷ **Задача 5.5.** Докажите, что другая поверхность, заклеивающая трилистник, гомеоморфна (но не изотопна) тору с вырезанным диском (рис. 5.5).

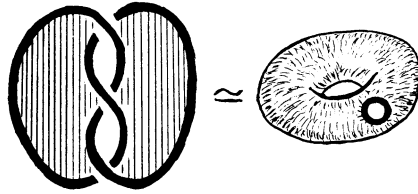


Рисунок 5.5

Теперь мы обсудим два важных способа построения гомеоморфизмов. У этих способов много общего. Гомеоморфизмы обоих типов будем называть *скручивающими*.

Построение скручивающего гомеоморфизма проще всего описать для цилиндра, хотя для него эта конструкция не дает ничего интересного, т.е. полученный гомеоморфизм будет изотопией. Но, например, для тора аналогичная конструкция приводит уже к весьма интересным гомеоморфизмам.

Построение скручивающего гомоморфизма для цилиндра изображено на рис. 5.6 (а). Сначала мы жестко закрепляем основания цилиндра, а сам цилиндр разрезаем по середине. Затем один край разреза тоже закрепляем, а другой край начинаем поворачивать и поворачиваем его до тех пор, пока не совершим полный оборот на 360° . После этого цилиндр склеиваем снова. В результате получим взаимно однозначное отображение цилиндра в цилиндр.

Непрерывность могла бы нарушиться лишь в точках разреза. Но мы, сделав поворот на 360° , возможный разрыв устранили.

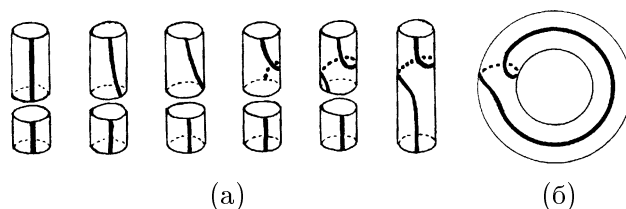


Рисунок 5.6

Для цилиндра полученный гомеоморфизм не очень интересен. Но аналогичным образом можно построить гомеоморфизм тора, рассмотрев часть тора как цилиндр. В результате получим весьма интересный гомеоморфизм тора (рис. 5.6 (б)). С помощью такого рода гомеоморфизмов тора можно перевести незаузленную окружность, расположенную на торе, в трилистник (рис. 5.7). Сначала тремя скручивающими гомеоморфизмами мы переводим эту окружность в окружность, изображенную на рис. 5.7 (в). Заштрихованная на этом рисунке часть тора представляет собой цилиндр. Если для этого цилиндра сделать скручивающий гомеоморфизм, то исходная окружность перейдет в кривую, изображенную на рис. 5.7 (г). Последняя кривая представляет собой трилистник (см. рис. 5.7 (д) и (е)). Таким образом, скручивающие гомеоморфизмы тора не сводятся к изотопиям.

- ▷ **Задача 5.6.** Постройте гомеоморфизм кренделя, переводящий незацепленные окружности (рис. 5.8 (а)) в зацепленные окружности (рис. 5.8 (б)).

На рис. 5.9 показано, как окружность, разделяющую крендель пополам, можно перевести в трилистник с помощью скручивающих гомеоморфизмов. Переход от рис. (б) к рис. (в) совершается посредством изотопии. Переход от

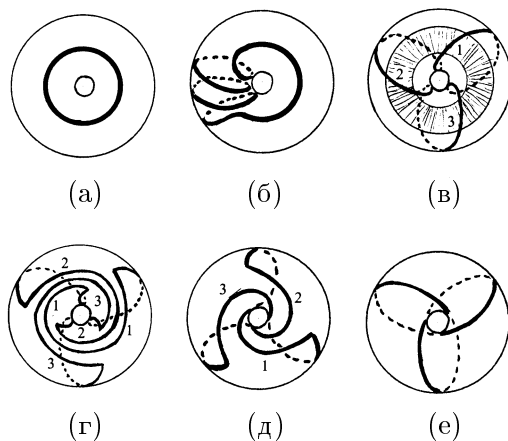


Рисунок 5.7

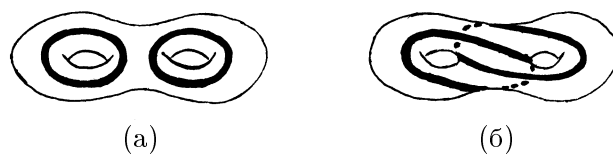


Рисунок 5.8

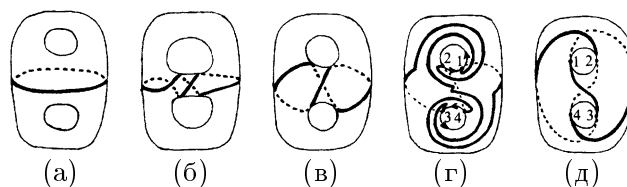


Рисунок 5.9

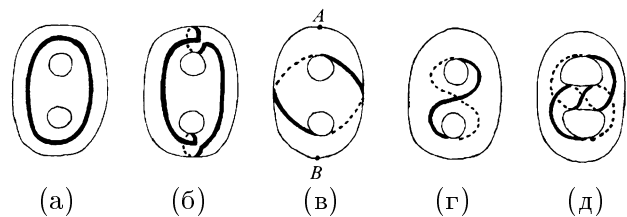


Рисунок 5.10

рис. (в) к рис. (г) аналогичен переходу от рис. 5.7 (б) к рис. 5.7 (в). Перемещая на рис. 5.9 (г) точки 1 и 2, 3 и 4 против часовой стрелки, легко перейти к рис. 5.9 (д). Если ограничиться одной половиной кренделя, то в результате получим гомеоморфизм между тором с вырезанным диском и ориентируемой поверхностью, заклеивающей трилистник.

Трилистник, расположенный на кренделе, можно также получить из кривой, не разбивающей крендель на части (рис. 5.10). Отметим, что при любом гомеоморфизме кривая, не разбивающая крендель, переходит в кривую, не разбивающую крендель. Поэтому трилистник, изображенные на рис. 5.10 (д), не разбивает крендель. Поясним процесс получения трилистника. Сначала делаем два скручивающих гомеоморфизма (рис. (б)). Переход от рис. (б) к рис. (в) делается с помощью изотопии. Чтобы перейти от рис. (в) к рис. (г), нужно взять крендель двумя руками в точках A и B и развернуть его верхнюю и нижнюю части на 180° . Для перехода от рис. (г) к рис. (д) делаем скручивающий гомеоморфизм.

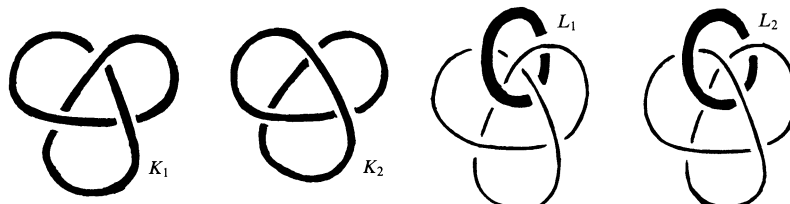


Рисунок 5.11

Рисунок 5.12

Обсудим теперь другой тип скручивающих гомеоморфизмов. На рис. 5.11 изображены диаграммы двух узлов, различающихся лишь одним перекрестком. Один из этих узлов — трилистник, а другой узел представляет собой незаузленную окружность. Предположим, что все пространство заполнено эластичным материалом. Удалим из этого пространства некоторый узел K . В результате

получим фигуру, которую обозначим $\mathbb{R}^3 \setminus K$. Если K_1 и K_2 — узлы, изображенные на рис. 5.11, то фигуры $\mathbb{R}^3 \setminus K_1$ и $\mathbb{R}^3 \setminus K_2$ не гомеоморфны. Доказывать это утверждение мы не будем. Нас будет интересовать другое. Оказывается, если помимо K_1 и K_2 вырезать еще по незаузленной окружности, то можно получить гомеоморфные фигуры. А именно, фигуры $\mathbb{R}^3 \setminus L_1$ и $\mathbb{R}^3 \setminus L_2$ (рис. 5.12) гомеоморфны.

Прежде чем строить гомеоморфизм между $\mathbb{R}^3 \setminus L_1$ и $\mathbb{R}^3 \setminus L_2$, заметим, что вместо кривой можно вырезать ее некоторую окрестность, т.е. вместо окружности можно вырезать тор. Это связано с тем, что круг, из которого выколота точка, гомеоморфен кольцу, из которого удалена внутренняя граничная окружность.

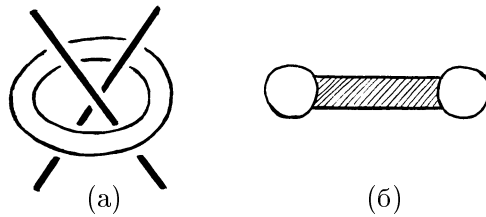


Рисунок 5.13

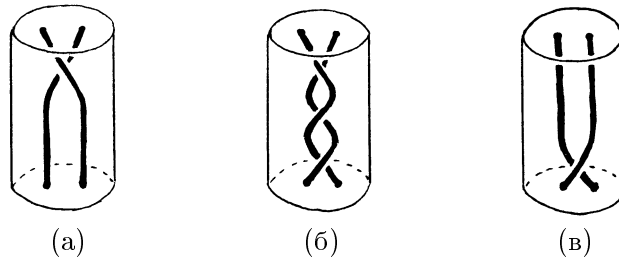


Рисунок 5.14

При построении гомеоморфизма нас будет интересовать лишь область, изображенная на рис. 5.13 (а). Точнее говоря, гомеоморфизм будет затрагивать лишь ци-

линдр, заключенный «внутри» тора; на сечении тора (рис. 5.13 (б)) область, соответствующая этому цилиндру, заштрихована. Нарисуем этот цилиндр отдельно, увеличив для наглядности его высоту (рис. 5.14 (а)).

К остальной части рассматриваемой фигуры $\mathbb{R}^3 \setminus L_1$ примыкают лишь основания цилиндра; его боковая поверхность свободна, т.е. она не примыкает к остальной части фигуры. Разрежем рассматриваемую фигуру по нижнему основанию цилиндра. Жестко закрепим верхнее основание цилиндра, а затем повернем его нижнее основание на 360° (рис. 5.14 (б)) и склеим фигуру снова. После этого с помощью изотопии можно перейти от рис. 5.14 (б) к рис. 5.14 (в). В результате мы изменили тип перекрестка, т.е. перешли от фигуры $\mathbb{R}^3 \setminus L_1$ к фигуре $\mathbb{R}^3 \setminus L_2$. Остается проверить, что полученное преобразование — гомеоморфизм. Боковая поверхность цилиндра не граничит с остальной частью фигуры, поэтому точками разрыва могут быть лишь точки нижнего основания. Но мы устранили разрыв, повернув нижнее основание на 360° . Значит, мы действительно построили гомеоморфизм, переводящий $\mathbb{R}^3 \setminus L_1$ в $\mathbb{R}^3 \setminus L_2$.

Вернемся к узлам K_i и зацеплениям L_i , изображенным на рис. 5.11 и 5.12 соответственно. Пусть T_1 и T_2 — окружности, охватывающие перекрестки узлов K_1 и K_2 . Иными словами, зацепление L_i представляет собой объединение K_i и T_i . Фактически мы построили не только гомеоморфизм $f : \mathbb{R}^3 \setminus L_1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus L_2$, но и гомеоморфизм $g : \mathbb{R}^3 \setminus T_1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus T_2$, при котором K_1 отображается в K_2 . Таким образом, гомеоморфизм f допускает продолжение на K_1 . Возникает желание попытаться продолжить f и на окружность T_1 , т.е. построить гомеоморфизм $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, переводящий L_1 в L_2 (символом \mathbb{R}^3 мы обозначили пространство, из которого ничего не вырезано). Проследим, как ведет себя при гомеоморфизме f окружность S , надетая на T_1 (рис. 5.15 (а)). Ее образ при гомеоморфизме f изображен на рис. 5.15 (б). Этот рисунок показы-

вает, что продолжить f на T_1 не удастся. Отметим, что если бы существовал гомеоморфизм $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, переводящий L_1 в L_2 , то, в частности, существовал бы гомеоморфизм $s : \mathbb{R}^3 \setminus K_1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus K_2$. В самом деле, в качестве s можно было бы взять ограничение h на множество $\mathbb{R}^3 \setminus K_1$.

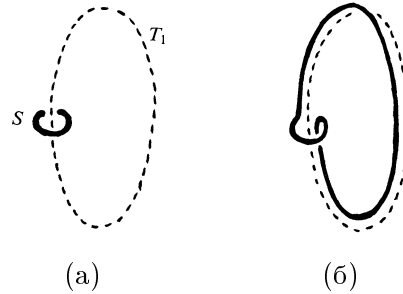


Рисунок 5.15

▷ **Задача 5.7.** а) Докажите, что фигуры, полученные из пространства \mathbb{R}^3 удалением зацеплений, изображенных на рис. 5.16, гомеоморфны.

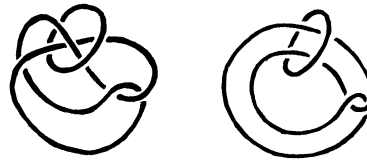


Рисунок 5.16

б) Докажите аналогичное утверждение для зацеплений, изображенных на рис. 5.17.

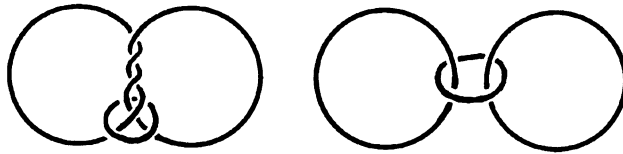


Рисунок 5.17

▷ **Задача 5.8.** Докажите, что любой узел можно развязать, изменяя типы его перекрестков.

Решения

- ▶ 5.1. Любая точка разбивает интервал на две части, а окружность никакая точка не разбивает на части.
- ▶ 5.2. Точка, из которой выходят лучи, разбивает образованную ими фигуру на три части.
- ▶ 5.3. Из полуинтервала можно склеить окружность (рис. 5.18).

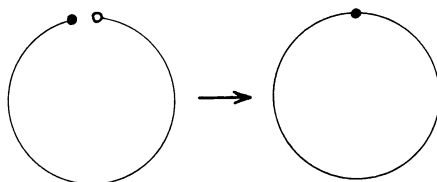


Рисунок 5.18

- ▶ 5.4. Решение изображено на рис. 5.19. Пунктирная часть границ фигур исключена. Непрерывное отображение кольца (с одной точкой на внутреннем крае) в круг, изображенное в нижней части рисунка, строится точно так же, как мы строили в примере 2 гомеоморфизм кольца в круг с выколотой точкой.

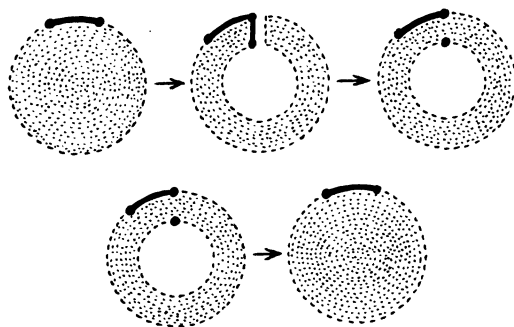


Рисунок 5.19

- 5.5. Рассматриваемую поверхность можно получить, склеив стрелки на границе двух фигур, изображенных на рис. 5.20 (а). Сделаем изотопию одной из них, а другую отразим в плоскости относительно прямой (рис. 5.20 (б)). Пары стрелок a и c теперь можно склеить, а одну из стрелок b можно подвести поближе к другой стрелке с помощью изотопии (рис. 5.20 (в)). Склеив стрелки b , получим фигуру, которую можно продеформировать в тор с вырезанным диском. (Напомним, что эта деформация изображена на рис. 1.8).

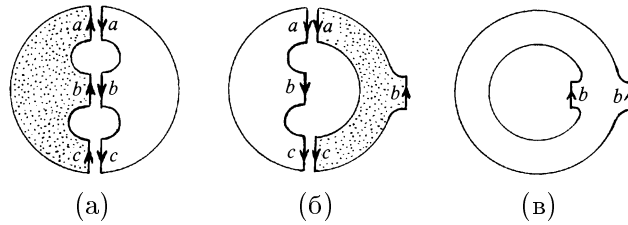


Рисунок 5.20

- 5.6. Требуемый гомеоморфизм получается из скручивающего гомеоморфизма (рис. 5.21) с помощью изотопии.

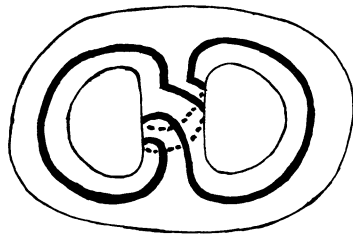


Рисунок 5.21

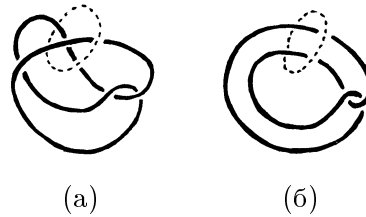


Рисунок 5.22

- 5.7. Будем использовать одну из удаленных кривых для того, чтобы делать скручивающие гомеоморфизмы.

а) С помощью скручивающего гомеоморфизма переходим к рис. 5.22 (а); скручивание при этом делается относительно окружности, изображенной пунктиром.

б) Скручивающий гомеоморфизм нужно применить дважды. Сначала получим зацепление, изображенное на рис. 5.23 (а). Оно изотопно зацеплению, изображенному на рис. 5.23 (б). Сделав еще один скручивающий гомеоморфизм относительно той же самой окружности, получим две незацепленные окружности (рис. 5.23 (в)).

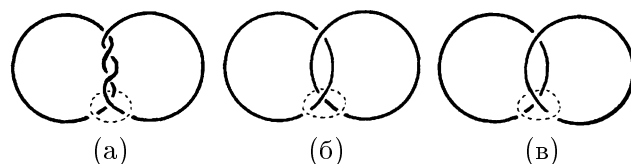


Рисунок 5.23

► 5.8. Рассмотрим диаграмму данного узла K_1 . Пусть l — прямая, лежащая в плоскости диаграммы и не пересекающая диаграмму. Будем двигать прямую l по направлению к диаграмме до тех пор, пока она не коснется диаграммы в некоторой точке P (рис. 5.24). Возьмем в пространстве отрезок AB , проецирующийся в точку P .

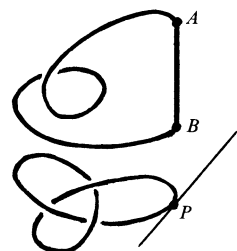


Рисунок 5.24

Можно считать, что точка A лежит выше точки B . Рассмотрим траекторию точки, равномерно опускающейся из точки A в точку B , но не вертикально, а так, чтобы двигаться над точками диаграммы, отличными от точки P . Эта траектория вместе с отрезком AB составляет некоторый узел K_2 , причем его можно получить из исходного узла K_1 заменой типов перекрестков. Легко проверить, что кривая K_2 незаузлена. В самом деле, ее проекция на плоскость, перпендикулярную прямой l , не имеет точек самопересечения.

6

Векторные поля на плоскости

Пусть в каждой точке плоскости (или части плоскости) задан вектор, причем координаты вектора непрерывно зависят от точки (рис. 6.1). Тогда говорят, что на плоскости задано *непрерывное векторное поле*. Точку, в которой задан нулевой вектор, называют *особой* точкой векторного поля. Мы будем рассматривать лишь векторные поля с конечным числом особых точек.

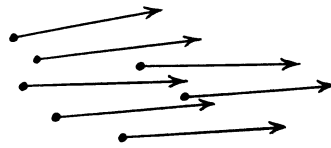


Рисунок 6.1

Совершим обход вокруг особой точки по некоторому несамопересекающемуся пути, не содержащему внутри себя других особых точек. Для каждой точки, через которую мы проходим, рассмотрим соответствующий ей вектор и перенесем его в некоторую фиксированную точку. В процессе обхода он будет вращаться вокруг фиксированной точки, возможно, меняя при этом длину. Посмотрим, сколько оборотов совершает этот вектор при полном обходе вокруг особой точки. Каждому обороту вектора припишем знак плюс, если направление вращения вектора совпадает с направлением обхода, и знак минус, если направление вращения вектора противоположно направлению обхода. Общее количество оборотов вектора с

учетом знака (т.е. разность между количеством положительных и отрицательных оборотов) называют *индексом* особой точки.

Индекс не зависит от направления обхода. Но пока непонятно, зависит ли он от пути обхода. Чуть позже мы докажем, что от пути обхода индекс не зависит. А пока разберем несколько примеров.

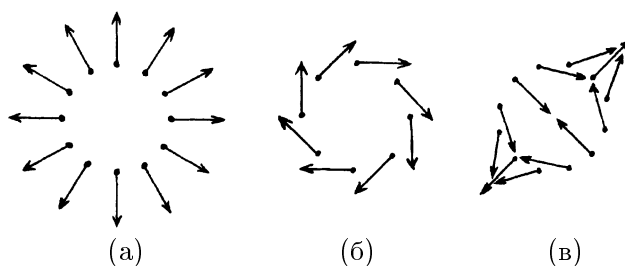


Рисунок 6.2

Рассмотрим на плоскости векторные поля a , b и c , где $a(x, y) = (x, y)$, $b(x, y) = (y, -x)$, $c(x, y) = (y, x)$ (рис. 6.2). Каждое из этих векторных полей имеет лишь одну особую точку, а именно, начало координат. Пусть φ — угол поворота от оси Ox до вектора (x, y) ; α , β и γ — углы поворотов от оси Ox до векторов a , b и c соответственно. Углы α , β и γ зависят лишь от φ . При этом $\alpha(\varphi) = \varphi$, $\beta(\varphi) = \varphi - 90^\circ$, $\gamma(\varphi) = 90^\circ - \varphi$. При обходе вокруг начала координат по окружности $x^2 + y^2 = 1$ углы α , β и γ изменяются на 360° . Направление изменения углов α и β совпадают с направлением изменения угла φ , а направление изменения угла γ противоположно ему. Следовательно, для векторных полей a и b индекс начала координат равен 1, а для векторного поля c индекс начала координат равен -1 .

Векторное поле удобно представлять себе как поле скоростей, описывающее движение всех точек плоскости. Иными словами, каждая точка плоскости движется по некоторой траектории, а векторное поле состоит из векто-

ров скоростей движения этих точек. При этом скорость движения точки полностью определяется ее местоположением, т.е. поле скоростей не зависит от времени.

- ▷ **Задача 6.1.** Докажите, что в случае векторных полей a , b и c траекториями движения точек, отличных от начала координат, будут соответственно лучи, окружности и ветви гипербол.
- ▷ **Задача 6.2.** Найдите индексы векторных полей, траектории которых изображены на рис. 6.3.

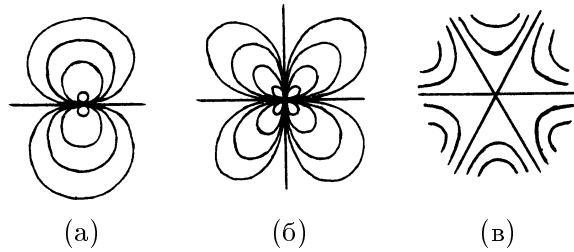


Рисунок 6.3

- ▷ **Задача 6.3.** Существует ли векторное поле с траекториями, изображенными на рис. 6.4?

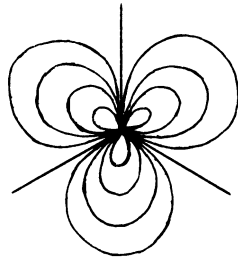


Рисунок 6.4

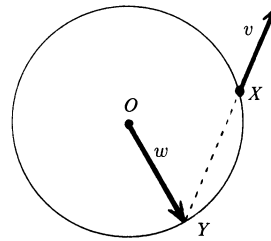


Рисунок 6.5

Напомним, что *комплексной плоскостью* называют множество точек плоскости, отождествленное с множе-

ством комплексных чисел. Точка с координатами (x, y) отождествляется при этом с числом $x + iy$.

▷ **Задача 6.4.** Рассмотрим на комплексной плоскости векторное поле $v(z) = \frac{z^n}{|z|^{n-1}}$ при $z \neq 0$, $v(0) = 0$. Найдите индексы особых точек таких векторных полей для всех целых n и нарисуйте их траектории.

▷ **Задача 6.5.** Назовем векторное поле v четным, если $v(x) = v(-x)$, и нечетным, если $v(x) = -v(-x)$. Докажите, что индекс точки O для четного поля четен, а для нечетного поля нечетен.

▷ **Задача 6.6.** В каждой точке X некоторой окружности задан вектор $v(X)$, непрерывно зависящий от X . Прямая, содержащая этот вектор, пересекает окружность в точках X и Y (рис. 6.5). При полном обходе окружности вектор v делает n оборотов. Сколько оборотов делает при этом вектор $w = \overrightarrow{OY}$, где O — центр окружности?

Докажем теперь, что индекс особой точки не зависит от пути обхода. Индекс — целое число, поэтому он может изменяться лишь скачком, не менее чем на 1; изменяться непрерывно индекс не может. При непрерывном изменении пути обхода скачок индекса может произойти лишь в том случае, когда путь проходит через особую точку. Но мы рассматриваем лишь пути, которые содержат внутри ровно одну особую точку и не проходят через особые точки. Любые два таких пути, содержащих одну и ту же особую точку, можно продеформировать друг в друга, не задевая при этом особых точек.

▷ **Задача 6.7.** Замкнутая самопересекающаяся кривая разбивает плоскость на несколько областей (рис. 6.6). В каждой области можно выбрать некоторую точку O и сопо-

ставить области число оборотов вектора \overrightarrow{OX} при обходе кривой. Докажите, что если две области имеют общую границу, то соответствующие им числа отличаются на 1.

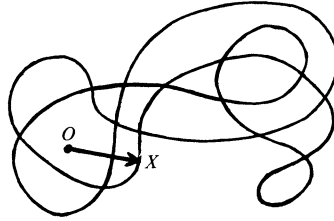


Рисунок 6.6

Пусть замкнутая несамопересекающаяся кривая γ не проходит через особые точки векторного поля v . Тогда можно определить *индекс* этой кривой как число оборотов вектора $v(X)$ при обходе кривой γ . Обороты вектора считаются положительными, если их направление совпадает с направлением обхода кривой.

Теорема 6.1. *Индекс кривой γ равен сумме индексов особых точек, заключенных внутри ее.*

Доказательство. Выберем в качестве оси Ox прямую, не перпендикулярную ни одной из прямых, соединяющих пары данных точек, и соединим рассматриваемые особые точки в порядке возрастания координаты x (рис. 6.7).

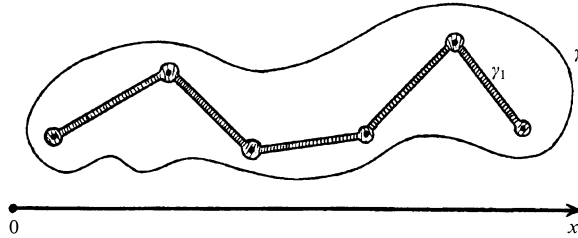


Рисунок 6.7

Кривая γ изотопна кривой γ_1 , близкой к полученной ломаной (на рис. 6.7 заштрихована область, содержащаяся внутри γ_1). В процессе изотопии от γ к γ_1 кривые не проходят через особые точки, поэтому индексы кривых γ

и γ_1 равны. Кривая γ_1 состоит из дуг окружностей с центрами в особых точках и отрезков, близких к отрезкам, соединяющим особые точки. Если пройти по отрезку AB сначала от A к B , а затем от B к A , то в обоих случаях абсолютные величины углов поворота вектора $v(X)$ будут равны, но направления углов поворота будут противоположны. Следовательно, части кривой γ_1 , близкие к отрезкам, дают нулевой вклад в индекс, так как они проходятся в противоположных направлениях. В итоге вклад в индекс кривой γ_1 дают лишь особые точки.

Во всех этих рассуждениях мы предполагаем, что кривая γ_1 достаточно близка к рассматриваемой ломаной.

Следствие. *Если индекс замкнутой несамопересекающейся кривой отличен от нуля, то внутри ее есть по крайней мере одна особая точка.*

Именно со следствием теоремы 6.1 связаны наиболее важные применения индекса особой точки. Приведем три примера использования этого следствия (теоремы 6.2–6.4).

Теорема 6.2. *Пусть f — непрерывное отображение круга D^2 в плоскость, причем каждая точка граничной окружности S^1 отображается сама в себя. Тогда некоторая точка круга D^2 отображается в его центр.*

Доказательство. Рассмотрим на D^2 векторное поле

$$v(X) = \overrightarrow{Of(X)},$$

где O — центр круга (рис. 6.8). На окружности S^1 получим при этом такое же векторное поле, какое изображено на рис. 6.2 (а). Следовательно, индекс кривой S^1 равен 1, а значит, внутри S^1 есть особая точка X_0 . Равенство $v(X_0) = 0$ эквивалентно тому, что $f(X_0) = O$, т.е. точка X_0 отображается в центр круга.

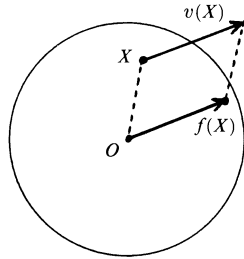


Рисунок 6.8

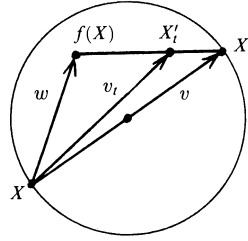


Рисунок 6.9

Теорема 6.3. Пусть f — непрерывное отображение круга D^2 в себя. Тогда $f(X_0) = X_0$ для некоторой точки X_0 , т.е. f имеет неподвижную точку X_0 .

Доказательство. Рассмотрим на круге D^2 векторное поле $w(X) = \overrightarrow{Xf(X)}$. Предположим, что у отображения f нет неподвижных точек, т.е. у векторного поля w нет особых точек. На граничной окружности можно также рассмотреть векторные поля v и v_t ($0 \leq t \leq 1$), построение которых видно из рис. 6.9: точка X' диаметрально противоположна точке X , а точка X'_t делит отрезок $f(X)X'$ в отношении $f(X)X'_t : X'_tX = t : (1-t)$. Будем считать, что $X'_0 = f(X)$ и $X'_1 = X'$. Все векторы v_t ненулевые, поэтому можно рассмотреть число $n(t)$ — индекс граничной окружности относительно векторного поля $v(t)$. Число $n(t)$ целое и оно непрерывно зависит от t . Следовательно, $n(0) = n(1) = 1$. Но это означает, что векторное поле w имеет особую точку. Получено противоречие.

По ходу доказательства теоремы 6.3 мы фактически доказали следующее утверждение, которым нам еще придется воспользоваться в дальнейшем.

Лемма 6.1. Пусть на замкнутой несамопересекающейся кривой заданы векторные поля v и w , причем в любой точке X векторы $v(X)$ и $w(X)$ не противоположны

по направлению. Тогда индексы кривой γ относительно этих векторных полей равны.

Доказательство. Обратимся к рис. 6.9. Вектор v_t может быть нулевым лишь в том случае, когда векторы v и w противоположны по направлению.

Теорема 6.4 (Основная теорема алгебры). *Любой многочлен $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень.*

Доказательство. Рассмотрим на комплексной плоскости векторные поля $v(z) = z^n$ и $w(z) = P(z)$. Докажем сначала, что при достаточно больших R для всех точек окружности, заданной уравнением $|z| = R$, выполняется неравенство $|w(z) - v(z)| < |v(z)|$. Пусть a — наибольшее из чисел $|a_1|, \dots, |a_n|$. Тогда

$$\begin{aligned} |w(z) - v(z)| &= |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| \leq \\ &\leq |a_1| R^{n-1} + \dots + |a_n| \leq n a R^{n-1} \end{aligned}$$

при $R > 1$. Так как $|v(z)| = R^n$, то $|w - v| < |v|$ при $R > na + 1$.

Из неравенства $|w - v| < |v|$ следует, что векторы v и w не могут быть противоположно направлены. Поэтому индекс окружности $|z| = R$ относительно поля w равен ее индексу относительно поля v . Последний индекс равен n (см. решение задачи 6.4). Поэтому индекс окружности $|z| = R$ относительно векторного поля $w(z) = P(z)$ равен n . Следовательно, внутри ее есть особые точки, в которых $P(z)$ обращается в нуль.

Основную идею доказательства теоремы 6.4 наглядно можно представить следующим образом. Если число R достаточно велико, то длина вектора $w - v$ во много раз меньше длины вектора v (рис. 6.10). Вектор v совершает

n оборотов, поэтому вектор w , очень близкий к нему, тоже совершает n оборотов.

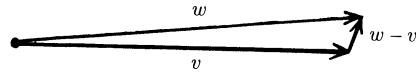


Рисунок 6.10

- ▷ **Задача 6.8.** Пусть f — непрерывное отображение круга D^2 с центром O в плоскость, причем если точки A и B симметричны относительно точки O , то точки $f(A)$ и $f(B)$ тоже симметричны относительно точки O . Докажите, что некоторая точка круга отображается в точку O .

Посмотрим теперь, что происходит, когда векторное поле изменяется внутри некоторой окружности. Отметим, прежде всего, что индекс окружности сохраняется, так как на ней векторы не изменяются. Поэтому при слиянии нескольких особых точек в одну получается особая точка, индекс которой равен сумме их индексов. Например, при слиянии двух особых точек с индексом 1 получается особая точка с индексом 2 (рис. 6.11). Слияние трех особых точек с индексом 1 можно представить следующим образом. Область, заштрихованная на рис. 6.12 (а), пережимается, и в результате из нее получаются две области. При добавлении других особых точек с индексом 1 происходит аналогичное пережимание одной из областей.

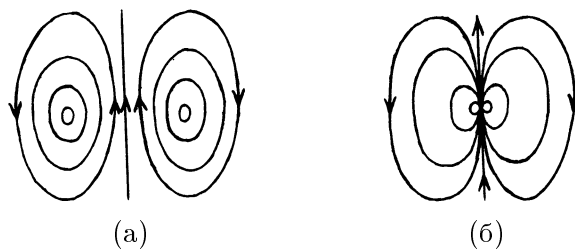


Рисунок 6.11

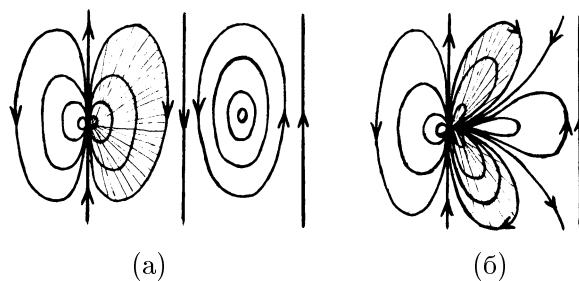


Рисунок 6.12

При слиянии двух особых точек с индексом -1 пережимается область, заштрихованная на рис. 6.13 (а). В результате переходим к рис. 6.13 (б). При добавлении других особых точек с индексом -1 происходит аналогичное пережимание областей (рис. 6.14).

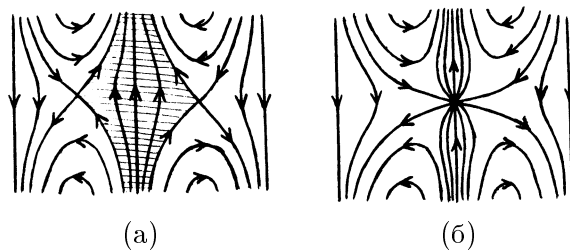


Рисунок 6.13

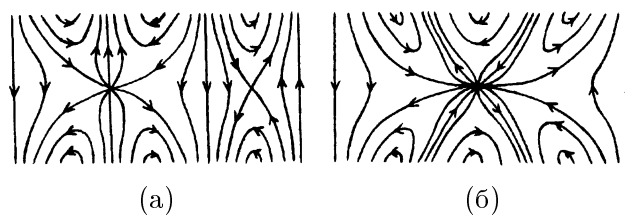


Рисунок 6.14

При слиянии двух особых точек с индексами 1 и -1 получается особая точка с индексом 0 . Такую особую

точку можно «устранить». Задачи 6.9 и 6.10 дают две различные интерпретации устранения особой точки.

- ▷ **Задача 6.9.** Измените траектории векторного поля, изображенные на рис. 6.15, так, чтобы вне окружности S_2 траектории не изменились, а внутри окружности S_1 они стали параллельными отрезками. При этом должно получиться векторное поле без особых точек.

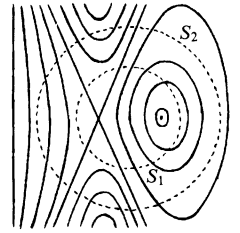


Рисунок 6.15

- ▷ **Задача 6.10.** Измените траектории того же векторного поля так, чтобы внутри S_1 траектории не изменились, а вне S_2 они стали параллельными лучами или прямыми. Между S_1 и S_2 при этом не должно быть особых точек.

В задачах 6.9 и 6.10 фактически идет речь о построении на кольце векторного поля без особых точек в том случае, когда векторное поле задано на граничных окружностях кольца. Иными словами, речь идет о продолжении без особых точек векторного поля, заданного на границе. Вот еще одна задача такого рода.

- ▷ **Задача 6.11.** Продолжите без особых точек на все кольцо векторное поле, изображенное на рис. 6.16. Нарисуйте его траектории.

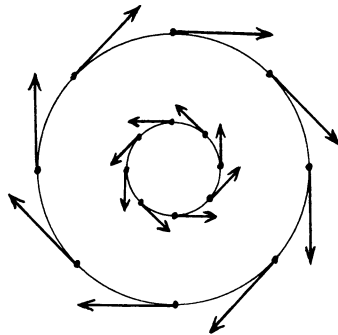


Рисунок 6.16

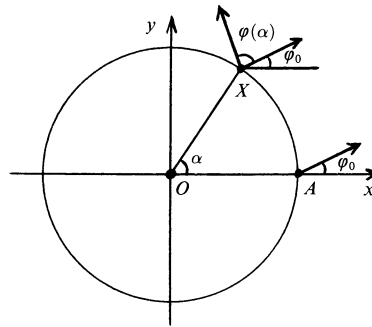


Рисунок 6.17

Задачи 6.9–6.11 являются частными случаями следующего утверждения.

Теорема 6.5. *Векторное поле без особых точек, заданное на граничных окружностях кольца, можно продолжить на все кольцо тогда и только тогда, когда индексы граничных окружностей равны.*

Доказательство. Предположим сначала, что векторное поле, заданное на граничных окружностях кольца, можно продолжить на все кольцо. Внешнюю окружность кольца с помощью гомотетии можно продеформировать во внутреннюю окружность. В процессе деформации окружность не проходит через особые точки, поэтому индексы внутренней и внешней окружностей равны.

Предположим теперь, что на граничных окружностях задано векторное поле, причем индексы граничных окружностей равны. Требуется продолжить векторное поле на все кольцо. Для произвольного векторного поля, заданного на окружности, построим график следующим образом. Для каждого угла α определим $\varphi(\alpha)$ — угол между векторами, заданными в точках X и A (рис. 6.17); при этом $\varphi(0) = 0$. Построим график функции $\varphi(\alpha)$ на отрезке $[0, 2\pi]$. Он проходит через начало координат и точку с координатами $(2\pi, 2k\pi)$,

где k — индекс окружности относительно данного векторного поля. Такие графики построим для двух рассматриваемых векторных полей, заданных на граничных окружностях. Эти графики можно следующим образом соединить непрерывным семейством графиков. Пусть прямая, параллельная оси Oy , пересекает первый график в точке A_1 , а второй график в точке A_2 (рис. 6.18). Будем считать, что в момент времени t гра-

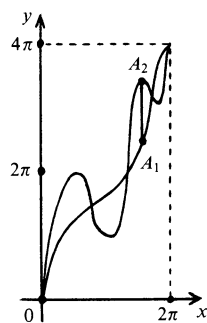


Рисунок 6.18

фик делит отрезок A_1A_2 в отношении $t : (1 - t)$. Тогда в моменты $t = 0$ и $t = 1$ получаем соответственно первый и второй графики, а при изменении t от 0 до 1 первый график непрерывно переходит во второй. В результате для всех t и α , где $0 \leq t \leq 1$ и $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, определены значения $\varphi(t, \alpha)$. Исходные графики соответствуют функциям $\varphi(0, \alpha)$ и $\varphi(1, \alpha)$. С помощью функции $\varphi(t, \alpha)$ можно построить векторное поле на кольце. Чтобы задать ненулевой вектор, достаточно задать его длину и угол, который он образует с лучом Ox . Будем считать, что на принадлежащем кольцу отрезке луча с началом в центре кольца длина вектора равномерно изменяется от длины вектора на первой граничной окружности до длины вектора на второй граничной окружности. Исходя из рис. 6.17, угол, который вектор образует с лучом Ox , определим как сумму углов $\varphi(t, \alpha)$ и $\varphi_{0,t}$, где угол $\varphi_{0,t}$, соответствующий углу φ_0 на рис. 6.17, равномерно изменяется от угла $\varphi_{0,0}$ до угла $\varphi_{0,1}$. Построенное векторное поле обладает требуемыми свойствами.

Наряду с векторными полями можно рассматривать и поля направлений. Пусть в каждой точке плоскости (или части плоскости) задана прямая, причем направления прямых непрерывно зависят от точки, т.е. углы между прямыми, заданными в достаточно близких точках, малы. Тогда говорят, что на плоскости задано *непрерывное поле направлений*.

Для поля направлений тоже можно рассмотреть траектории — кривые, у которых в каждой точке касательная является прямой поля направлений, заданной в этой точке.

Любому векторному полю без особых точек можно сопоставить поле направлений, взяв вместо вектора содержащую его прямую. Обратную операцию проделать можно не всегда. В самом деле, исключим из плоскости точку O и рассмотрим в оставшейся части плоскости поле направлений, изображенное на рис. 6.19 (предполагается,

что во всех точках луча, выходящего из точки O , заданы параллельные прямые). Как видно из того же рисунка, попытка построить векторное поле по этому полю направлений не увенчается успехом.

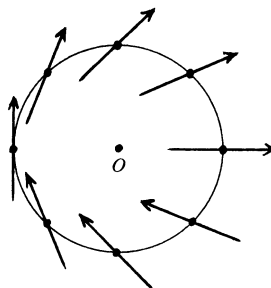


Рисунок 6.19

- ▷ **Задача 6.12.** Докажите, что по любому непрерывному полю направлений, заданному на всей плоскости, можно построить непрерывное векторное поле.
- ▷ **Задача 6.13.** Существует ли в трехмерном пространстве с одной выколотой точкой поле направлений, по которому нельзя построить векторное поле?

Решения

- ▶ **6.1.** Если $(x(t), y(t))$ — траектория векторного поля a , то

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t), \quad \frac{dy(t)}{dt} = y(t).$$

Поэтому $x(t) = pe^t$ и $y(t) = qe^t$, а значит, $qx = py$ и каждая траектория целиком лежит в одном из квадрантов. Следовательно, траекториями являются лучи, выходящие из начала координат. Отдельной траекторией является также само начало координат.

Для траекторий векторного поля b получаем уравнения

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

В полярных координатах $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ эти уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} &= r \sin \varphi, \\ \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} &= -r \cos \varphi.\end{aligned}$$

Решая эту систему линейных уравнений относительно $\frac{dr}{dt}$ и $\frac{d\varphi}{dt}$, получаем $\frac{dr}{dt} = 0$ и $\frac{d\varphi}{dt} = 1$. Следовательно, $x = R \cos(t + t_0)$ и $y = R \sin(t + t_0)$, где R и t_0 — константы.

Для траекторий векторного поля s получаем уравнения

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

Сделаем замену переменных $u = x + y$, $v = x - y$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = y + x = u, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = y - x = -v.\end{aligned}$$

Поэтому $u = pe^t$, $v = qe^{-t}$, а значит, $u = \frac{pq}{v}$. В координатах Ouv траектории являются ветвями гипербол $u = \frac{c}{v}$ (рис. 6.20) или лучами с началом в точке O , лежащими на осях координат.

► **6.2.** Ответ: а) 2; б) 3; в) -2.

► **6.3.** Если попытаться задать направления движения на траекториях, изображенных на рис. 6.4, то придем к противоречию (рис. 6.21).

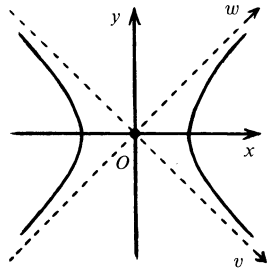


Рисунок 6.20

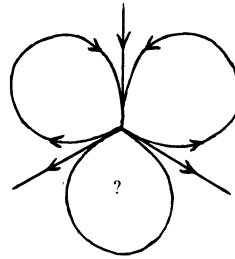


Рисунок 6.21

- **6.4.** Пусть $z = Re^{i\varphi}$. Тогда $v(z) = Re^{in\varphi}$. При изменении φ от 0 до 2π число $n\varphi$ изменяется от 0 до $2n\pi$, т.е. вектор $v(z)$ делает n оборотов. Следовательно, индекс векторного поля v равен n .

Нарисовать траектории векторного поля вам поможет рис. 6.3.

- **6.5.** Для четного векторного поля при обходе половины окружности вектор v поворачивается на $2k\pi$, а для нечетного на $(2k + 1)\pi$.
- **6.6.** Обратимся к рис. 6.22. Пусть α и $\varphi(\alpha)$ — углы между осью Ox и векторами \vec{OX} и v . Тогда $\angle ZOY = 2\angle ZXY = 2\varphi(\alpha)$ и $\angle IOY = 2\varphi(\alpha) - \alpha$. Следовательно, если вектор v совершает n оборотов, то вектор w совершает $2n - 1$ оборот.
- **6.7.** Отметим, прежде всего, что внутри каждой области число оборотов непрерывно зависит от точки, поэтому внутри области оно постоянно.

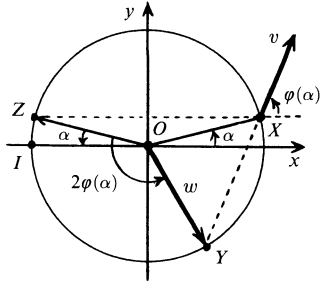


Рисунок 6.22

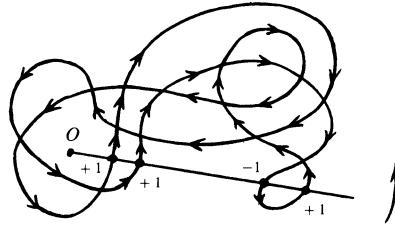


Рисунок 6.23

Число оборотов вектора \overrightarrow{OX} при обходе кривой можно вычислять следующим образом. Проведем из точки O луч, не касающийся кривой. Точкам пересечения луча с кривой сопоставим числа ± 1 в соответствии с тем, происходит ли в них движение по кривой справа налево или слева направо (рис. 6.23). Тогда число оборотов с учетом знака равно сумме этих чисел. Иными словами, если вы находитесь в фиксированной точке, а вокруг вас бегают собака, то для того, чтобы узнать, сколько раз она вокруг вас обежала, не нужно все время следить за ней. Достаточно смотреть в одном направлении и считать, сколько раз собака пробегает мимо в одном направлении и сколько в другом.

Точки A и B внутри соседних областей можно выбрать так, чтобы отрезок AB пересекал границу ровно в одной точке. Для луча AB и луча, идущего из точки B в направлении луча AB , описанная выше сумма чисел различается лишь одним числом, стоящим в точке пересечения отрезка AB с границей областей.

- **6.8.** Будем считать, что центр круга совпадает с началом координат на плоскости. Сопоставим каждой точке X круга D^2 вектор $\overrightarrow{Of(X)}$. Предположим, что все эти векторы ненулевые. Тогда определен индекс граничной окружности, причем он нечетен, так как полученное векторное поле нечетно (см. задачу 6.5). Следовательно, вну-

три круга есть особая точка X , для которой $\overrightarrow{Of(X)} = \vec{0}$. Получено противоречие. Таким образом, внутри круга или на его границе есть особая точка X , для которой $\overrightarrow{Of(X)} = \vec{0}$, т.е. $f(X) = O$.

► 6.9. См. рис. 6.24.

► 6.10. См. рис. 6.25.

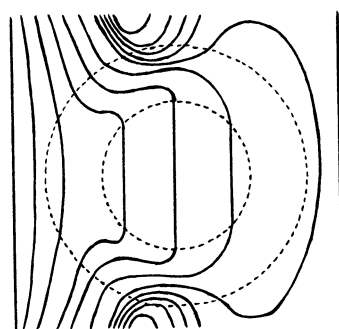


Рисунок 6.24

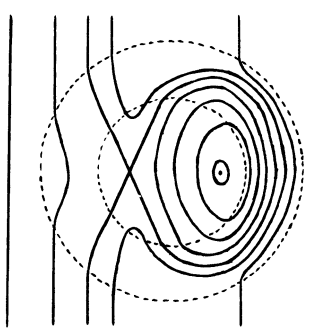


Рисунок 6.25

► 6.11. Траектория требуемого векторного поля изображена на рис. 6.26. Само векторное поле получается вращением векторов при движении по отрезкам радиусов, заключенным между граничными окружностями. При перемещении из одного конца отрезка в другой происходит поворот на 180° .

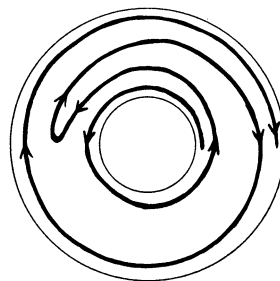


Рисунок 6.26

► 6.12. Выберем в плоскости фиксированную точку O . Заданной в точке O прямой соответствуют два единичных вектора; выберем один из них. Тогда в любой точке A единичный вектор на заданной в A прямой можно выбрать,

двигаясь по отрезку OA из O в A и выбирая в каждой точке X отрезка OA один из двух единичных векторов на заданной в точке X прямой.

Для плоскости с выколотой точкой этой конструкцией нельзя воспользоваться, потому что отрезок OA может проходить через выколотую точку.

► **6.13.** Ответ: нет, не существует.

Векторное поле по полю направлений в трехмерном пространстве можно построить почти так же, как и в задаче 6.12. Но переносить векторное поле по отрезку OA уже не удастся, так как он может проходить через выколотую точку. Векторы нужно переносить по путям, идущим из O в A и не проходящим через выколотую точку. Для этого приходится рассматривать криволинейные пути. Но тогда возникает вопрос о совпадении результатов переноса по разным путям. Этот вопрос не праздный; рис. 6.19 показывает, что для плоскости с выколотой точкой результаты переноса векторов по разным путям могут быть разными. Но в трехмерном пространстве с выколотой точкой любой замкнутый путь можно стянуть в точку, не задевая при этом выколотую точку. Именно это свойство приводит к совпадению результатов переноса по разным путям. В самом деле, если переносы вектора по двум разным путям приводят к разным результатам, то при обходе замкнутого пути, составленного из них, вектор должен переходить в противоположный вектор. Это свойство должно сохраняться в процессе стягивания пути в точку. С другой стороны, для пути, стянутого в точку, оно выполняться не может.

7

Векторные поля на двумерных поверхностях

По аналогии с векторными полями на плоскости можно ввести понятие *векторного поля на сфере*. Сопоставим каждой точке сферы некоторый вектор в трехмерном пространстве. Для векторного поля на плоскости не нужно было заботиться о том, чтобы его траектории оставались на плоскости. Но для векторного поля на сфере позаботиться об этом необходимо, а именно, нужно потребовать, чтобы заданные на сфере векторы касались ее. Будем говорить, что на сфере задано непрерывное векторное поле, если в каждой ее точке задан касательный вектор, причем эти векторы непрерывно зависят от точки.

Приведем два примера векторных полей на сфере.

Пример 1. Рассмотрим вращение сферы с некоторой угловой скоростью вокруг оси, проходящей через центр сферы. На сфере при этом возникает векторное поле скоростей движения точек (рис. 7.1). У этого векторного поля есть две особые точки, а именно, точки пересечения сферы и оси вращения. Индексы обеих особых точек равны 1.

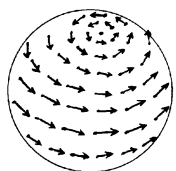


Рисунок 7.1

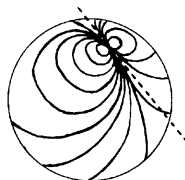


Рисунок 7.2

Пример 2. На сфере можно построить и векторное поле с одной особой точкой. Его траектория — сечения сферы плоскостями, проходящими через фиксированную касательную к сфере (рис. 7.2). Индекс особой точки равен 2.

В обоих примерах сумма индексов особых точек равна 2. Это не случайное совпадение.

Теорема 7.1. Пусть число особых точек непрерывного векторного поля на сфере конечно. Тогда сумма их индексов равна 2.

Первое доказательство. Сферу можно разделить на две части кривой, не содержащей особых точек. Для наших целей достаточно было бы рассмотреть произвольную замкнутую кривую на сфере, не проходящую через особые точки. Но докажем несколько более сильное утверждение, а именно, докажем, что если на сфере дано конечное множество точек, то существует окружность большого круга (т.е. сечение сферы плоскостью, проходящей через центр), не проходящее ни через одну из данных точек. Рассмотрим соответствие $\{A, A^*\} \leftrightarrow a$, где A и A^* — диаметрально противоположные точки сферы, a — сечение сферы плоскостью, перпендикулярной прямой AA^* и проходящей через центр сферы. Легко проверить, что точка A принадлежит плоскости b (где $b \leftrightarrow \{B, B^*\}$) тогда и только тогда, когда точка B принадлежит плоскости a .

Пусть A_1, \dots, A_n — данные точки. Им сопоставляются окружности большого круга a_1, \dots, a_n . Существует точка M не принадлежащая ни одной из этих окружностей. Ни одна из данных точек не лежит на окружности m , соответствующей точке M .

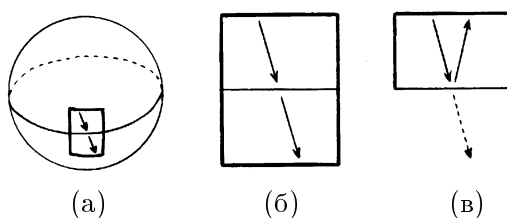


Рисунок 7.3

Представим сферу как воздушный шарик. Выпустив воздух, сферу можно сплющить так, чтобы обе части, на которые рассматриваемая окружность большого круга делит сферу, совпали друг с другом и имели при этом форму круга. Выделим окрестность точки большого круга и посмотрим, что с ней происходит. Рис. 7.3 показывает, что на граничной окружности векторы двух полей симметричны друг другу относительно касательной. Остается доказать следующее несложное утверждение, которое мы сформулируем в виде задачи.

- ▷ **Задача 7.1.** Векторные поля v и w таковы, что на окружности S у них нет особых точек и в каждой точке X этой окружности векторы $v(X)$ и $w(X)$ симметричны относительно касательной. Докажите, что сумма индексов особых точек полей v и w , лежащих внутри окружности, равна 2.

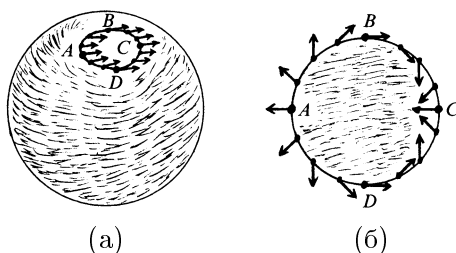


Рисунок 7.4

Второе доказательство. Возьмем произвольную неособую точку векторного поля на сфере и выберем ее окрестность столь малой, что все векторы в ней почти одинаковые (рис. 7.4 (а)). Окрестность не содержит особых точек, поэтому достаточно рассмотреть остальную часть сферы. Ее можно продеформировать в круг (рис. 7.4 (б)). При этом получим векторное поле, направленное на дугах BC и CD внутрь окружности, а на дугах DA и AB наружу. Индекс окружности относительно полученного векторного поля равен 2. В самом деле, при обходе каждой из дуг AB , BC , CD , DA вектор поворачивается на 180° , причем направление поворота вектора совпадает с направлением обхода.

В качестве примера использования теоремы 7.1 докажем *теорему Декарта–Эйлера* о выпуклых многогранниках.

Теорема 7.2. Пусть V — число вершин выпуклого многогранника, P — число его ребер, Γ — число граней. Тогда

$$V - P + \Gamma = 2.$$

Доказательство. Поместим многогранник внутрь сферы так, чтобы он содержал ее центр, и спроецируем ребра многогранника на сферу из ее центра. На сфере возникает при этом криволинейная сеть. Выберем внутри каждой сферической грани по точке и соединим на сфере точки соседних граней путями, проходящими через середины их общих ребер. На рис. 7.5 (а) новая сеть изображена пунктиром. Рассмотрим на сфере сеть, составленную из этих двух сетей, и нарисуем на ее ребрах стрелки, выходящие из выбранных точек граней и входящие в вершины. Полученную сеть можно включить в систему траекторий векторного поля (рис. 7.5 (б)). Вид траектории в окрестности вершины, выбранной точки грани и середины ребра показан на рис. 7.6 (а), (б) и (в) соответственно. Других

особых точек у построенного векторного поля нет, поэтому сумма индексов его особых точек равна $B - P + G$. Согласно теореме 7.1 это число равно 2.

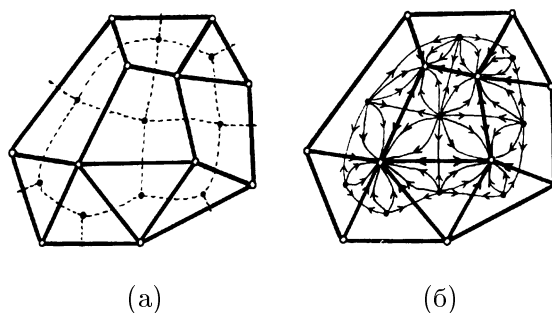


Рисунок 7.5

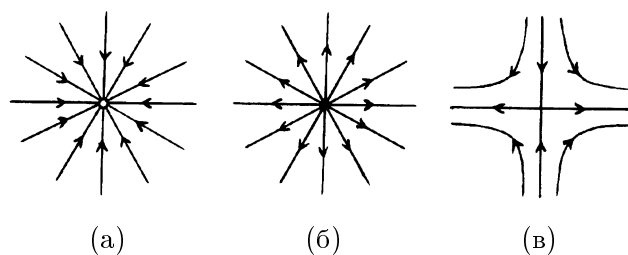


Рисунок 7.6

► **Задача 7.2.** Каждой точке X сферы сопоставлен некоторый ненулевой вектор $v(X)$ трехмерного пространства. Вектор v непрерывно зависит от точки сферы, но он не обязательно касается сферы. Докажите, что хотя бы один из векторов $v(X)$ перпендикулярен касательной плоскости в точке X .

Векторные поля можно рассматривать не только на сфере, но и на других двумерных поверхностях. Одна из двумерных поверхностей изображена в разных видах на рис. 7.7. Ее называют *сферой с тремя ручками*; происхождение такого названия поясняет рис. 7.7 (б). Аналогично можно определить *сферу с g ручками*. На сфере с g

ручками мы тоже будем рассматривать векторные поля, состоящие лишь из касательных векторов.

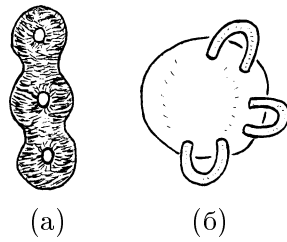


Рисунок 7.7

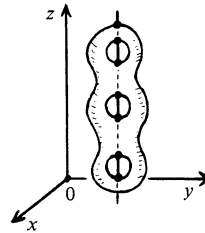


Рисунок 7.8

Можно считать, что сфера с g ручками имеет ось симметрии, параллельную оси Oz (рис. 7.8). Рассмотрим на этой поверхности векторное поле, траектории которого лежат в плоскостях $z = c$. Особые точки этого векторного поля — точки пересечения поверхности

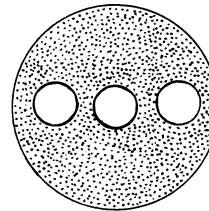


Рисунок 7.9

с осью симметрии. Самая высокая и самая низкая из этих точек (т.е. точки с наибольшим и наименьшим значением координаты z) имеют индекс 1, потому что траектории в окрестностях этих точек выглядят как окружности. Остальные особые точки имеют индекс -1 , потому что траектории в окрестностях этих точек выглядят как части гипербол (и части лучей). У рассматриваемого векторного поля две особые точки индекса 1 и $2g$ особых точек индекса -1 , поэтому сумма индексов его особых точек равна $2 - 2g$.

Теорема 7.3. Сумма индексов особых точек непрерывного векторного поля на сфере с g ручками равна $2 - 2g$.

Первое доказательство. Сферу с тремя ручками можно разрезать на две части, каждую из которых можно продеформировать в плоскую фигуру F , изображенную на

рис. 7.9. Аналогично можно разрезать и сферу с g ручками. Если на кривую разреза попадает особая точка, то, слегка изменив кривую, особую точку можно с нее убрать. Поэтому будем считать, что разрез не проходит через особые точки. Сферу с g ручками, как и обычную сферу, можно сплющить так, что ее обе части совпадут с фигурой F . Из векторного поля на сфере с g ручками при этом получатся два векторных поля v и w на фигуре F , причем на всех граничных окружностях векторы $v(X)$ и $w(X)$ симметричны относительно касательной в точке X . Требуется доказать, что сумма индексов особых точек этих векторных полей равна $2 - 2g$. Воспользуемся для этого результатом задачи 7.1. Пусть a и b — индексы внешней окружности относительно векторных полей v и w соответственно, a_1, \dots, a_g и b_1, \dots, b_g — индексы внутренних окружностей относительно этих векторных полей. Тогда $a + b = 2$, $a_1 + b_1 = 2$, \dots , $a_g + b_g = 2$ согласно задаче 7.1. Продолжим векторные поля v и w на круги, ограниченные внутренними окружностями. Сделать это можно, например, с помощью гомотетии с центром в центре круга. Сумма индексов всех особых точек продолжения поля v равна a . С другой стороны, она равна $a_1 + \dots + a_g + A$, где A — сумма индексов особых точек исходного поля v , т.е. тех особых точек, которые принадлежат фигуре F . Следовательно, $a = a_1 + \dots + a_g + A$. Аналогично $b = b_1 + \dots + b_g + B$. Сложив оба равенства, получим

$$a + b = (a_1 + b_1) + \dots + (a_g + b_g) + (A + B),$$

т.е. $A + B = 2 - 2g$, что и требовалось.

Второе доказательство. Рис. 7.10 показывает, как от сферы с g ручками можно перейти к сфере с $g - 1$ ручкой. Для этого нужно разрезать одну ручку (рис. 7.10 (а)), а затем заклеить кривые разреза двумя полусферами (рис. 7.10 (б)).

Для $g = 0$, т.е. для обычной сферы, теорема 7.3 уже доказана (см. теорему 7.1). Предположим, что утверждение теоремы 7.3 доказано для любого непрерывного векторного поля на сфере с $g - 1$ ручкой. Нужно доказать его для сферы с g ручками. Рассмотрим произвольное непре-

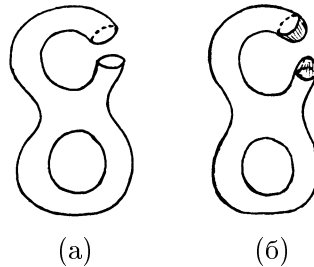


Рисунок 7.10

рерывное векторное поле на сфере с g ручками. Перейдем к сфере с $g - 1$ ручкой, как показано на рис. 7.10. При этом векторное поле не определено на двух полусферах. Но его можно на них непрерывно продолжить, представив полусферу как круг и рассмотрев гомотегию с центром в центре круга. Слегка изменив при необходимости разрез, можно считать, что он не проходит через особые точки. Векторные поля на кривых разреза происходят из одного и того же векторного поля на сфере с g ручками. Поэтому из двух рассматриваемых полусфер с заданными на них векторными полями можно склеить сферу так, что на ней получим непрерывное векторное поле. Следовательно, сумма индексов особых точек на двух полусферах равна 2. Чтобы найти сумму индексов особых точек на остальной части сферы с $g - 1$ ручкой, нужно из суммы индексов всех особых точек векторного поля на сфере с $g - 1$ ручкой вычесть 2. В результате получим $2 - 2(g - 1) - 2 = 2 - 2g$, что и требовалось.

Следствие. Если $g \neq 1$, то на сфере с g ручками любое непрерывное векторное поле имеет особую точку.

Сфера с одной ручкой — это тор. На нем можно построить векторное поле без особых точек. Например,

представим тор как вращающееся колесо и рассмотрим на нем поле скоростей движения точек.

На сфере с g ручками можно построить непрерывное векторное поле с одной особой точкой индекса $2-2g$. Возьмем для этого произвольное непрерывное векторное поле с конечным числом особых точек. Соединим две особые точки путем, а затем сольем их в одну особую точку, стянув путь в точку. В результате число особых точек уменьшится на 1. Сделав так несколько раз, получим векторное поле с одной особой точкой. Но нарисовать его на сфере с g ручками затруднительно. Чтобы получить явное изображение векторного поля с одной особой точкой на сфере с g ручками, можно поступить по-другому. Разрежем сферу с g ручками на две части и продеформируем каждую из них в фигуру, изображенную на рис. 7.9. Рисовать на плоских фигурах все же проще. На одной из частей можно взять векторное поле v с параллельными траекториями. Для сферы с двумя ручками его траектории изображены на рис. 7.11. На граничных окружностях другой части получаем векторное поле w , для которого вектор $w(X)$ симметричен вектору $v(X)$ относительно касательной к окружности в точке X . Для сферы с двумя ручками векторное поле w на крае изображено на рис. 7.11 (б). Основная трудность заключается в том, чтобы продолжить его на всю фигуру.

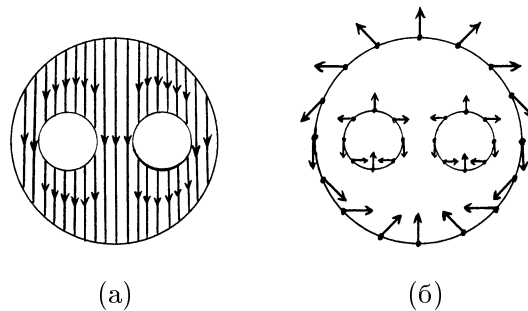


Рисунок 7.11

- **Задача 7.3.** Продолжите векторное поле, изображенное на рис. 7.11 (б), на всю фигуру.

Решения

- **7.1.** Воспользуемся обозначениями рис. 7.12. Так как векторы v и w симметричны относительно касательной, то $\varphi_1 + \varphi_2 = 2(90^\circ + \alpha)$. Поэтому $\varphi_2 = 180^\circ + 2\alpha - \varphi_1$. Пусть точка X совершает полный обход окружности, т.е. угол α изменяется от 0° до 360° . Если при этом угол φ_1 изменяется на $n \cdot 360^\circ$, то угол φ_2 изменяется на $2 \cdot 360^\circ - n \cdot 360^\circ$. Это означает, что если при обходе окружности вектор v совершает n оборотов, то вектор w совершает $2 - n$ оборотов. Согласно теореме 6.1 суммы индексов особых точек векторных полей v и w равны n и $2 - n$ соответственно. Поэтому сумма индексов особых точек полей v и w равна $n + (2 - n) = 2$.

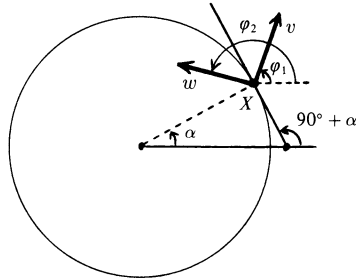


Рисунок 7.12

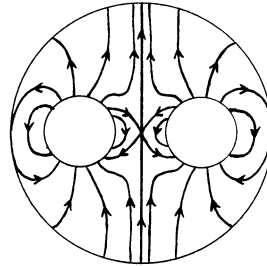


Рисунок 7.13

- **7.2.** Сопоставим каждой точке X , принадлежащей сфере, проекцию вектора $v(X)$ на плоскость, касающуюся сферы в точке X . В результате получим непрерывное векторное поле на сфере. Согласно теореме 7.1 у этого векторного поля есть особая точка X_0 , т.е. проекция вектора $v(X_0)$

на касательную плоскость нулевая. Это означает, что вектор $v(X_0)$ перпендикулярен касательной плоскости.

► 7.3. См. рис. 7.13.

8

Гомеоморфизмы без неподвижных точек. Периодические гомеоморфизмы

Согласно теореме 6.3 любое непрерывное отображение диска D^2 в себя имеет неподвижную точку. Если же из диска вырезать несколько кругов, то для полученного круга с дырками уже можно построить непрерывное отображение в себя без неподвижных точек. Сделать это несложно.

- **Задача 8.1.** Постройте непрерывное отображение без неподвижных точек круга с n дырками в себя.

Задачу 8.1 можно усложнить, потребовав, чтобы отображение без неподвижных точек было гомеоморфизмом. Такое отображение кольца (круга с одной дыркой) построить легко. Для этого достаточно рассмотреть поворот кольца на ненулевой угол. Если количество дырок n больше двух, то построить гомеоморфизм без неподвижных точек тоже несложно. Можно считать, что

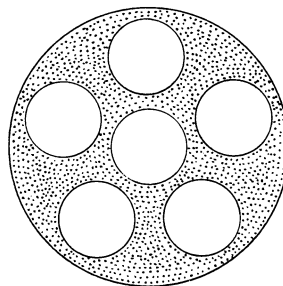


Рисунок 8.1

Можно считать, что

одна дырка расположена в центре, причем фигура переходит в себя при повороте на угол $\frac{2\pi}{n-1}$ (рис. 8.1). Очевидно, что ни одна точка фигуры не остается неподвижной при этом повороте.

- ▷ **Задача 8.2.** Существует ли гомеоморфизм без неподвижных точек для круга с двумя дырками?

Пусть $f : M \rightarrow M$ — отображение некоторого множества M в себя, m — некоторый элемент множества M . Положим, $f^2(m) = f(f(m))$ и $f^k(m) = f(f^{k-1}(m))$ при $k \geq 3$. Отображение f называют *периодическим*, если при некотором $p \geq 2$ для всех элементов множества M справедливо равенство $f^p(m) = m$. Наименьшее из всех таких чисел p называют *периодом* отображения f .

Предостережение. Понятие периода отображения не имеет отношения к понятию периода функции. Напомним, что периодом функции f называют такое число T , что $f(x+T) = f(x)$ для всех чисел x .

Примером периодического отображения служит поворот фигуры на угол, кратный π .

Понятие периода имеет смысл не только для непрерывных отображений, но мы, как и раньше, будем рассматривать лишь непрерывные периодические отображения.

- ▷ **Задача 8.3.** Приведите пример непрерывного периодического отображения f периода 4, которое для части точек имеет период 2, т.е. для этих точек $f(f(m)) = m$ и $f(m) \neq m$.

Особое место среди периодических отображений занимают отображения периода 2. У них даже есть специальное название. Отображение периода 2 называют *инволюцией*. Иными словами, инволюция — это такое нетождественное отображение $f : M \rightarrow M$, что $f(f(m)) = m$.

Примером инволюции служит симметрия относительно точки, прямой или плоскости.

Пусть f — инволюция множества M . Сопоставим каждому элементу m этого множества пару $\{m, f(m)\}$. При этом элементу $f(m)$ сопоставляется та же самая пара, так как $f(f(m)) = m$. В некоторых случаях элементы m и $f(m)$ совпадают, т.е. $m = f(m)$. Напомним, что такие элементы называют неподвижными.

Таким образом, по инволюции f можно построить разбиение множества M на пары элементов $\{m, f(m)\}$ и отдельные неподвижные элементы. Ясно также, что верно и обратное утверждение, т.е. по разбиению множества M на пары элементов и отдельные элементы можно построить инволюцию. Элементы каждой пары она отображает друг в друга, а каждый отдельный элемент она отображает в самого себя.

Пример инволюции окружности можно получить следующим образом. Выберем точку A , не лежащую на окружности. Пусть X — точка окружности. Отобразим ее в точку $f(X)$, в которой прямая AX вторично пересекает окружность (если AX — касательная к окружности, то $f(X) = X$). Для точки A , лежащей внутри окружности, получаем инволюцию без неподвижных точек (рис. 8.2 (а)), а для точки A , лежащей вне окружности, получаем инволюцию с двумя неподвижными точками (рис. 8.2 (б)). Это связано с тем, что из точки,

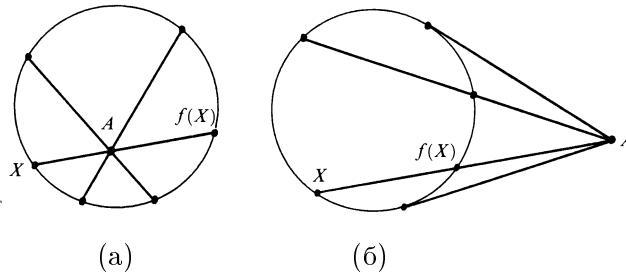


Рисунок 8.2

лежащей внутри окружности, нельзя провести ни одной касательной, а из точки, лежащей вне окружности, можно провести ровно две касательные. Оказывается, что непрерывных инволюций окружности с другим числом неподвижных точек не существует.

- ▷ **Задача 8.4.** Докажите, что количество неподвижных точек любой непрерывной инволюции окружности равно 0 или 2.
- ▷ **Задача 8.5.** а) Постройте пример инволюции тора без неподвижных точек.
 б) Постройте инволюцию тора с четырьмя неподвижными точками.
 в) Постройте инволюцию тора, множество неподвижных точек которой — окружность.
- ▷ **Задача 8.6.** Постройте отображение тора, имеющее период 3 и имеющее ровно 3 неподвижные точки.

Приведем два примера инволюции сферы с g ручками.

Пример 1. Можно считать, что сфера с g ручками имеет центр симметрии O (рис. 8.3). Симметрия относительно точки O является инволюцией сферы с ручками, причем эта инволюция не имеет неподвижных точек. В самом деле, неподвижной точкой рассматриваемой симметрии является лишь точка O . В зависимости от четности g она расположена либо вне сферы с ручками, либо внутри ее, но в обоих случаях точка O не принадлежит сфере с ручками.

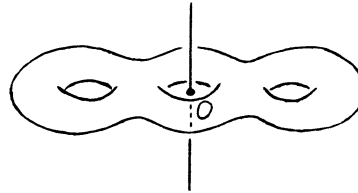


Рисунок 8.3

Пример 2. Можно считать, что сфера с g ручками имеет ось симметрии (см. снова рис. 8.3). Симметрия относительно оси является инволюцией сферы с g ручками. Но

эта инволюция не при всех g будет инволюцией без неподвижных точек. Дело в том, что при четном g ось симметрии пересекает сферу с ручками в двух точках. А при нечетном g получаем инволюцию без неподвижных точек.

Между инволюциями, построенными в примерах 1 и 2, есть существенное различие. Инволюции из примера 1 изменяют ориентацию сферы с ручками, а инволюции из примера 2 сохраняют ориентацию. Мы имеем в виду следующее. Рассмотрим пару векторов, касающихся сферы с ручками в одной точке. Направление вращения от первого вектора ко второму задает ориентацию сферы с ручками. Инволюция переводит данную пару касательных векторов в другую пару касательных векторов. В случае симметрии относительно точки новая пара касательных векторов задает другую ориентацию сферы с ручками, а в случае симметрии относительно прямой — ту же самую ориентацию.

Если на множестве M задана инволюция f , то можно отождествить точку m с точкой $f(m)$; при этом точка $f(m)$ отождествляется с точкой m , так как $f(f(m)) = m$. Эту операцию будем называть *склеивкой по инволюции*.

Посмотрим, что получается из сферы с g ручками при склейке по инволюциям, построенным в примерах 1 и 2. Начать проще всего с инволюций из примера 2 для сфер с нечетным числом ручек. Такие инволюции сохраняют ориентацию и не имеют неподвижных точек.

Рассмотрим сферу с нечетным числом ручек, симметричную относительно прямой (рис. 8.3). Такую сферу с ручками можно разрезать плоскостью, проходящей через ось симметрии, на две части, одна из которых изображена на рис. 8.4. Точки одной части можно склеить с точками другой части, поэтому достаточно рассмотреть одну из двух частей сферы с ручками. Но на границе этой части есть точки, симметричные относительно исходной оси симметрии. Их нужно склеить. На рис. 8.4 изображе-

ны стрелки, которые нужно склеить. Для сферы с тремя ручками в результате получится сфера с двумя ручками, а для сферы с $2g+1$ ручкой получится сфера с $g+1$ ручкой.

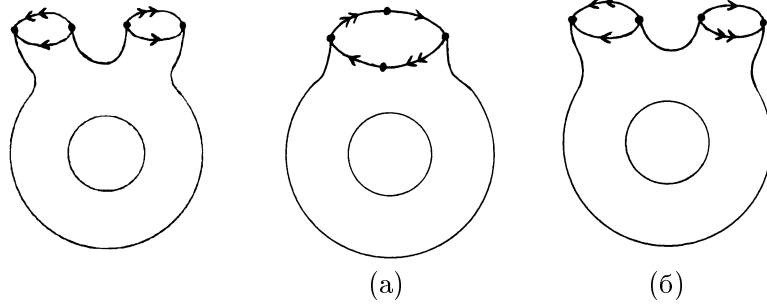


Рисунок 8.4

Рисунок 8.5

Рассмотрим теперь склейки по инволюциям из примера 1. Напомним, что они изменяют ориентацию и не имеют неподвижных точек. Случаи сфер с четным и нечетным числом ручек нужно рассматривать отдельно. На рис. 8.5 показано, какие склейки нужно сделать для сфер с двумя и тремя ручками. Обратите внимание, что стрелки на рис. 8.5 (б) не такие, как на рис. 8.4.

При склейке стрелок, изображенных на рис. 8.5, возникают некоторые трудности. Дело в том, что требуемую склейку нельзя выполнить в трехмерном пространстве. Точнее говоря, ее можно выполнить, лишь допуская самопересечения поверхностей. Результаты такой склейки изображены на рис. 8.6.

Но если нас интересует фигура лишь с точностью до гомеоморфизма, то нет необходимости располагать ее в трехмерном пространстве. Важно лишь знать, как устроены окрестности каждой точки фигуры и как эти окрестности стыкуются друг с другом. У каждой точки сферы с g ручками есть окрестность, гомеоморфная кругу. У каждой точки фигуры, полученной из сферы с g ручками склейкой по инволюции из примера 1, тоже есть такая

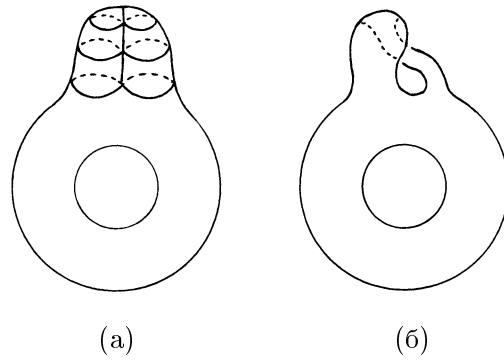


Рисунок 8.6

окрестность. В этом легко убедиться с помощью рис. 8.5.

Мы рассматривали лишь склейки по инволюциям без неподвижных точек. Для таких инволюций образом достаточно малой окрестности U точки x является окрестность V точки $f(x)$, не пересекающаяся с U . При склейке непересекающихся окрестностей U и V получаем окрестность W , гомеоморфную как U , так и V .

В том случае, когда инволюция имеет неподвижную точку x , приходится склеивать друг с другом точки не разных окрестностей U и V , а одной и той же окрестности U . Это приводит ко многим неприятностям. Мы обсудим лишь одну из них.

Пусть A — сфера с ручками, f — инволюция на ней, B — фигура, полученная из A склейкой по инволюции f . Рассмотрим отображение $p : A \rightarrow B$, сопоставляющее точке a точку b , полученную в результате склейки точек a и $f(a)$. Если f — инволюция без неподвижных точек, то достаточно малая окрестность W точки b получается в результате склейки непересекающихся окрестностей U и V . Это означает, что прообраз окрестности W при отображении p состоит из двух непересекающихся окрестностей U и V , а прообраз точки b состоит из точек a и $f(a)$,

лежащих в окрестностях U и V соответственно. Если же инволюция f имеет неподвижную точку x , то ситуация совсем иная. Точка $a = x$ склеивается с точкой $f(x)$, т. е. сама с собой. Поэтому прообраз полученной точки b при отображении p состоит не из двух точек, а из одной точки.

Если фигура B получена из сферы с g ручками A склейкой по инволюции f без неподвижных точек, то у каждой точки b фигуры B есть окрестность, гомеоморфная диску. Поэтому на B тоже можно рассматривать векторные поля.

Теорема 8.1. *Сумма индексов особых точек любого непрерывного векторного поля на B равна $1 - g$.*

Доказательство. По векторному полю w на B можно построить векторное поле на A , которое переходит в w при проекции $p : A \rightarrow B$ (рис. 8.7). Каждой особой точке векторного поля на B соответствуют две особые точки построенного векторного поля на A , имеющие тот же самый индекс. Поэтому сумма индексов особых точек векторного поля на A в два раза больше суммы индексов особых точек векторного поля на B . С другой стороны, согласно теореме 7.3 сумма индексов особых точек любого непрерывного векторного поля на сфере с g ручками A равна $2 - 2g$.

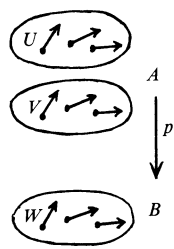


Рисунок 8.7

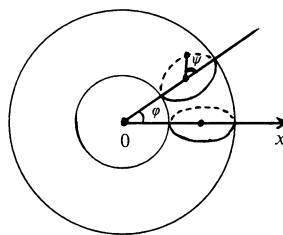


Рисунок 8.8

- **Задача 8.7.** Введем на торе координаты (φ, ψ) , как показано на рис. 8.8. Рассмотрим инволюцию тора, переводящую точку с координатами (φ, ψ) в точку с координатами (ψ, φ) . Докажите, что при склейке тора по этой инволюции получается лист Мёбиуса.

Решения

- **8.1.** Выберем внутри одной из дырок точку O . Отобразим сначала каждую точку X круга с дырками в точку, в которой луч OX пересекает граничную окружность круга. При этом неподвижными будут лишь точки этой окружности. Повернув затем окружность на ненулевой угол, получим отображение без неподвижных точек.
- **8.2.** Ответ: да, существует.

Круг с двумя дырками можно продеформировать в сферу с тремя дырками (рис. 8.9). При этом можно считать, что полученная фигура симметрична относительно плоскости Π и переходит в себя при повороте на 120° вокруг прямой l , перпендикулярной плоскости Π . Ясно, что плоскость Π и прямая l проходят через центр сферы. Требуемый гомеоморфизм — композиция симметрии относительно плоскости Π и поворота на 120° вокруг прямой l .

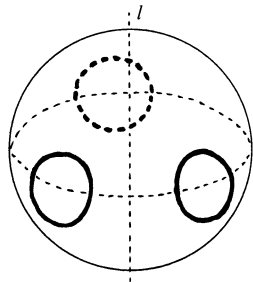


Рисунок 8.9

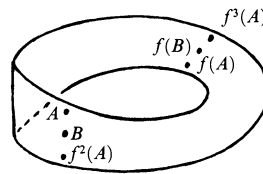


Рисунок 8.10

- **8.3.** Требуемый пример отображения построим для листа Мёбиуса. Склеим для этого лист Мёбиуса из прямоугольной полоски. Проведем на ней линии, параллельные краю листа Мёбиуса. Каждую точку листа Мёбиуса переместим по такой линии на расстояние, равное половине длины полоски (рис. 8.10). Если точка A не равноудалена от несклеиваемых краев полоски, то $f^4(A) = A$, причем точки A , $f(A)$, $f^2(A)$ и $f^3(A)$ различны. Если же точка B равноудалена от краев полоски, то $f^2(B) = B$.
- **8.4.** Достаточно рассмотреть случай, когда инволюция f окружности имеет неподвижную точку A . Требуется доказать, что инволюция f имеет ровно одну неподвижную точку, отличную от A .

Пусть B — некоторая точка окружности, причем $f(B) = C \neq B$. Инволюция f является гомеоморфизмом, так как $f^{-1} = f$. Поэтому f отображает гомеоморфно дугу AB в одну из двух дуг окружности, заданных точками A и C . Обозначим эту дугу AC .

Для двух дуг AB и AC возможны два варианта расположения:

- 1) дуги AB и AC не имеют общих внутренних точек;
- 2) одна из дуг AB и AC содержит другую дугу.

Покажем, что в нашей ситуации второй вариант невозможен. Инволюция f отображает дугу AC в дугу AB , поэтому дуги AB и AC играют аналогичные роли. Пусть для определенности дуга AB содержится в дуге $AC = f(AB)$. Тогда дуга $f(AB) = AC$ содержится в дуге $f(AC) = f(f(AB)) = AB$. Следовательно, дуги AB и AC совпадают, что противоречит условию $C \neq B$.

Итак, дуги AB и AC не пересекаются. Кроме того, если дуга AB содержится в дуге AB_1 , то дуга AC содержится в дуге AC_1 , где $C_1 = f(B_1)$. Это означает, что если точка B движется по окружности так, что длина дуги AB увеличивается, то длина дуги AC тоже увеличивается. Следовательно, в некоторый момент точки B

и C встретятся. Точка их встречи — неподвижная точка инволюции f , причем у f нет других неподвижных точек, кроме этой точки и точки A .

- **8.5.** Пусть O — центр симметрии тора, l — его ось симметрии, причем l пересекает тор в четырех точках (рис. 8.11). Симметрия тора относительно точки O не имеет неподвижных точек, а симметрия тора относительно прямой l имеет четыре неподвижные точки.

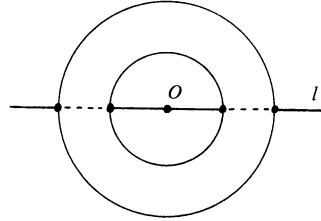


Рисунок 8.11

Пример инволюции тора, множество неподвижных точек которой — окружность, фактически описан в условии задачи 8.7. В самом деле, множество точек тора, для которых $\varphi = \psi$, представляет собой окружность.

- **8.6.** Воспользуемся координатами (φ, ψ) , описанными в условии задачи 8.7. Рассмотрим отображение тора, переводящее точку с координатами (φ, ψ) в точку с координатами $(\psi, -\varphi - \psi)$. При этом отображении точка (φ, ψ) переходит последовательно в точки $(\psi, -\varphi - \psi)$, $(-\psi - \varphi, \varphi)$ и (φ, ψ) . Неподвижными будут точки, для которых $\varphi = \psi + 2m\pi$ и $\psi = -\varphi - \psi + 2n\pi$, где m и n — целые числа. Подставив первое равенство во второе, получим $3\psi = 2(n - m)\pi$, т.е. $\psi = \frac{2(n - m)\pi}{3}$. А так как точка тора, имеющая координаты $(\varphi + 2k\pi, \psi + 2l\pi)$, совпадает с точкой (φ, ψ) , то на торе получаем три неподвижные точки, а именно, $\varphi = \psi = 0$, $\varphi = \psi = \frac{2\pi}{3}$, $\varphi = \psi = \frac{4\pi}{3}$.
- **8.7.** Рассмотрим на плоскости $O\varphi\psi$ квадрат $OB\psi D$, заданный неравенствами $0 \leq \varphi, \psi \leq 2\pi$. Склеив противоположные стороны этого квадрата (рис. 8.12 (а)), по-

лучим тор. Отображение квадрата, переводящее точку (φ, ψ) в точку (ψ, φ) , является симметрией относительно диагонали OC . Склеим точки квадрата, симметричные относительно диагонали OC . При этом произойдет склейка стрелок, нарисованных на сторонах OD и OB . Следовательно, при склейке точек тора по рассматриваемой инволюции получается такая же фигура, как и при склейке двух стрелок, нарисованных на двух катетах прямоугольного треугольника (рис. 8.12 (б)). Разрежем этот треугольник по стрелке b (рис. 8.13 (а)), а затем склеим стрелки a (рис. 8.13 (б)). Теперь ясно, что после склейки стрелок b получается лист Мёбиуса.

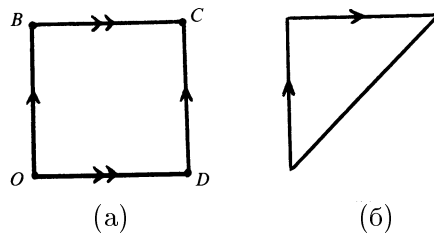


Рисунок 8.12

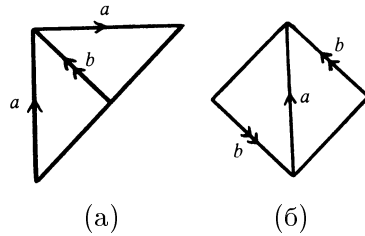


Рисунок 8.13

Двумерные поверхности

В этом параграфе мы более подробно познакомимся с некоторыми свойствами двумерных поверхностей.

Узел трилистник можно расположить на торе (рис. 9.1). При этом получим замкнутую кривую, которая трижды обвивает тор в направлении меридиана и дважды в направлении параллели.

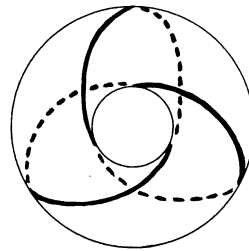


Рисунок 9.1

- ▷ **Задача 9.1.** Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что на торе существует замкнутая несамопересекающаяся кривая, обвивающая его p раз в направлении меридиана и q раз в направлении параллели.

Для меридиана $p = 1$ и $q = 0$, а для параллели $p = 0$ и $q = 1$. Оказывается, что эти значения p и q вместе со значениями, указанными в задаче 9.1, исчерпывают все возможные значения p и q . Одно из наиболее простых доказательств этого утверждения использует задачу 9.2 а).

- ▷ **Задача 9.2.** а) Рассмотрим на плоскости произвольную кривую, соединяющую точки A и B . Докажите, что если n — натуральное число, то существует отрезок PQ дли-

ной $\frac{AB}{n}$, концы которого лежат на данной кривой, а он сам параллелен отрезку AB .

б) Докажите, что если положительное число d не является натуральным, то существует кривая, соединяющая точки A и B , для которой утверждение задачи а) неверно, т.е. если точки P и Q принадлежат этой кривой и отрезок PQ параллелен AB , то длина отрезка PQ не равна $\frac{AB}{d}$.

- ▷ **Задача 9.3.** Докажите, что если замкнутая несамопересекающаяся кривая на торе обвивает его p раз в направлении меридиана и q раз в направлении параллели, то либо числа p и q взаимно простые, либо одно из них равно 1, а другое равно 0.

Сферу можно задать полиномиальным уравнением $P(x, y, z) = 0$, где $P(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Можно ли задать полиномиальным уравнением сферу с g ручками? Оказывается, что да.

- ▷ **Задача 9.4.** Укажите полином $P(x, y, z)$, для которого уравнение $P(x, y, z) = 0$ задает сферу с g ручками.

Изучим теперь более подробно две поверхности, которые нам уже встретились в § 8, а именно, поверхности, которые получаются при склейке диаметрально противоположных точек сферы и при склейке точек тора, симметричных относительно его центра симметрии. Напомним, что они получаются в результате склейки стрелок, изображенных на рис. 9.2 (а) и (б).

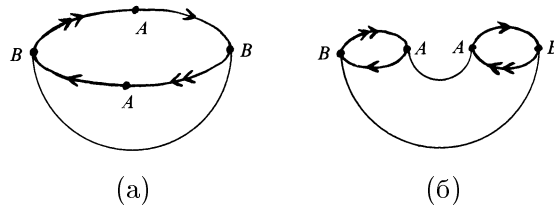


Рисунок 9.2

Как уже говорилось, построенная в примере 1 инволюция изменяет ориентацию сферы с ручками. Из этого следует, что полученная в результате склейки по такой инволюции поверхность неориентируема. В самом деле, соединим на сфере с ручками точку A и симметричную ей точку A' некоторой кривой. В результате склейки по инволюции из этой кривой получится замкнутая кривая, так как точки A и A' склеиваются. Обход вдоль этой замкнутой кривой изменяет ориентацию, поэтому полученная поверхность неориентируема.

Рассмотрим сначала поверхность, которая получается при склейке диаметрально противоположных точек сферы. Эту поверхность называют *проективной плоскостью*. Чтобы объяснить происхождение этого названия, дадим другое определение проективной плоскости. Это определение более длинное, но оно связано с важными понятиями проективной геометрии.

Параллельные линии, например железнодорожные рельсы, кажутся пересекающимися на горизонте. Это вызывает желание дополнить плоскость точками, в которых пересекаются параллельные прямые. Как это сделать? Возьмем точку O , не лежащую в данной плоскости Π . Каждой точке A , лежащей в плоскости Π , можно сопоставить прямую OA (рис. 9.3). Прямой, лежащей в плоскости Π , будет при этом

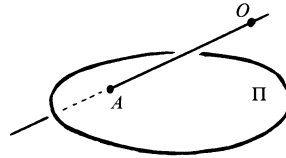


Рисунок 9.3

сопоставлена плоскость, проходящая через точку O , точнее говоря, плоскость за исключением прямой, проходящей через точку O параллельно плоскости Π . Если прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке A , то соответствующие им плоскости пересекаются по прямой OA . Если же прямые l_1 и l_2 параллельны, то соответствующие им плоскости пересекаются по прямой t , параллельной прямым l_1 и l_2 . Это

можно понимать следующим образом: прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке, соответствующей прямой m . Прямая m не пересекает плоскость Π , поэтому она не соответствует никакой точке этой плоскости.

Теперь можно дать следующие определения. Назовем *точками проективной плоскости* прямые, проходящие через точку O , а плоскости, проходящие через точку O , назовем *проективными прямыми*. При этом прямые, проходящие через точку O параллельно плоскости Π , будем называть *бесконечно удаленными точками*. Две проективные прямые пересекаются ровно в одной точке. Проективные прямые, соответствующие параллельным прямым плоскости Π , пересекаются в бесконечно удаленной точке.

Отметим, что плоскость Π не участвует в определении точек проективной плоскости и проективных прямых. Поэтому о плоскости Π можно вообще не говорить. Тогда бесконечно удаленные точки ничем не будут отличаться от остальных точек проективной плоскости.

Покажем теперь, что множество всех определенных выше точек проективной плоскости гомеоморфно поверхности, полученной в результате склейки диаметрально противоположных точек сферы. Рассмотрим для этого сферу с центром O . Каждой точке проективной плоскости соответствуют две точки сферы, а именно, точки, в которых прямая OA пересекает сферу. Эти точки диаметрально противоположные. Таким образом, склеив диаметрально противоположные точки сферы, получим фигуру, гомеоморфную проективной плоскости (рассматриваемой как множество точек проективной плоскости).

- ▷ **Задача 9.5.** Докажите, что если из проективной плоскости вырезать круг, то в результате получится фигура, гомеоморфная листу Мёбиуса.
- ▷ **Задача 9.6.** Выберем на проективной плоскости две проективные прямые и вырежем круг, не пересекающий

их. Полученная фигура гомеоморфна листу Мёбиуса. Изобразите на нем выбранные проективные прямые.

- ▷ **Задача 9.7.** Рассмотрим фигуру, точки которой соответствуют прямым на плоскости. При этом точки считаются близкими, если соответствующие им прямые близки, т.е. они либо пересекаются под малым углом, либо параллельны и расстояние между ними мало. Докажите, что эта фигура гомеоморфна листу Мёбиуса.

* * *

Займемся теперь поверхностью, которая получается в результате склейки точек тора, симметричных относительно его центра симметрии. Эта поверхность называется *бутылка Клейна*. Как уже говорилось, она получается в результате склейки стрелок, изображенных на рис. 9.2 (б). Если допустить самопересечения, то при такой склейке получится поверхность, изображенная на рис. 9.4.

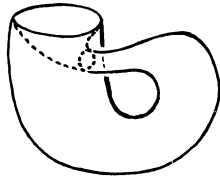


Рисунок 9.4

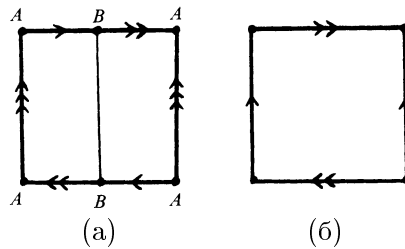


Рисунок 9.5

Бутылку Клейна можно получить, склеивая определенным образом точки сторон квадрата. Чтобы получить такое представление бутылки Клейна, разрежем фигуру, изображенную на рис. 9.2 (б), по дуге, соединяющей пару симметричных точек A и A (эти две точки обозначены одной буквой, потому что при склейке они отождествляются и становятся одной точкой). В результате получим квадрат, точки сторон которого отождествляются так, как показано на рис. 9.5 (а). Две короткие стрелки можно

заменить одной стрелкой. После некоторых переобозначений приходим к рис. 9.5 (б).

Еще одно представление о бутылке Клейна можно получить, разрезав квадрат по диагонали (рис. 9.6 (а)). Склеив после этого одну из пар стрелок, приходим к рис. 9.6 (б). Полученный треугольник можно заменить на квадрат (рис. 9.6 (в)).

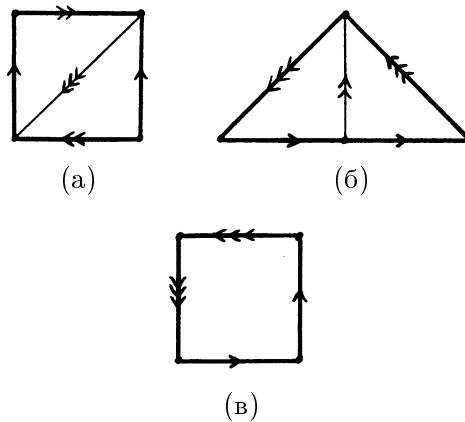


Рисунок 9.6

- ▷ **Задача 9.8.** Докажите, что бутылку Клейна можно разрезать на два листа Мёбиуса.
- ▷ **Задача 9.9.** Рассмотрим фигуру F , точки которой соответствуют парам точек $\{x, y\}$, где x — точка отрезка $[0, 1]$, y — точка листа Мёбиуса. При этом точки $\{x_1, y_1\}$ и $\{x_2, y_2\}$ фигуры F считаются близкими, если близки как точки x_1 и x_2 отрезка, так и точки y_1 и y_2 листа Мёбиуса. Докажите, что граница этой фигуры гомеоморфна бутылке Клейна.
- ▷ **Задача 9.10.** Постройте на бутылке Клейна инволюцию без неподвижных точек.

Если из проективной плоскости вырезать диск, то получим лист Мёбиуса (задача 9.5). Это означает, что про-

ективную плоскость можно получить следующим образом. Вырежем из сферы диск и приклеим лист Мёбиуса к краю полученной сферы с дыркой. Напомним, что краем листа Мёбиуса является окружность, которую можно отождествить с краем сферы с дыркой.

Бутылку Клейна можно разрезать на два листа Мёбиуса. Это означает, что бутылку Клейна можно получить следующим образом. Вырежем из сферы два диска и приклеим к краю каждой дырки по листу Мёбиуса.

Помимо операции приклеивания листа Мёбиуса, есть еще операция приклеивания ручки (рис. 9.7).

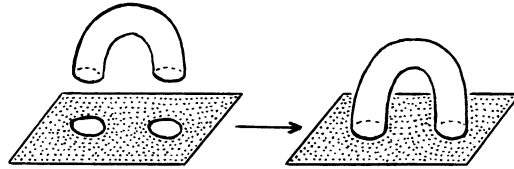


Рисунок 9.7

- **Задача 9.11.** Докажите, что сфера, к которой приклеены три листа Мёбиуса, гомеоморфна сфере, к которой приклеена одна ручка и один лист Мёбиуса.

Решения

- **9.1.** Тор можно получить, склеив точки плоскости с координатами (x, y) и $(x + t, y + n)$, где t и n — целые числа. В самом деле, в результате такой склейки получим квадрат, изображенный на рис. 9.8; стрелки показывают, какие точки его сторон нужно склеить.

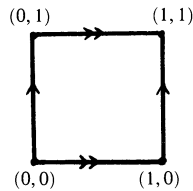


Рисунок 9.8

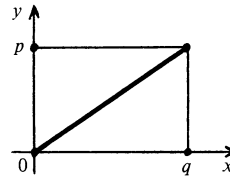


Рисунок 9.9

Чтобы получить тор описанным выше способом, нет необходимости рассматривать всю плоскость. Можно взять и произвольную ее часть, содержащую квадрат, изображенный на рис. 9.8. Например, можно взять прямоугольник с вершинами $(0, 0)$, $(0, p)$, $(q, 0)$ и (q, p) (рис. 9.9). Диагональ этого прямоугольника, исходящая из начала координат, в результате склейки превращается в замкнутую кривую на торе. Эта кривая обвивает тор p раз в направлении меридиана и q раз в направлении параллели (или q раз в направлении меридиана и p раз в направлении параллели; это зависит от того, как именно мы склеили тор из квадрата).

Остается проверить, что на торе получается несамопересекающаяся кривая. Координаты точек рассматриваемой диагонали прямоугольника удовлетворяют уравнению $px = qy$. Предположим, что точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , лежащие на диагонали, отождествляются при склейке, т.е. $x_1 = x_2 + m$ и $y_1 = y_2 + n$, где m и n — целые числа. Учитывая, что $px_1 = qy_1$ и $px_2 = qy_2$, получаем $p(x_2 + m) = q(y_2 + n)$ и $pm = qn$. Так как числа p и q взаимно простые, то $m = kq$ и $n = kp$. Следовательно, при склейке отождествляются лишь концы диагонали; никакие другие точки диагонали не отождествляются.

- **9.2.** а) Будем говорить, что на кривой, соединяющей точки A и B , реализуется расстояние d , если существует отрезок длиной d , концы которого лежат на этой кривой, а сам отрезок параллелен AB . Требуется доказать, что

расстояние $\frac{AB}{n}$ реализуется на любой кривой, соединяющей точки A и B . Докажем сначала, что если $0 < \alpha < 1$, то на любой кривой, соединяющей точки A и B , реализуется хотя бы одно из расстояний αAB и $(1 - \alpha)AB$. Можно считать, что отрезок AB расположен на оси Ox , причем абсциссы его концов равны 0 и 1. Предположим, что на кривой γ_0 не реализуются расстояния α и $1 - \alpha$. Тогда при сдвигах этой кривой вдоль оси Ox на расстояния α и $1 - \alpha$ получаются кривые, не имеющие общих точек с исходной кривой. Пусть γ_α и γ_1 — кривые, полученные из кривой γ_0 сдвигами вдоль оси Ox на расстояние α и 1 в положительном направлении. Тогда кривая γ_α не пересекается ни с γ_0 , ни с γ_1 . Построим кривую L следующим образом. Выберем на кривой γ_α точку с максимальной ординатой и проведем из нее луч, параллельный оси Oy , по направлению к $+\infty$, а из точки с минимальной ординатой проведем луч по направлению $-\infty$ (рис. 9.10). Кривая

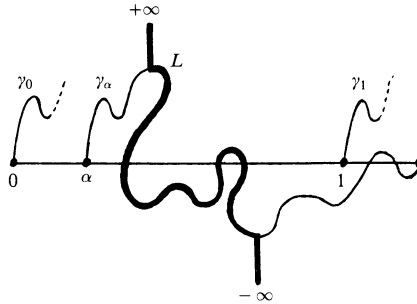


Рисунок 9.10

L состоит из этих двух лучей и части кривой γ_α , идущей из начала одного луча в начало другого. Кривые γ_0 и γ_1 не пересекаются ни с кривой γ_α , ни с рассматриваемыми лучами. Поэтому они не пересекаются с кривой L . А так как кривая L разбивает плоскость на две части, причем точки кривых γ_0 и γ_1 с максимальными ординатами лежат в разных частях, то кривые γ_0 и γ_1 лежат в разных частях.

С другой стороны, кривые γ_0 и γ_1 имеют общую точку с координатами $(1,0)$. Получено противоречие, поэтому хотя бы одно из расстояний α и $1 - \alpha$ реализуется.

Докажем теперь индукцией по n , что расстояние $\frac{AB}{n}$ реализуется на любой кривой. При $n = 1$ утверждение очевидно. Шаг индукции делается следующим образом. Пусть $\alpha = 1/n$. Тогда

$$1 - \alpha = \frac{n-1}{n},$$

поэтому одно из расстояний $\frac{AB}{n}$ и $\frac{(n-1)AB}{n}$ реализуется. Если реализуется расстояние $\frac{AB}{n}$, то утверждение доказано. Если реализуется расстояние $\frac{(n-1)AB}{n}$, то для кривой, соединяющей концы отрезка длиной $\frac{(n-1)AB}{n}$, согласно предположению индукции реализуется расстояние

$$\frac{1}{n-1} \frac{(n-1)AB}{n} = \frac{AB}{n}.$$

б) Пусть n — целая часть числа d . Разделим отрезок $[n, d]$ на n равных частей. На рис. 9.11 изображена кривая γ , соединяющая концы отрезка AB длиной d . Пунктирная кривая γ' получена из кривой γ сдвигом вдоль отрезка AB на расстояние 1. Так как кривые γ и γ' не пересекаются, то на кривой γ не реализуется расстояние $AB/d = 1$.

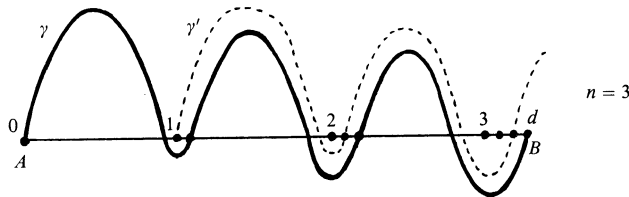


Рисунок 9.11

- **9.3.** Пусть замкнутая кривая γ обвивает тор p раз в направлении меридиана и q раз в направлении параллели. Отождествим точки плоскости, имеющие координаты (x, y) и $(x + m, y + n)$, где m и n — целые числа. В результате получим тор. При такой склейке кривую γ можно получить из кривой Γ , соединяющей на плоскости точки $A = (0, 0)$ и $B = (p, q)$.

Предположим, что числа p и q либо оба не равны нулю и имеют общий делитель $d \neq 1$, либо одно из них равно нулю, а другое равно $d \neq 1$. Согласно задаче 9.2 а) на кривой Γ реализуется расстояние $\frac{AB}{d}$, т.е. на кривой Γ можно выбрать точки P и Q так, что

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{d} \overrightarrow{AB}.$$

Вектор \overrightarrow{PQ} имеет целочисленные координаты $(\frac{p}{d}, \frac{q}{d})$, поэтому точки P и Q отождествляются, т.е. они соответствуют одной и той же точке тора. Это означает, что кривая γ самопересекающаяся.

- **9.4.** Заметим сначала, что если $Q(x, y)$ — произведение g сомножителей вида $(x - 2k + 1)^2 + y^2 - 1$, где $k = 1, \dots, g$, то уравнение $Q(x, y) = 0$ задает на плоскости множество, состоящее из g окружностей (рис. 9.12). Поэтому уравнение

$$Q(x, y) + z^2 - \varepsilon = 0,$$

где ε — достаточно малое положительное число, задает сферу с g ручками.

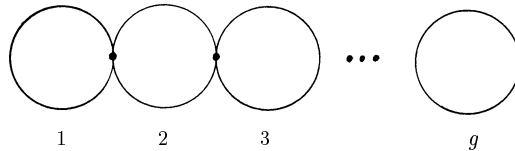


Рисунок 9.12

- **9.5.** На рис. 9.13 (а) показано, как можно представить проективную плоскость с вырезанным диском. Сделаем разрезы b и c , изображенные на рис. 9.13 (б). Затем склеим стрелки a (рис. 9.13 (в)). В результате получим лист Мёбиуса.

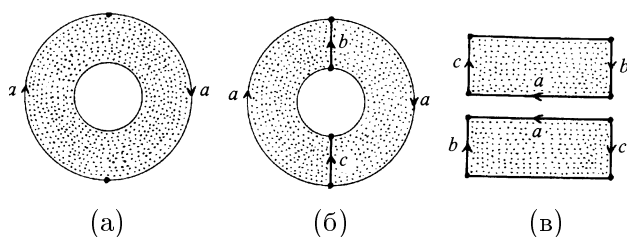


Рисунок 9.13

- **9.6.** На листе Мёбиуса две проективные прямые выглядят так, как показано на рис. 9.14.

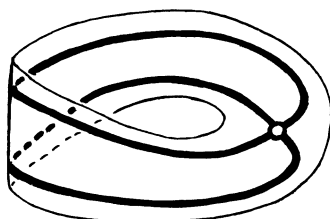


Рисунок 9.14

- **9.7.** Прямая на плоскости задается уравнением $ax + by + c = 0$, где числа a и b не равны нулю одновременно. Поэтому прямой можно сопоставить тройку чисел (a, b, c) . Тройки (a, b, c) и $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$, где $\lambda \neq 0$, задают одну и ту же прямую. Поэтому множество прямых на плоскости гомеоморфно проективной плоскости, из которой выколота точка, соответствующая тройке $(0, 0, 1)$.

Проективная плоскость с выколотой точкой гомеоморфна листу Мёбиуса. При этом предполагается, что граничная окружность не принадлежит листу Мёбиуса.

- **9.8.** Напомним, что два способа склейки бутылки Клейна из квадрата изображены на рис. 9.5 (б) и 9.6 (в). На рис. 9.15 пунктиром изображены требуемые разрезы для обоих способов склейки.

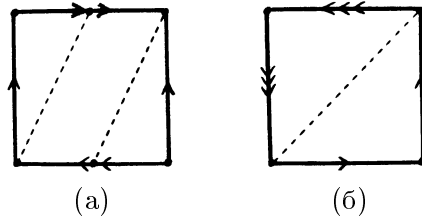
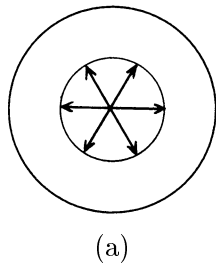
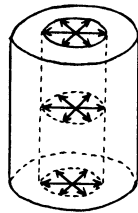


Рисунок 9.15

- **9.9.** Представим лист Мёбиуса как проективную плоскость с вырезанным диском, т.е. как кольцо, на внутренней граничной окружности которого отождествлены диаметрально противоположные точки (рис. 9.16 (а)). Тогда рассматриваемую фигуру можно представить как цилиндр, из которого вырезан меньший цилиндр и при этом граничные точки меньшего цилиндра отождествлены так, как показано на рис. 9.16 (б). После склейки граничные точки меньшего цилиндра, не лежащие на его основаниях, перестанут быть граничными. Поэтому граница рассматриваемой фигуры представляет собой сферу, из которой вырезаны два диска и вместо них вклеены два листа Мёбиуса. Эта поверхность гомеоморфна бутылке Клейна.



(а)



(б)

Рисунок 9.16

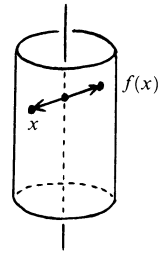


Рисунок 9.17

- **9.10.** Рассмотрим боковую поверхность прямого кругового цилиндра. Ее граница состоит из двух окружностей. Отождествив их точки, симметричные относительно центра симметрии цилиндра получим бутылку Клейна. Требуемая инволюция f этой бутылки Клейна — симметрия относительно оси цилиндра (рис. 9.17).
- **9.11.** Сфера, к которой приклеены два листа Мёбиуса, гомеоморфна бутылке Клейна. Поэтому сфера, к которой приклеены три листа Мёбиуса, гомеоморфна бутылке Клейна, к которой приклеен один лист Мёбиуса. Такая фигура изображена на рис. 9.18 (а). Сделаем разрез c , а затем склеим стрелки b (рис. 9.18 (б)). В результате получим сферу, к которой приклеены ручка a и лист Мёбиуса c .

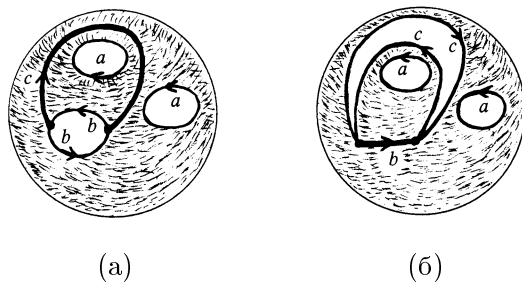


Рисунок 9.18

Список рекомендуемой литературы

Книги

1. Арнольд В. И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. — М.: Наука, 1975.
2. Болтянский В. Г., Ефремович В. А. *Наглядная топология*. — М.: Наука, 1980.
3. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. *Современная геометрия. Методы и приложения*. — М.: Наука, 1986.
4. Коснёвски Ч. *Начальный курс алгебраической топологии*. — М.: Мир, 1983.
5. Кроуэлл Р., Фокс Р. *Введение в теорию узлов*. — М.: Мир, 1967.
6. Масси У., Столлингс Д. *Алгебраическая топология. Введение*. — М.: Мир, 1977.
7. Милнор Дж., Уоллес А. *Дифференциальная топология. Начальный курс*. — М.: Мир, 1972.
8. Постников М. М. *Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий*. — М.: Наука, 1984.
9. Постников М. М. *Лекции по алгебраической топологии. Теория гомотопий клеточных пространств*. — М.: Наука, 1985.

10. Постников М. М. *Дифференциальная геометрия*. — М.: Наука, 1988.
11. Рохлин В. А., Фукс Д. Б. *Начальный курс топологии. Геометрические главы*. — М.: Наука, 1977.
12. Стинрод Н., Чинн У. *Первые понятия топологии*. — М.: Мир, 1967
13. Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. *Курс гомотопической топологии*. — М.: Наука, 1989.
14. Франсис Дж. *Книжка с картинками по топологии*. — М.: Наука, 1991.
15. Шашкин Ю. А. *Неподвижные точки*. — М.: Наука, 1989.
16. Rolfsen D. *Knots and links*. — Berkley, Ca.: Publish or Perish, 1976.

Статьи из журнала «Квант»

17. Белага Э. Г. *Узел на столе математика*. — 1975, № 7.
18. Веселов А. П. *Классификация пленок*. — 1984, № 2.
19. Виро О. Я. *Раскрашенные узлы*. — 1981, № 3.
20. Овсиенко В. *Сколько на земле кривых?* — 1991, № 1.
21. Сосинский А. Б. *Косы и узлы*. — 1989, № 2.
22. Сосинский А. Б. *Узлы, зацепления и их полиномы*. — 1984, № 4.
23. Фукс Д. Б. *Рогатая сфера Александра*. — 1990, № 6.

Содержание

Предисловие	3
1. Деформации эластичных тел	5
2. Узлы и зацепления	10
3. Заклеивание узлов и зацеплений	18
4. Инвариант узла	33
5. Гомеоморфизмы	40
6. Векторные поля на плоскости	54
7. Векторные поля на двумерных поверхностях	73
8. Гомеоморфизмы без неподвижных точек	84
9. Двумерные поверхности	96
Список рекомендуемой литературы	110